

Intégration des fractions rationnelles

Prérequis

Fonctions ln et arctan. Division euclidienne entre polynômes.

Petites décompositions en éléments simples.

Forme canonique d'un trinôme du second degré.

Changements de variable affines dans les intégrales.

Fiche à faire après le chapitre 10.

Cas élémentaires

Calcul 13.1 — Premier cas (I).



Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_1^2 \frac{1}{t+1} dt \dots\dots\dots$

b) $\int_1^2 \frac{1}{2t+1} dt \dots\dots\dots$

Calcul 13.2 — Premiers cas (II).



Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{16}} \frac{1}{\frac{t}{2} + \frac{1}{4}} dt \dots\dots\dots$

b) $\int_0^{a^2} \frac{1}{t+a} dt \dots\dots\dots$

Calcul 13.3 — Deuxième cas.



Calculer les intégrales suivantes, en effectuant d'abord une division euclidienne entre le numérateur et le dénominateur des fractions en jeu.

a) $\int_1^2 \frac{1+t+t^2}{1+t} dt \dots\dots\dots$

b) $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{1+2t+3t^2}{4t+5} dt \dots\dots\dots$

Calcul 13.4 — Troisième cas (I).



Dans ce troisième cas, il s'agit de reconnaître une expression du type $\frac{u'}{u}$.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_1^2 \frac{2t+1}{t^2+t+1} dt \dots\dots\dots$

b) $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\frac{t^2}{2} + \frac{1}{3}} dt \dots\dots\dots$

Calcul 13.5 — Troisième cas (II).



Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{t + \frac{1}{\sqrt{2}}}{t^2 + \sqrt{2}t} dt \dots\dots\dots$

b) $\int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^1 \frac{t}{at^2+1} dt \dots\dots\dots$

Cas plus avancés

Calcul 13.6 — Exemple détaillé d'un calcul d'intégrale.



a) Quels sont les deux zéros de $t \mapsto t^2 - 3t + 2$?

b) Trouver deux réels A et B tels que, pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$, on ait $\frac{1}{(t-1)(t-2)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t-2}$.

.....

c) Calculer $\int_3^4 \frac{2}{t^2 - 3t + 2} dt$

Calcul 13.7



Calculer les intégrales suivantes, en procédant comme ci-dessus.

a) $\int_0^1 \frac{4}{t^2 - 4} dt$

c) $\int_0^1 \frac{1}{t^2 + 4t + 3} dt$

b) $\int_2^3 \frac{2}{t^2 - t} dt$

d) $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{4t^2 - 1} dt$

Calcul 13.8



Soit $a \in]0, 1[$. Calculer $\int_0^a \frac{1}{t^2 - a} dt$

Cinquième cas

Calcul 13.9 — Une primitive à retenir.



Soit $a \in \mathbb{R}^*$.

a) Calculer la dérivée de $x \mapsto \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$

b) Donner une primitive de $x \mapsto \frac{1}{a^2 + x^2}$

Calcul 13.10



Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_0^1 \frac{1}{t^2 + 1} dt$

c) Calculer $\int_{-1}^2 \frac{1}{t^2 + 2} dt$

b) $\int_0^1 \frac{1}{t^2 + 3} dt$

Synthèse

Calcul 13.11 — Mise sous forme canonique.



Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Mettre sous forme canonique les expressions suivantes (où $x \in \mathbb{R}$).

a) $x^2 + x + 1$

c) $\sqrt{2}x^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x + \sqrt{2}$

b) $2x^2 - 3x + 1$

d) $ax^2 + a^2x + a^3$

Calcul 13.12



Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_0^1 \frac{1}{1+2t+t^2} dt$

c) $\int_0^1 \frac{1}{1-t+t^2} dt$

b) $\int_{-1}^0 \frac{1}{1+t+t^2} dt$

d) $\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{6t^2-5t+1} dt$

Calcul 13.13



Soit $a > 1$. Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{1}{3t^2+2t+\frac{10}{3}} dt$

b) $\int_0^1 \frac{1}{t^2-(2a+1)t+a^2+a} dt$

Calcul 13.14 — Un calcul plus difficile.



Calculer $\int_0^1 \frac{1}{1+t^3} dt$

Réponses mélangées

$$\begin{array}{cccccccc} \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} & \ln \frac{33}{28} & \frac{\pi}{6\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{a}} \ln \left(\frac{\sqrt{a}-a}{a+\sqrt{a}} \right) & \frac{\pi}{4} & -\frac{1}{48} + \frac{51}{64} \ln \frac{21}{19} & \frac{1}{3} \left(\ln(2) + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right) & \\ 2 \ln \frac{4}{3} & \ln \left(\frac{a^2}{a^2-1} \right) & \ln \left(2\sqrt{\sqrt{2}-1} \right) & \frac{\pi}{12} & -\ln(3) & 1 \text{ et } 2 & \frac{1}{4} \ln \frac{1}{5} & \\ \frac{1}{a} \arctan \left(\frac{x}{a} \right) & \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{a+1}{2} \right) & \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} & 2 \left(x - \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{1}{8} & \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} & 2 \ln \frac{9}{10} & & \\ \sqrt{2} \left(x + \frac{1}{4} \right)^2 + \sqrt{2} \frac{15}{16} & \ln(2) & \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} & a \left(x + \frac{a}{2} \right)^2 + \frac{3a^3}{4} & \ln \left(\frac{3}{2} \right) & \ln(a+1) & \frac{1}{2} \ln \left(\frac{5}{3} \right) & \\ \frac{\pi}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{a^2+x^2} & \ln \left(\frac{7}{3} \right) & \frac{3}{2} + \ln(3) - \ln(2) & A = -1 \text{ et } B = 1 & 2 \ln \frac{4}{3} & \frac{1}{2} & \end{array}$$

► Réponses et corrigés page 4

Fiche n° 13. Intégration des fractions rationnelles

Réponses

13.1 a) $\ln\left(\frac{3}{2}\right)$

13.1 b) $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{3}\right)$

13.2 a) $2\ln\frac{9}{10}$

13.2 b) $\ln(a+1)$

13.3 a) $\frac{3}{2} + \ln(3) - \ln(2)$

13.3 b) $-\frac{1}{48} + \frac{51}{64}\ln\frac{21}{19}$

13.4 a) $\ln\left(\frac{7}{3}\right)$

13.4 b) $\ln\frac{33}{28}$

13.5 a) $\ln\left(2\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)$

13.5 b) $\frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a+1}{2}\right)$

13.6 a) $1 \text{ et } 2$

13.6 b) $A = -1 \text{ et } B = 1$

13.6 c) $2\ln\frac{4}{3}$

13.7 a) $-\ln(3)$

13.7 b) $2\ln\frac{4}{3}$

13.7 c) $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$

13.7 d) $\frac{1}{4}\ln\frac{1}{5}$

13.8 $\frac{1}{2\sqrt{a}}\ln\left(\frac{\sqrt{a}-a}{a+\sqrt{a}}\right)$

13.9 a) $\frac{1}{a^2+x^2}$

13.9 b) $\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$

13.10 a) $\frac{\pi}{4}$

13.10 b) $\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$

13.10 c) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

13.11 a) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$

13.11 b) $2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$

13.11 c) .. $\sqrt{2}\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \sqrt{2}\frac{15}{16}$

13.11 d) $a\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3a^3}{4}$

13.12 a) $\frac{1}{2}$

13.12 b) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

13.12 c) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

13.12 d) $\ln(2)$

13.13 a) $\frac{\pi}{12}$

13.13 b) $\ln\left(\frac{a^2}{a^2-1}\right)$

13.14 $\frac{1}{3}\left(\ln(2) + \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$

Corrigés

13.1 a) La fonction $t \mapsto 1/(t+1)$ est bien définie et continue sur $[1, 2]$. Une primitive de cette fonction est la fonction $t \mapsto \ln(t+1)$. Donc, on a $\int_1^2 \frac{1}{t+1} dt = \left[\ln(t+1) \right]_1^2 = \ln(3) - \ln(2)$. Enfin, on remarque que $\ln(3) - \ln(2) = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$.

13.1 b) On procède comme précédemment, mais on remarque qu'une primitive de $t \mapsto 1/(2t+1)$ est $t \mapsto \frac{\ln(2t+1)}{2}$: attention à ne pas oublier le facteur $1/2$! On calcule ensuite :

$$\int_1^2 \frac{1}{2t+1} dt = \left[\frac{\ln(2t+1)}{2} \right]_1^2 = \frac{\ln(5) - \ln(3)}{2} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{5}{3}\right).$$

13.2 a) On commence par simplifier l'expression intégrée. Pour $t \in \mathbb{R}$ convenable, on a : $\frac{1}{\frac{t}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{2}{t + \frac{1}{2}}$, en multipliant « en haut et en bas » par 2. Donc, on a :

$$\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{16}} \frac{1}{\frac{t}{2} + \frac{1}{4}} dt = 2 \int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{16}} \frac{1}{t + \frac{1}{2}} dt = 2 \left[\ln\left(t + \frac{1}{2}\right) \right]_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{16}} = 2 \left(\ln \frac{9}{16} - \ln \frac{5}{8} \right) = 2 \ln \frac{9 \times 8}{5 \times 16} = 2 \ln \frac{9}{10}.$$

Le résultat est strictement négatif puisque $9/10 < 1$.

C'est cohérent car on intègre une fonction positive ou nulle entre $\frac{1}{8}$ et $\frac{1}{16}$, donc « à rebours ».

13.2 b) On calcule $\int_0^{a^2} \frac{1}{t+a} dt = \left[\ln(t+a) \right]_0^{a^2} = \ln(a+a^2) - \ln(a) = \ln(a(a+1)) - \ln(a) = \ln(a+1)$.

13.3 a) On commence par faire la division euclidienne de l'expression $t^2 + t + 1$ par $t + 1$. On trouve :

$$t^2 + t + 1 = (t+1)t + 1.$$

Donc, pour $t \in \mathbb{R}$ convenable, on a $\frac{1+t+t^2}{1+t} = t + \frac{1}{1+t}$. Donc :

$$\int_1^2 \frac{1+t+t^2}{1+t} dt = \int_1^2 t dt + \int_1^2 \frac{1}{1+t} dt = \frac{3}{2} + (\ln(3) - \ln(2)) = \frac{3}{2} + \ln(3) - \ln(2).$$

Pour la seconde intégrale, on a utilisé un calcul fait précédemment.

13.3 b) D'abord, on fait une division euclidienne et on trouve $3t^2 + 2t + 1 = (4t+5)\left(\frac{3}{4}t - \frac{7}{16}\right) + \frac{51}{16}$.

Puis, après calcul, on trouve :

$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{4}t - \frac{7}{16} \right) dt = \frac{5}{96} - \frac{7}{96} = -\frac{1}{48} \quad \text{et} \quad \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{4t+5} dt = \frac{1}{4} \left(\ln(7) - \ln \frac{19}{3} \right) = \frac{1}{4} \ln \frac{21}{19}.$$

Ainsi, l'intégrale cherchée vaut $-\frac{1}{48} + \frac{51}{64} \ln \frac{21}{19}$.

13.4 a) On remarque que le numérateur est exactement la dérivée du dénominateur. On a donc :

$$\int_1^2 \frac{2t+1}{t^2+t+1} dt = \left[\ln(t^2+t+1) \right]_1^2 = \ln(7) - \ln(3) = \ln\left(\frac{7}{3}\right).$$

13.4 b) On multiplie en haut et en bas par 2. On calcule :

$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\frac{t^2}{2} + \frac{1}{3}} dt = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{2t}{t^2 + \frac{2}{3}} dt = \left[\ln\left(t^2 + \frac{2}{3}\right) \right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} = \ln \frac{11}{12} - \ln \frac{7}{9} = \ln\left(\frac{11 \times 9}{12 \times 7}\right) = \ln \frac{33}{28}.$$

13.5 a) On calcule :

$$\begin{aligned}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{t + \frac{1}{\sqrt{2}}}{t^2 + \sqrt{2}t} dt &= \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2t + \sqrt{2}}{t^2 + \sqrt{2}t} dt = \frac{1}{2} \left[\ln(t^2 + \sqrt{2}t) \right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} (\ln(4) - \ln(1 + \sqrt{2})) \\ &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{4}{1 + \sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{4(\sqrt{2} - 1)}{(1 + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)}\right) = \frac{1}{2} \ln(4(\sqrt{2} - 1)) = \ln(2\sqrt{\sqrt{2} - 1}).\end{aligned}$$

13.5 b) On force la dérivée du dénominateur à apparaître au numérateur. On calcule :

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^1 \frac{t}{at^2 + 1} dt = \frac{1}{2a} \int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^1 \frac{2at}{at^2 + 1} dt = \frac{1}{2a} \left[\ln(at^2 + 1) \right]_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^1 = \frac{1}{2a} (\ln(a + 1) - \ln(2)) = \frac{1}{2a} \ln\left(\frac{a + 1}{2}\right).$$

13.6 b) Supposons que A et B soient trouvés. En particulier, pour t convenable, on a :

$$\frac{1}{t - 2} = A + \frac{B(t - 1)}{t - 2}.$$

Cette égalité est encore valable pour $t = 1$ (par exemple par continuité). En évaluant en $t = 1$, on trouve $A = -1$. De même, on trouve $B = 1$.

13.6 c) D'après ce qui précède, on a :

$$\begin{aligned}\int_3^4 \frac{2}{t^2 - 3t + 2} dt &= \int_3^4 \frac{2}{(t - 1)(t - 2)} dt = 2 \int_3^4 \frac{1}{(t - 1)(t - 2)} dt = 2 \int_3^4 \frac{1}{t - 2} - \frac{1}{t - 1} dt = 2 \left[\ln(t - 2) - \ln(t - 1) \right]_3^4 \\ &= 2 \left[\ln\left(\frac{t - 2}{t - 1}\right) \right]_3^4 = 2 \left(\ln \frac{2}{3} - \ln \frac{1}{2} \right) = 2 \left(\ln \frac{2}{3} + \ln(2) \right) = 2 \ln \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

13.7 a) Pour $t \in [0, 1]$, on a $\frac{1}{t^2 - 4} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{t - 2} - \frac{1}{t + 2} \right)$. Donc, on calcule :

$$\int_0^1 \frac{4}{t^2 - 4} dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{t - 2} - \frac{1}{t + 2} \right) dt = \left[\ln(2 - t) - \ln(2 + t) \right]_0^1 = \left[\ln\left(\frac{2 - t}{2 + t}\right) \right]_0^1 = \ln \frac{1}{3} = -\ln(3).$$

13.7 b) Déjà, pour $t \in [2, 3]$, on a $\frac{1}{t^2 - t} = \frac{1}{t - 1} - \frac{1}{t}$. Donc, on calcule :

$$\int_2^3 \frac{2}{t^2 - t} dt = 2 \int_2^3 \left(\frac{1}{t - 1} - \frac{1}{t} \right) dt = 2 \left[\ln(t - 1) - \ln(t) \right]_2^3 = 2 \left[\ln\left(\frac{t - 1}{t}\right) \right]_2^3 = 2 \left(\ln \frac{2}{3} - \ln \frac{1}{2} \right) = 2 \ln \frac{4}{3}.$$

13.7 c) Déjà, pour $t \in [0, 1]$, on a $t^2 + 4t + 3 = (t + 1)(t + 3)$ et $\frac{1}{(t + 1)(t + 3)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t + 1} - \frac{1}{t + 3} \right)$.

On calcule ensuite :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{t^2 + 4t + 3} dt &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{t + 1} - \frac{1}{t + 3} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\ln(t + 1) - \ln(t + 3) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left[\ln\left(\frac{t + 1}{t + 3}\right) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

13.7 d) Soit $t \in [0, \frac{1}{3}]$. Déjà, on a $\frac{1}{4t^2 - 1} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{t - \frac{1}{2}} - \frac{1}{t + \frac{1}{2}} \right)$. Puis, on calcule :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{4t^2 - 1} dt &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{t - \frac{1}{2}} - \frac{1}{t + \frac{1}{2}} \right) dt \\ &= \frac{1}{4} \left[\ln\left(\frac{1}{2} - t\right) - \ln\left(t + \frac{1}{2}\right) \right]_0^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4} \left[\ln\left(\frac{\frac{1}{2} - t}{t + \frac{1}{2}}\right) \right]_0^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{1/6}{5/6}\right) = \frac{1}{4} \ln \frac{1}{5}.\end{aligned}$$

13.8 Déjà, on remarque que, pour $t \in \mathbb{R}$ convenable, on a $\frac{1}{t^2 - a} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \left(\frac{1}{t - \sqrt{a}} - \frac{1}{t + \sqrt{a}} \right)$. Donc, on a :

$$\int_0^a \frac{1}{t^2 - a} dt = \frac{1}{2\sqrt{a}} \left[\ln(\sqrt{a} - t) + \ln(t + \sqrt{a}) \right]_0^a = \frac{1}{2\sqrt{a}} \left[\ln \left(\frac{\sqrt{a} - t}{t + \sqrt{a}} \right) \right]_0^a = \frac{1}{2\sqrt{a}} \ln \left(\frac{\sqrt{a} - a}{a + \sqrt{a}} \right).$$

13.9 a) Notons f la fonction de l'énoncé. On a, pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1}{a^2} \times \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a^2 + x^2}$.

13.9 b) D'après ce qui précède, la fonction $x \mapsto \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$ répond à la question.

13.10 a) On a $\int_0^1 \frac{1}{t^2 + 1} dt = \left[\arctan(t) \right]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}$.

13.10 b) On a $\int_0^1 \frac{1}{t^2 + 3} dt = \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) \right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \arctan(0) \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$.

13.10 c) On a :

$$\int_{-1}^2 \frac{1}{t^2 + 2} dt = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \right]_{-1}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\arctan(\sqrt{2}) - \arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\arctan(\sqrt{2}) + \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right).$$

Or, on sait (c'est un exercice « classique ») que, pour tout $x > 0$, on a $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$. Donc, on a :

$$\int_{-1}^2 \frac{1}{t^2 + 2} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

13.11 a) On force le terme en x à apparaître comme le second membre du développement d'une identité remarquable $(x + a)^2$, où a est à déterminer. Puis, on force à apparaître le troisième terme de l'identité remarquable (ici, a^2), qu'on ajoute-soustrait. On trouve :

$$x^2 + x + 1 = x^2 + \left(2 \times \frac{1}{2} \times x\right) + 1 = x^2 + \left(2 \times \frac{1}{2} \times x\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

13.11 b) On procède comme précédemment mais on commence par factoriser par 2. On trouve :

$$\begin{aligned} 2x^2 - 3x + 1 &= 2\left(x^2 - \frac{3}{2} \times x + \frac{1}{2}\right) = 2\left(x^2 - 2 \times \frac{3}{4} \times x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\right) \\ &= 2\left(\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}\right) = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}. \end{aligned} \quad \left(\text{car } \frac{1}{2} - \frac{9}{16} = -\frac{1}{16}\right)$$

13.11 c) On trouve $\sqrt{2}x^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x + \sqrt{2} = \sqrt{2}\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \sqrt{2}\frac{15}{16}$.

13.11 d) On trouve $ax^2 + a^2x + a^3 = a\left(x^2 + ax\right) + a^3 = a\left(\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}\right) + a^3 = a\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3a^3}{4}$.

13.12 a) On calcule $\int_0^1 \frac{1}{1 + 2t + t^2} dt = \int_0^1 \frac{1}{(1 + t)^2} dt = \left[\frac{-1}{1 + t} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$.

13.12 b) Déjà, on a, si $t \in \mathbb{R} : t^2 + t + 1 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$. Donc, on calcule :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 \frac{1}{1 + t + t^2} dt &= \int_{-1}^0 \frac{1}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\theta^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} d\theta = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\arctan\left(\frac{2\theta}{\sqrt{3}}\right) \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \quad (\text{en posant } \theta = t + \frac{1}{2}) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right) = \frac{4}{\sqrt{3}} \times \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4\pi}{\sqrt{3} \times 6} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

.....
13.12 c) On a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{1-t+t^2} dt &= \int_0^1 \frac{1}{(t-1/2)^2 + \frac{3}{4}} dt = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{\theta^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} d\theta \\ &= 2 \int_0^{1/2} \frac{1}{\theta^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} d\theta = 2 \left[\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \right]_0^{1/2} = \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}. \quad (\text{avec } a = \frac{\sqrt{3}}{2})\end{aligned}$$

.....

13.12 d) Déjà, on a $6t^2 - 5t + 1 = 6(t - \frac{1}{2})(t - \frac{1}{3})$, pour $t \in \mathbb{R}$. Donc, $\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{6t^2 - 5t + 1} dt = \frac{1}{6} \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{(t - \frac{1}{2})(t - \frac{1}{3})} dt$.

Or, pour $t \in \mathbb{R}$ convenable, on a : $\frac{1}{(t - \frac{1}{2})(t - \frac{1}{3})} = 6 \left(\frac{1}{t - \frac{1}{2}} - \frac{1}{t - \frac{1}{3}} \right)$. Donc :

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{6t^2 - 5t + 1} dt = \left[\ln\left(\frac{1}{2} - t\right) - \ln\left(\frac{1}{3} - t\right) \right]_0^{\frac{1}{4}} = \left[\ln\left(\frac{\frac{1}{2} - t}{\frac{1}{3} - t}\right) \right]_0^{\frac{1}{4}} = \ln\left(\frac{1/4}{1/12}\right) - \ln\left(\frac{1/2}{1/3}\right) = \ln(3) - \ln(3/2) = \ln(2).$$

.....

13.13 a) On calcule :

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{1}{3t^2 + 2t + \frac{10}{3}} dt &= \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{1}{3(t^2 + \frac{2}{3}t) + \frac{10}{3}} dt = \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{1}{3(t + \frac{1}{3})^2 + \frac{10}{3} - \frac{1}{3}} dt = \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{1}{3(t + \frac{1}{3})^2 + 3} dt \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{1}{\theta^2 + 1} d\theta = \frac{1}{3} \arctan(1) = \frac{\pi}{12}.\end{aligned}$$

.....

13.13 b) Déjà, on remarque qu'on a, pour $t \in \mathbb{R}$ convenable, $t^2 - (2a+1)t + a^2 + a = (t-a)(t-(a+1))$ et :

$$\frac{1}{(t-a)(t-(a+1))} = \frac{1}{t-(a+1)} - \frac{1}{t-a}.$$

Donc, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{t^2 - (2a+1)t + a^2 + a} dt &= \int_0^1 \left(\frac{1}{t-(a+1)} - \frac{1}{t-a} \right) dt = \left[\ln(a+1-t) - \ln(a-t) \right]_0^1 = \left[\ln\left(\frac{a+1-t}{a-t}\right) \right]_0^1 \\ &= \left(\ln\left(\frac{a}{a-1}\right) - \ln\left(\frac{a+1}{a}\right) \right) = \ln\left(\frac{a^2}{a^2-1}\right).\end{aligned}$$

.....

13.14 Déjà, pour $t \in [0, 1]$, on a $\frac{1}{1+t^3} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1+t} + \frac{2-t}{1-t+t^2} \right)$. Ensuite, on calcule $\int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = \ln(2)$.

Puis, on remarque que $\frac{2-t}{1-t+t^2} = \frac{-\frac{1}{2}(2t-1) + \frac{3}{2}}{1-t+t^2}$ et que :

$$\int_0^1 \frac{2t-1}{1-t+t^2} dt = \left[\ln(1-t+t^2) \right]_0^1 = \ln(1) - \ln(1) = 0.$$

Or, on a vu plus haut que $\int_0^1 \frac{1}{1-t+t^2} dt = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. Donc, on trouve :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^3} dt = \frac{1}{3} \left(\ln(2) + \frac{3}{2} \times \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \right) = \frac{1}{3} \left(\ln(2) + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right).$$

.....