

# Intégration des fractions rationnelles

## Prérequis

Fonctions  $\ln$  et  $\arctan$ .  
 Petites décompositions en éléments simples.  
 Forme canonique d'un trinôme du second degré.  
 Changements de variable affines dans les intégrales.  
 Fiche à faire après le chapitre 10.

 : exercices **difficiles**

## Cas élémentaires

### Calcul 13.1 — Premier cas (I).



Calculer les intégrales suivantes.

a)  $\int_1^2 \frac{1}{t+1} dt \dots\dots\dots$

b)  $\int_1^2 \frac{1}{2t+1} dt \dots\dots\dots$

### Calcul 13.2 — Premiers cas (II).



Soit  $a \in \mathbb{R}_+^*$ . Calculer les intégrales suivantes.

a)  $\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{16}} \frac{1}{\frac{t}{2} + \frac{1}{4}} dt \dots\dots\dots$

b)  $\int_0^{a^2} \frac{1}{t+a} dt \dots\dots\dots$

### Calcul 13.3 — Deuxième cas.



Calculer les intégrales suivantes, en effectuant d'abord une division euclidienne entre le numérateur et le dénominateur des fractions en jeu.

À traiter après le chapitre 16.

a)  $\int_1^2 \frac{1+t+t^2}{1+t} dt \dots\dots\dots$

b)  $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{1+2t+3t^2}{4t+5} dt \dots\dots\dots$

### Calcul 13.4 — Troisième cas (I).



Dans ce troisième cas, il s'agit de reconnaître une expression du type  $\frac{u'}{u}$ .

Calculer les intégrales suivantes.

a)  $\int_1^2 \frac{2t+1}{t^2+t+1} dt \dots\dots\dots$

b)  $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\frac{t^2}{2} + \frac{1}{3}} dt \dots\dots\dots$

### Calcul 13.5 — Troisième cas (II).



Soit  $a \in \mathbb{R}_+^*$ . Calculer les intégrales suivantes.

a)  $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{t + \frac{1}{\sqrt{2}}}{t^2 + \sqrt{2}t} dt \dots\dots\dots$

b)  $\int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^1 \frac{t}{at^2 + 1} dt \dots\dots\dots$

## Cas plus avancés

### Calcul 13.6 — Exemple détaillé d'un calcul d'intégrale.



a) Quels sont les deux zéros de  $t \mapsto t^2 - 3t + 2$ ?  $\dots\dots\dots$

b) Trouver deux réels  $A$  et  $B$  tels que, pour tout  $t \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ , on ait  $\frac{1}{(t-1)(t-2)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t-2}$ .

$\dots\dots\dots$

c) Calculer  $\int_3^4 \frac{2}{t^2 - 3t + 2} dt \dots\dots\dots$

### Calcul 13.7



Calculer les intégrales suivantes, en procédant comme ci-dessus.

a)  $\int_0^1 \frac{4}{t^2 - 4} dt \dots\dots\dots$

c)  $\int_0^1 \frac{1}{t^2 + 4t + 3} dt \dots\dots\dots$

b)  $\int_2^3 \frac{2}{t^2 - t} dt \dots\dots\dots$

d)  $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{4t^2 - 1} dt \dots\dots\dots$

### Calcul 13.8



Soit  $a \in ]0, 1[$ . Calculer  $\int_0^a \frac{1}{t^2 - a} dt \dots\dots\dots$

## Cinquième cas

### Calcul 13.9 — Une primitive à retenir.



Soit  $a \in \mathbb{R}^*$ .

a) Calculer la dérivée de  $x \mapsto \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) \dots\dots\dots$

b) Donner une primitive de  $x \mapsto \frac{1}{a^2 + x^2} \dots\dots\dots$

### Calcul 13.10



Calculer les intégrales suivantes.

a)  $\int_0^1 \frac{1}{t^2+1} dt \dots\dots\dots$

c) Calculer  $\int_{-1}^2 \frac{1}{t^2+2} dt$

b)  $\int_0^1 \frac{1}{t^2+3} dt \dots\dots\dots$

## Synthèse

### Calcul 13.11 — Mise sous forme canonique.



Soit  $a \in \mathbb{R}^*$ . Mettre sous forme canonique les expressions suivantes (où  $x \in \mathbb{R}$ ).

a)  $x^2 + x + 1 \dots\dots\dots$

c)  $\sqrt{2}x^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x + \sqrt{2} \dots\dots\dots$

b)  $2x^2 - 3x + 1 \dots\dots\dots$

d)  $ax^2 + a^2x + a^3 \dots\dots\dots$

### Calcul 13.12



Calculer les intégrales suivantes.

a)  $\int_0^1 \frac{1}{1+2t+t^2} dt \dots\dots\dots$

c)  $\int_0^1 \frac{1}{1-t+t^2} dt \dots\dots\dots$

b)  $\int_{-1}^0 \frac{1}{1+t+t^2} dt \dots\dots\dots$

d)  $\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{6t^2-5t+1} dt \dots\dots\dots$

### Calcul 13.13



Soit  $a > 1$ . Calculer les intégrales suivantes.

a)  $\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{1}{3t^2+2t+\frac{10}{3}} dt \dots\dots\dots$

b)  $\int_0^1 \frac{1}{t^2-(2a+1)t+a^2+a} dt \dots\dots\dots$

### Calcul 13.14 — Un calcul plus difficile.



Calculer  $\int_0^1 \frac{1}{1+t^3} dt \dots\dots\dots$

### Réponses mélangées

$$\begin{array}{ccccccc}
 \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} & \ln \frac{33}{28} & \frac{\pi}{6\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{a}} \ln \left( \frac{\sqrt{a}-a}{a+\sqrt{a}} \right) & \frac{\pi}{4} & -\frac{1}{48} + \frac{51}{64} \ln \frac{21}{19} & \frac{1}{3} \left( \ln(2) + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right) \\
 2 \ln \frac{4}{3} & \ln \left( \frac{a^2}{a^2-1} \right) & \ln \left( 2\sqrt{\sqrt{2}-1} \right) & \frac{\pi}{12} & -\ln(3) & 1 \text{ et } 2 & \frac{1}{4} \ln \frac{1}{5} \\
 \frac{1}{a} \arctan \left( \frac{x}{a} \right) & \frac{1}{2a} \ln \left( \frac{a+1}{2} \right) & \left( x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} & 2 \left( x - \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{1}{8} & \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} & 2 \ln \frac{9}{10} \\
 \sqrt{2} \left( x + \frac{1}{4} \right)^2 + \sqrt{2} \frac{15}{16} & \ln(2) & \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} & a \left( x + \frac{a}{2} \right)^2 + \frac{3a^3}{4} & \ln \left( \frac{3}{2} \right) & \ln(a+1) & \frac{1}{2} \ln \left( \frac{5}{3} \right) \\
 \frac{\pi}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{a^2+x^2} & \ln \left( \frac{7}{3} \right) & \frac{3}{2} + \ln(3) - \ln(2) & A = -1 \text{ et } B = 1 & 2 \ln \frac{4}{3} & \frac{1}{2}
 \end{array}$$

► Réponses et corrigés page 5

## Fiche n° 13. Intégration des fractions rationnelles

### Réponses

13.1 a) .....  $\ln\left(\frac{3}{2}\right)$

13.1 b) .....  $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{3}\right)$

13.2 a) .....  $2\ln\frac{9}{10}$

13.2 b) .....  $\ln(a+1)$

13.3 a) .....  $\frac{3}{2} + \ln(3) - \ln(2)$

13.3 b) .....  $-\frac{1}{48} + \frac{51}{64}\ln\frac{21}{19}$

13.4 a) .....  $\ln\left(\frac{7}{3}\right)$

13.4 b) .....  $\ln\frac{33}{28}$

13.5 a) .....  $\ln\left(2\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)$

13.5 b) .....  $\frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a+1}{2}\right)$

13.6 a) .....  $1 \text{ et } 2$

13.6 b) .....  $A = -1 \text{ et } B = 1$

13.6 c) .....  $2\ln\frac{4}{3}$

13.7 a) .....  $-\ln(3)$

13.7 b) .....  $2\ln\frac{4}{3}$

13.7 c) .....  $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$

13.7 d) .....  $\frac{1}{4}\ln\frac{1}{5}$

13.8 .....  $\frac{1}{2\sqrt{a}}\ln\left(\frac{\sqrt{a}-a}{a+\sqrt{a}}\right)$

13.9 a) .....  $\frac{1}{a^2+x^2}$

13.9 b) .....  $\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$

13.10 a) .....  $\frac{\pi}{4}$

13.10 b) .....  $\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$

13.10 c) .....  $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

13.11 a) .....  $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$

13.11 b) .....  $2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$

13.11 c) ..  $\sqrt{2}\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \sqrt{2}\frac{15}{16}$

13.11 d) .....  $a\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3a^3}{4}$

13.12 a) .....  $\frac{1}{2}$

13.12 b) .....  $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

13.12 c) .....  $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

13.12 d) .....  $\ln(2)$

13.13 a) .....  $\frac{\pi}{12}$

13.13 b) .....  $\ln\left(\frac{a^2}{a^2-1}\right)$

13.14 .....  $\frac{1}{3}\left(\ln(2) + \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$

## Corrigés

**13.1 a)** La fonction  $t \mapsto 1/(t+1)$  est bien définie et continue sur  $[1, 2]$ . Une primitive de cette fonction est la fonction  $t \mapsto \ln(t+1)$ . Donc, on a  $\int_1^2 \frac{1}{t+1} dt = \left[ \ln(t+1) \right]_1^2 = \ln(3) - \ln(2)$ . Enfin, on remarque que  $\ln(3) - \ln(2) = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$ .

**13.1 b)** On procède comme précédemment, mais on remarque qu'une primitive de  $t \mapsto 1/(2t+1)$  est  $t \mapsto \frac{\ln(2t+1)}{2}$  : attention à ne pas oublier le facteur  $1/2$  ! On calcule ensuite :

$$\int_1^2 \frac{1}{2t+1} dt = \left[ \frac{\ln(2t+1)}{2} \right]_1^2 = \frac{\ln(5) - \ln(3)}{2} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{5}{3}\right).$$

**13.2 a)** On commence par simplifier l'expression intégrée. Pour  $t \in \mathbb{R}$  convenable, on a :  $\frac{1}{\frac{t}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{2}{t + \frac{1}{2}}$ , en multipliant « en haut et en bas » par 2. Donc, on a :

$$\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{16}} \frac{1}{\frac{t}{2} + \frac{1}{4}} dt = 2 \int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{16}} \frac{1}{t + \frac{1}{2}} dt = 2 \left[ \ln\left(t + \frac{1}{2}\right) \right]_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{16}} = 2 \left( \ln \frac{9}{16} - \ln \frac{5}{8} \right) = 2 \ln \frac{9 \times 8}{5 \times 16} = 2 \ln \frac{9}{10}.$$

Le résultat est strictement négatif puisque  $9/10 < 1$ .

C'est cohérent car on intègre une fonction positive ou nulle entre  $\frac{1}{8}$  et  $\frac{1}{16}$ , donc « à rebours ».

**13.2 b)** On calcule  $\int_0^{a^2} \frac{1}{t+a} dt = \left[ \ln(t+a) \right]_0^{a^2} = \ln(a+a^2) - \ln(a) = \ln(a(a+1)) - \ln(a) = \ln(a+1)$ .

**13.3 a)** On commence par faire la division euclidienne de l'expression  $t^2 + t + 1$  par  $t + 1$ . On trouve :

$$t^2 + t + 1 = (t+1)t + 1.$$

Donc, pour  $t \in \mathbb{R}$  convenable, on a  $\frac{1+t+t^2}{1+t} = t + \frac{1}{1+t}$ . Donc :

$$\int_1^2 \frac{1+t+t^2}{1+t} dt = \int_1^2 t dt + \int_1^2 \frac{1}{1+t} dt = \frac{3}{2} + (\ln(3) - \ln(2)) = \frac{3}{2} + \ln(3) - \ln(2).$$

Pour la seconde intégrale, on a utilisé un calcul fait précédemment.

**13.3 b)** D'abord, on fait une division euclidienne et on trouve  $3t^2 + 2t + 1 = (4t+5)\left(\frac{3}{4}t - \frac{7}{16}\right) + \frac{51}{16}$ .

Puis, après calcul, on trouve :

$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \left( \frac{3}{4}t - \frac{7}{16} \right) dt = \frac{5}{96} - \frac{7}{96} = -\frac{1}{48} \quad \text{et} \quad \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{4t+5} dt = \frac{1}{4} (\ln(7) - \ln \frac{19}{3}) = \frac{1}{4} \ln \frac{21}{19}.$$

Ainsi, l'intégrale cherchée vaut  $-\frac{1}{48} + \frac{51}{64} \ln \frac{21}{19}$ .

**13.4 a)** On remarque que le numérateur est exactement la dérivée du dénominateur. On a donc :

$$\int_1^2 \frac{2t+1}{t^2+t+1} dt = \left[ \ln(t^2+t+1) \right]_1^2 = \ln(7) - \ln(3) = \ln\left(\frac{7}{3}\right).$$

**13.4 b)** On multiplie en haut et en bas par 2. On calcule :

$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\frac{t^2}{2} + \frac{1}{3}} dt = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{2t}{t^2 + \frac{2}{3}} dt = \left[ \ln\left(t^2 + \frac{2}{3}\right) \right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} = \ln \frac{11}{12} - \ln \frac{7}{9} = \ln\left(\frac{11 \times 9}{12 \times 7}\right) = \ln \frac{33}{28}.$$

**13.5 a)** On calcule :

$$\begin{aligned}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{t + \frac{1}{\sqrt{2}}}{t^2 + \sqrt{2}t} dt &= \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2t + \sqrt{2}}{t^2 + \sqrt{2}t} dt = \frac{1}{2} \left[ \ln(t^2 + \sqrt{2}t) \right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} (\ln(4) - \ln(1 + \sqrt{2})) \\ &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{4}{1 + \sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{4(\sqrt{2} - 1)}{(1 + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)}\right) = \frac{1}{2} \ln(4(\sqrt{2} - 1)) = \ln(2\sqrt{\sqrt{2} - 1}).\end{aligned}$$

**13.5 b)** On force la dérivée du dénominateur à apparaître au numérateur. On calcule :

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^1 \frac{t}{at^2 + 1} dt = \frac{1}{2a} \int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^1 \frac{2at}{at^2 + 1} dt = \frac{1}{2a} \left[ \ln(at^2 + 1) \right]_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^1 = \frac{1}{2a} (\ln(a + 1) - \ln(2)) = \frac{1}{2a} \ln\left(\frac{a + 1}{2}\right).$$

**13.6 b)** Supposons que  $A$  et  $B$  soient trouvés. En particulier, pour  $t$  convenable, on a :

$$\frac{1}{t - 2} = A + \frac{B(t - 1)}{t - 2}.$$

Cette égalité est encore valable pour  $t = 1$  (par exemple par continuité). En évaluant en  $t = 1$ , on trouve  $A = -1$ . De même, on trouve  $B = 1$ .

**13.6 c)** D'après ce qui précède, on a :

$$\begin{aligned}\int_3^4 \frac{2}{t^2 - 3t + 2} dt &= \int_3^4 \frac{2}{(t - 1)(t - 2)} dt = 2 \int_3^4 \frac{1}{(t - 1)(t - 2)} dt = 2 \int_3^4 \frac{1}{t - 2} - \frac{1}{t - 1} dt = 2 \left[ \ln(t - 2) - \ln(t - 1) \right]_3^4 \\ &= 2 \left[ \ln\left(\frac{t - 2}{t - 1}\right) \right]_3^4 = 2 \left( \ln \frac{2}{3} - \ln \frac{1}{2} \right) = 2 \left( \ln \frac{2}{3} + \ln(2) \right) = 2 \ln \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

**13.7 a)** Pour  $t \in [0, 1]$ , on a  $\frac{1}{t^2 - 4} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{t - 2} - \frac{1}{t + 2} \right)$ . Donc, on calcule :

$$\int_0^1 \frac{4}{t^2 - 4} dt = \int_0^1 \left( \frac{1}{t - 2} - \frac{1}{t + 2} \right) dt = \left[ \ln(2 - t) - \ln(2 + t) \right]_0^1 = \left[ \ln\left(\frac{2 - t}{2 + t}\right) \right]_0^1 = \ln \frac{1}{3} = -\ln(3).$$

**13.7 b)** Déjà, pour  $t \in [2, 3]$ , on a  $\frac{1}{t^2 - t} = \frac{1}{t - 1} - \frac{1}{t}$ . Donc, on calcule :

$$\int_2^3 \frac{2}{t^2 - t} dt = 2 \int_2^3 \left( \frac{1}{t - 1} - \frac{1}{t} \right) dt = 2 \left[ \ln(t - 1) - \ln(t) \right]_2^3 = 2 \left[ \ln\left(\frac{t - 1}{t}\right) \right]_2^3 = 2 \left( \ln \frac{2}{3} - \ln \frac{1}{2} \right) = 2 \ln \frac{4}{3}.$$

**13.7 c)** Déjà, pour  $t \in [0, 1]$ , on a  $t^2 + 4t + 3 = (t + 1)(t + 3)$  et  $\frac{1}{(t + 1)(t + 3)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{t + 1} - \frac{1}{t + 3} \right)$ .

On calcule ensuite :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{t^2 + 4t + 3} dt &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \frac{1}{t + 1} - \frac{1}{t + 3} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[ \ln(t + 1) - \ln(t + 3) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left[ \ln\left(\frac{t + 1}{t + 3}\right) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left( \ln \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

**13.7 d)** Soit  $t \in [0, \frac{1}{3}]$ . Déjà, on a  $\frac{1}{4t^2 - 1} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{t - \frac{1}{2}} - \frac{1}{t + \frac{1}{2}} \right)$ . Puis, on calcule :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{4t^2 - 1} dt &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{1}{3}} \left( \frac{1}{t - \frac{1}{2}} - \frac{1}{t + \frac{1}{2}} \right) dt \\ &= \frac{1}{4} \left[ \ln\left(\frac{1}{2} - t\right) - \ln\left(t + \frac{1}{2}\right) \right]_0^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4} \left[ \ln\left(\frac{\frac{1}{2} - t}{t + \frac{1}{2}}\right) \right]_0^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{1/6}{5/6}\right) = \frac{1}{4} \ln \frac{1}{5}.\end{aligned}$$

**13.8** Déjà, on remarque que, pour  $t \in \mathbb{R}$  convenable, on a  $\frac{1}{t^2 - a} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \left( \frac{1}{t - \sqrt{a}} - \frac{1}{t + \sqrt{a}} \right)$ . Donc, on a :

$$\int_0^a \frac{1}{t^2 - a} dt = \frac{1}{2\sqrt{a}} \left[ \ln(\sqrt{a} - t) + \ln(t + \sqrt{a}) \right]_0^a = \frac{1}{2\sqrt{a}} \left[ \ln \left( \frac{\sqrt{a} - t}{t + \sqrt{a}} \right) \right]_0^a = \frac{1}{2\sqrt{a}} \ln \left( \frac{\sqrt{a} - a}{a + \sqrt{a}} \right).$$

**13.9 a)** Notons  $f$  la fonction de l'énoncé. On a, pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = \frac{1}{a^2} \times \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a^2 + x^2}$ .

**13.9 b)** D'après ce qui précède, la fonction  $x \mapsto \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$  répond à la question.

**13.10 a)** On a  $\int_0^1 \frac{1}{t^2 + 1} dt = \left[ \arctan(t) \right]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}$ .

**13.10 b)** On a  $\int_0^1 \frac{1}{t^2 + 3} dt = \left[ \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) \right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \arctan(0) \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$ .

**13.10 c)** On a :

$$\int_{-1}^2 \frac{1}{t^2 + 2} dt = \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \right]_{-1}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \arctan(\sqrt{2}) - \arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \arctan(\sqrt{2}) + \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right).$$

Or, on sait (c'est un exercice « classique ») que, pour tout  $x > 0$ , on a  $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ . Donc, on a :

$$\int_{-1}^2 \frac{1}{t^2 + 2} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

**13.11 a)** On force le terme en  $x$  à apparaître comme le second membre du développement d'une identité remarquable  $(x + a)^2$ , où  $a$  est à déterminer. Puis, on force à apparaître le troisième terme de l'identité remarquable (ici,  $a^2$ ), qu'on ajoute-soustrait. On trouve :

$$x^2 + x + 1 = x^2 + \left(2 \times \frac{1}{2} \times x\right) + 1 = x^2 + \left(2 \times \frac{1}{2} \times x\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

**13.11 b)** On procède comme précédemment mais on commence par factoriser par 2. On trouve :

$$\begin{aligned} 2x^2 - 3x + 1 &= 2\left(x^2 - \frac{3}{2} \times x + \frac{1}{2}\right) = 2\left(x^2 - 2 \times \frac{3}{4} \times x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\right) \\ &= 2\left(\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}\right) = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}. \end{aligned} \quad \left(\text{car } \frac{1}{2} - \frac{9}{16} = -\frac{1}{16}\right)$$

**13.11 c)** On trouve  $\sqrt{2}x^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x + \sqrt{2} = \sqrt{2}\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \sqrt{2}\frac{15}{16}$ .

**13.11 d)** On trouve  $ax^2 + a^2x + a^3 = a\left(x^2 + ax\right) + a^3 = a\left(\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}\right) + a^3 = a\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3a^3}{4}$ .

**13.12 a)** On calcule  $\int_0^1 \frac{1}{1 + 2t + t^2} dt = \int_0^1 \frac{1}{(1 + t)^2} dt = \left[ \frac{-1}{1 + t} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$ .

**13.12 b)** Déjà, on a, si  $t \in \mathbb{R} : t^2 + t + 1 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ . Donc, on calcule :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 \frac{1}{1 + t + t^2} dt &= \int_{-1}^0 \frac{1}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\theta^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} d\theta = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[ \arctan\left(\frac{2\theta}{\sqrt{3}}\right) \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \quad (\text{en posant } \theta = t + \frac{1}{2}) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right) = \frac{4}{\sqrt{3}} \times \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4\pi}{\sqrt{3} \times 6} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$



**13.12 c)** On a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{1-t+t^2} dt &= \int_0^1 \frac{1}{(t-1/2)^2 + \frac{3}{4}} dt = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{\theta^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} d\theta \\ &= 2 \int_0^{1/2} \frac{1}{\theta^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} d\theta = 2 \left[ \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \right]_0^{1/2} = \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}. \quad (\text{avec } a = \frac{\sqrt{3}}{2})\end{aligned}$$

**13.12 d)** Déjà, on a  $6t^2 - 5t + 1 = 6\left(t - \frac{1}{2}\right)\left(t - \frac{1}{3}\right)$ , pour  $t \in \mathbb{R}$ . Donc,  $\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{6t^2 - 5t + 1} dt = \frac{1}{6} \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\left(t - \frac{1}{2}\right)\left(t - \frac{1}{3}\right)} dt$ .

Or, pour  $t \in \mathbb{R}$  convenable, on a :  $\frac{1}{\left(t - \frac{1}{2}\right)\left(t - \frac{1}{3}\right)} = 6\left(\frac{1}{t - \frac{1}{2}} - \frac{1}{t - \frac{1}{3}}\right)$ . Donc :

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{6t^2 - 5t + 1} dt = \left[ \ln\left(\frac{1}{2} - t\right) - \ln\left(\frac{1}{3} - t\right) \right]_0^{\frac{1}{4}} = \left[ \ln\left(\frac{\frac{1}{2} - t}{\frac{1}{3} - t}\right) \right]_0^{\frac{1}{4}} = \ln\left(\frac{1/4}{1/12}\right) - \ln\left(\frac{1/2}{1/3}\right) = \ln(3) - \ln(3/2) = \ln(2).$$

**13.13 a)** On calcule :

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{1}{3t^2 + 2t + \frac{10}{3}} dt &= \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{1}{3\left(t^2 + \frac{2}{3}t\right) + \frac{10}{3}} dt = \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{1}{3\left(t + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{10}{3} - \frac{1}{3}} dt = \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{1}{3\left(t + \frac{1}{3}\right)^2 + 3} dt \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{1}{\theta^2 + 1} d\theta = \frac{1}{3} \arctan(1) = \frac{\pi}{12}.\end{aligned}$$

**13.13 b)** Déjà, on remarque qu'on a, pour  $t \in \mathbb{R}$  convenable,  $t^2 - (2a+1)t + a^2 + a = (t-a)(t-(a+1))$  et :

$$\frac{1}{(t-a)(t-(a+1))} = \frac{1}{t-(a+1)} - \frac{1}{t-a}.$$

Donc, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{t^2 - (2a+1)t + a^2 + a} dt &= \int_0^1 \left( \frac{1}{t-(a+1)} - \frac{1}{t-a} \right) dt = \left[ \ln(a+1-t) - \ln(a-t) \right]_0^1 = \left[ \ln\left(\frac{a+1-t}{a-t}\right) \right]_0^1 \\ &= \left( \ln\left(\frac{a}{a-1}\right) - \ln\left(\frac{a+1}{a}\right) \right) = \ln\left(\frac{a^2}{a^2-1}\right).\end{aligned}$$

**13.14** Déjà, pour  $t \in [0, 1]$ , on a  $\frac{1}{1+t^3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+t} + \frac{2-t}{1-t+t^2}\right)$ . Ensuite, on calcule  $\int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = \ln(2)$ .

Puis, on remarque que  $\frac{2-t}{1-t+t^2} = \frac{-\frac{1}{2}(2t-1) + \frac{3}{2}}{1-t+t^2}$  et que :

$$\int_0^1 \frac{2t-1}{1-t+t^2} dt = \left[ \ln(1-t+t^2) \right]_0^1 = \ln(1) - \ln(1) = 0.$$

Or, on a vu plus haut que  $\int_0^1 \frac{1}{1-t+t^2} dt = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ . Donc, on trouve :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^3} dt = \frac{1}{3} \left( \ln(2) + \frac{3}{2} \times \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \right) = \frac{1}{3} \left( \ln(2) + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right).$$