

Systèmes linéaires

Prérequis

Résolution par substitution d'une variable, par combinaisons linéaires de lignes.

 : exercices **difficiles**

Systèmes de 2 équations à 2 inconnues

Calcul 14.1



Résoudre dans $\mathbb{R}^2$.

a) $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x + 4y = 13 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 6y = -3 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y = 16 \\ x - y = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x - 4y = -\sqrt{2} \\ 6x + 2y = 3\sqrt{2} \end{cases}$

Calcul 14.2 — Systèmes avec paramètre.



Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ en fonction des valeurs du paramètre $a \in \mathbb{R}$.

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 2x + 4y = a \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + 5y = a \\ 2x - y = a^2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - ay = 3a + 2 \\ ax + y = 2a - 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 2y = 3a \\ 2x + 3y = 5a - a^2 \end{cases}$

Systèmes de 2 équations à 3 inconnues

Calcul 14.3



Résoudre dans $\mathbb{R}^3$.

a) $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 3x + y - 2z = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y + 3z = 5/2 \\ x + 2y - z = 3/2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 6 \\ x + 2y - z = -2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5x + y + 2z = -5/2 \\ 2x - y + 2z = -5/3 \end{cases}$

Systèmes de 3 équations à 3 inconnues

Calcul 14.4



Résoudre dans $\mathbb{R}^3$.

a) $\begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x - y + z = 8 \\ 3x + y + 2z = 11 \end{cases} \dots\dots\dots$

c) $\begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ x + 10y + z = 0 \end{cases} \dots\dots\dots$

b) $\begin{cases} a - b - c = -7 \\ 3a + 2b - c = 3 \\ 4a + b + 2c = 4 \end{cases} \dots\dots\dots$

d) $\begin{cases} 3x + 2y + 3z = 0 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ 4x + 5y + 4z = 1 \end{cases} \dots\dots\dots$

Calcul 14.5



On considère le système d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$ et de paramètre $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y + az = 2 \\ 2x + ay + 2z = 3. \end{cases}$$

Résoudre ce système pour les valeurs de a proposées.

a) $a = 0 \dots\dots\dots$

c) $a = 3 \dots\dots\dots$

b) $a = -2 \dots\dots\dots$

d) $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\} \dots\dots\dots$

Calcul 14.6



On considère le système d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$ et de paramètres $(a, c) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x - az = c \\ ax - y = c \\ ay - z = c. \end{cases}$$

Résoudre ce système pour les valeurs de a et c proposées.

a) $a = 2, c = 7 \dots\dots\dots$

c) $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et c quelconque
 $\dots\dots\dots$

b) $a = 1, c = 2 \dots\dots\dots$

Calcul 14.7



On propose le système d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$ et de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 4x + y + z = \lambda x \\ x + 4y + z = \lambda y \\ x + y + 4z = \lambda z. \end{cases}$$

Résoudre ce système pour les valeurs de λ proposées.

a) $\lambda = 1$

c) $\lambda = 6$

b) $\lambda = 3$

Réponses mélangées

$$\begin{aligned} &\{(7, 2)\} \quad \{(x, x, x); x \in \mathbb{R}\} \quad (2, -3) \quad \{(5, 3, -1)\} \quad \{(3, 1)\} \quad \{(5z, 1 - 4z, z); z \in \mathbb{R}\} \\ &\{(x, y, -x - y); (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \quad \emptyset \quad \{(2, -1, 3)\} \quad (a - 2a^2, a + a^2) \quad \{(0, 0, 0)\} \\ &\left\{\left(1 - \frac{a}{4}, \frac{-1}{2} + \frac{3}{8}a\right)\right\} \quad \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\} \quad \left\{\left(\frac{13}{6} - \frac{5}{3}z, -\frac{1}{3} + \frac{4}{3}z, z\right); z \in \mathbb{R}\right\} \\ &\{(1, y, 3 + 2y); y \in \mathbb{R}\} \quad \emptyset \quad \emptyset \quad \{(1 + z, -z, z); z \in \mathbb{R}\} \quad \left\{\left(1, \frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+2}\right)\right\} \\ &\left\{\left(\frac{a^2 + a - 1}{a^3 - 1}c, \frac{a^2 - a + 1}{a^3 - 1}c, \frac{-a^2 + a + 1}{a^3 - 1}c\right)\right\} \quad \left\{\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right\} \quad \left\{\left(\frac{1}{13}a + \frac{5}{13}a^2, \frac{2}{13}a - \frac{3}{13}a^2\right)\right\} \\ &\{(1, 1/2, 1/2)\} \quad \left\{\left(-\frac{2}{7} - z, \frac{3}{7}, z\right); z \in \mathbb{R}\right\} \quad \left\{\left(x, \frac{-5}{12} - \frac{3}{2}x, \frac{-25}{24} - \frac{7}{4}x\right); x \in \mathbb{R}\right\} \quad \{(-1, 4, 2)\} \end{aligned}$$

► Réponses et corrigés page 4

Fiche n° 14. Systèmes linéaires

Réponses

14.1 a) $\{(3, 1)\}$

14.1 b) $\{(7, 2)\}$

14.1 c) $\left\{\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right\}$

14.1 d) $\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$

14.2 a) $\left\{\left(1 - \frac{a}{4}, -\frac{1}{2} + \frac{3}{8}a\right)\right\}$

14.2 b) $(2, -3)$

14.2 c) $\left\{\left(\frac{1}{13}a + \frac{5}{13}a^2, \frac{2}{13}a - \frac{3}{13}a^2\right)\right\}$

14.2 d) $(a - 2a^2, a + a^2)$

14.3 a) $\{(1 + z, -z, z) ; z \in \mathbb{R}\}$

14.3 b) $\{(1, y, 3 + 2y) ; y \in \mathbb{R}\}$

14.3 c) $\left\{\left(\frac{13}{6} - \frac{5}{3}z, -\frac{1}{3} + \frac{4}{3}z, z\right) ; z \in \mathbb{R}\right\}$

14.3 d) $\left\{\left(x, \frac{-5}{12} - \frac{3}{2}x, \frac{-25}{24} - \frac{7}{4}x\right) ; x \in \mathbb{R}\right\}$

14.4 a) $\{(2, -1, 3)\}$

14.4 b) $\{(-1, 4, 2)\}$

14.4 c) $\emptyset$

14.4 d) $\left\{\left(-\frac{2}{7} - z, \frac{3}{7}, z\right) ; z \in \mathbb{R}\right\}$

14.5 a) $\{(1, 1/2, 1/2)\}$

14.5 b) $\emptyset$

14.5 c) $\{(5z, 1 - 4z, z) ; z \in \mathbb{R}\}$

14.5 d) $\left\{\left(1, \frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+2}\right)\right\}$

14.6 a) $\{(5, 3, -1)\}$

14.6 b) $\emptyset$

14.6 c) .. $\left\{\left(\frac{a^2 + a - 1}{a^3 - 1}c, \frac{a^2 - a + 1}{a^3 - 1}c, \frac{-a^2 + a + 1}{a^3 - 1}c\right)\right\}$

14.7 a) $\{(0, 0, 0)\}$

14.7 b) $\{(x, y, -x - y) ; (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$

14.7 c) $\{(x, x, x) ; x \in \mathbb{R}\}$

Corrigés

14.1 a) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x + 4y = 13 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 + 2y \\ 3(1 + 2y) + 4y = 13 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 + 2y \\ 10y + 3 = 13 \end{cases} \iff \begin{cases} 10y = 10 \\ x = 1 + 2y \end{cases} \iff \begin{cases} y = 1 \\ x = 3. \end{cases}$$

14.1 b) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{cases} 2x + y = 16 \\ x - y = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 16 - 2x \\ x - 16 + 2x = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x = 5 + 16 = 21 \\ y = 16 - 2x \end{cases} \iff \begin{cases} x = 7 \\ y = 16 - 14 = 2. \end{cases}$$

14.1 c) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{cases} 3x - 6y = -3 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2y = -1 \\ x + y = 1 \end{cases} \xLeftrightarrow_{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} x - 2y = -1 \\ 3y = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{2}{3} \\ x = -1 + 2 \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

14.1 d) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} 3x - 4y = -\sqrt{2} \\ 6x + 2y = 3\sqrt{2} \end{array} \right. &\xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \left\{ \begin{array}{l} 3x - 4y = -\sqrt{2} \\ 8y + 2y = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x - 4y = -\sqrt{2} \\ 10y = 5\sqrt{2} \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 3x = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x = \frac{\sqrt{2}}{3} \end{array} \right. \end{aligned}$$

14.2 a) On a les équivalences suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y = 2 \\ 2x + 4y = a \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 1 - \frac{3}{2}x \\ 2x + 4 - 6x = a \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 1 - \frac{3}{2}x \\ -4x = a - 4 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - \frac{a}{4} \\ y = 1 - \frac{3}{2} + \frac{3}{8}a = \frac{-1}{2} + \frac{3}{8}a \end{array} \right.$$

14.2 b) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} x - ay = 3a + 2 \\ ax + y = 2a - 3 \end{array} \right. &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = ay + 3a + 2 \\ a^2y + 3a^2 + 2a + y = 2a - 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = ay + 3a + 2 \\ (a^2 + 1)y = 2a - 3 - 3a^2 - 2a \end{array} \right. \\ &\xLeftrightarrow{1+a^2 \neq 0} \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{-3 - 3a^2}{1 + a^2} = -3 \\ x = -3a + 3a + 2 = 2. \end{array} \right. \end{aligned}$$

14.2 c) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} 3x + 5y = a \\ 2x - y = a^2 \end{array} \right. &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 2x - a^2 \\ 3x + 5 \times (2x - a^2) = a \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 2x - a^2 \\ 13x - 5a^2 = a \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{13}a + \frac{5}{13}a^2 \\ y = 2 \times \left(\frac{1}{13}a + \frac{5}{13}a^2 \right) - a^2 = \frac{2}{13}a - \frac{3}{13}a^2. \end{array} \right. \end{aligned}$$

14.2 d) On a les équivalences suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y = 3a \\ 2x + 3y = 5a - a^2 \end{array} \right. \xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \left\{ \begin{array}{l} x + 2y = 3a \\ -y = 5a - a^2 - 6a = -a^2 - a \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = a + a^2 \\ x = 3a - 2(a + a^2) = a - 2a^2 \end{array} \right.$$

14.3 a) On a les équivalences suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y + z = 1 \\ 3x + y - 2z = 3 \end{array} \right. \xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1} \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + z = 1 \\ -5y - 5z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = -z \\ x - 2z + z = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + z \\ y = -z. \end{array} \right.$$

14.3 b) On a les équivalences suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x - 2y + z = 6 \\ x + 2y - z = -2 \end{array} \right. \xLeftrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_2} \left\{ \begin{array}{l} 4x = 4 \\ x + 2y - z = -2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ 2y - z = -3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ z = 2y + 3. \end{array} \right.$$

14.3 c) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} x - y + 3z = \frac{5}{2} \\ x + 2y - z = \frac{3}{2} \end{array} \right. &\xLeftrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - L_1] \left\{ \begin{array}{l} x - y + 3z = \frac{5}{2} \\ 3y - 4z = \frac{3}{2} - \frac{5}{2} = -1 \end{array} \right. \xLeftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{-1}{3} + \frac{4}{3}z \\ x = \frac{-1}{3} + \frac{4}{3}z - 3z + \frac{5}{2} \end{array} \right. \\ &\xLeftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{-1}{3} + \frac{4}{3}z \\ x = \frac{13}{6} - \frac{5}{3}z. \end{array} \right. \end{aligned}$$

14.3 d) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} 5x + y + 2z = -\frac{5}{2} \\ 2x - y + 2z = -\frac{5}{3} \end{array} \right. &\xLeftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = -\frac{5}{2} - 5x - 2z \\ 2x + \frac{5}{2} + 5x + 2z + 2z = -\frac{5}{3} \end{array} \right. \xLeftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 7x + 4z = -\frac{5}{3} - \frac{5}{2} = \frac{-25}{6} \\ y = -\frac{5}{2} - 5x - 2z \end{array} \right. \\ &\xLeftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{-25}{24} - \frac{7}{4}x \\ y = -\frac{5}{2} - 5x + \frac{25}{12} + \frac{7}{2}x = \frac{-5}{12} - \frac{3}{2}x. \end{array} \right. \end{aligned}$$

14.4 a) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z = -3 \\ 2x - y + z = 8 \\ 3x + y + 2z = 11 \end{array} \right. &\xLeftrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1, L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1] \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z = -3 \\ -5y + 3z = 14 \\ -5y + 5z = 20 \end{array} \right. \xLeftrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_2] \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z = -3 \\ -5y + 3z = 14 \\ 2z = 6 \end{array} \right. \\ &\xLeftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = 3 \\ x + 2y - 3 = -3 \\ -5y + 3 \times 3 = 14 \end{array} \right. \xLeftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = 3 \\ x + 2y = 0 \\ -5y = 14 - 9 = 5 \end{array} \right. \xLeftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = 3 \\ y = -1 \\ x = -2y = 2. \end{array} \right. \end{aligned}$$

14.4 b) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} a - b - c = -7 \\ 3a + 2b - c = 3 \\ 4a + b + 2c = 4 \end{array} \right. &\xLeftrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1, L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1] \left\{ \begin{array}{l} a - b - c = -7 \\ 5b + 2c = 24 \\ 5b + 6c = 32 \end{array} \right. \xLeftrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_2] \left\{ \begin{array}{l} a - b - c = -7 \\ 5b + 2c = 24 \\ 4c = 8 \end{array} \right. \\ &\xLeftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c = 2 \\ a - b - 2 = -7 \\ 5b + 2 \times 2 = 24 \end{array} \right. \xLeftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c = 2 \\ b = 4 \\ a = -5 + 4 = -1. \end{array} \right. \end{aligned}$$

14.4 c) On a : $\left\{ \begin{array}{l} x + 3y + z = 1 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ x + 10y + z = 0 \end{array} \right. \xLeftrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1, L_3 \leftarrow L_3 - L_1] \left\{ \begin{array}{l} x + 3y + z = 1 \\ -7y = -3 \\ 7y = -1 \end{array} \right. \xLeftrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + L_2] \left\{ \begin{array}{l} x + 3y + z = 1 \\ -7y = -3 \\ 0 = -4. \end{array} \right.$

Le système est incompatible car l'équation $0 = -4$ n'a pas de solution.

14.4 d) On va extraire y de la deuxième équation, puis résoudre par substitution. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x + 2y + 3z = 0 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ 4x + 5y + 4z = 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} y = 2x + 2z + 1 \\ 3x + 4x + 4z + 2 + 3z = 0 \\ 4x + 10x + 10z + 5 + 4z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x + 2z + 1 \\ 7x + 7z = -2 \\ 14x + 14z = -4 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = 2x + 2z + 1 \\ x = -z - \frac{2}{7} \end{cases} \iff \begin{cases} x = -z - \frac{2}{7} \\ y = -2z - \frac{4}{7} + 2z + 1 = \frac{3}{7} \end{cases} \end{aligned}$$

14.5 a) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y = 2 \\ 2x + 2z = 3 \end{cases} &\iff \begin{cases} x = 2 - 2y \\ 2 - 2y + y - z = 1 \\ 4 - 4y + 2z = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 - 2y \\ -y - z = -1 \\ -4y + 2z = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 - 2y \\ y = 1 - z \\ -4 + 4z + 2z = -1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 2 - 2y \\ y = 1 - z \\ 6z = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 3/6 = 1/2 \\ y = 1 - 1/2 = 1/2 \\ x = 2 - 1 = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

14.5 b) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y - 2z = 2 \\ 2x - 2y + 2z = 3 \end{cases} &\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y - z = 1 \\ -4y + 4z = 1 \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2} \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y - z = 1 \\ 0 = 5. \end{cases} \end{aligned}$$

Le système est incompatible car l'équation $0 = 5$ n'a pas de solution.

14.5 c) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + 2z = 3 \end{cases} &\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + 4z = 1 \\ y + 4z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 1 - 4z \\ x = -(1 - 4z) + z + 1 = 5z - 1 + 1 = 5z. \end{cases} \end{aligned}$$

14.5 d) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y + az = 2 \\ 2x + ay + 2z = 3 \end{cases} &\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + (a+1)z = 1 \\ (a-2)y + 4z = 1 \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + (2-a)L_2} \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + (a+1)z = 1 \\ (4 + (2-a)(a+1))z = 3 - a \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + (a+1)z = 1 \\ (4 + a + 2 - a^2)z = 3 - a \end{cases} \iff \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + (a+1)z = 1 \\ (-a^2 + a + 6)z = 3 - a. \end{cases} \end{aligned}$$

On factorise le trinôme $-(a^2 - a - 6) = -(a+2)(a-3)$ qui est non nul dans le cas étudié.

$$\text{D'où : } \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + (a+1)z = 1 \\ (-a^2 + a + 6)z = 3 - a \end{cases} \iff \begin{cases} z = \frac{3-a}{-(a+2)(a-3)} = \frac{1}{a+2} \\ y = 1 - (a+1) \times \frac{1}{a+2} \\ x = 1 - y + z \end{cases} \iff \begin{cases} z = \frac{1}{a+2} \\ y = \frac{a+2-a-1}{a+2} = \frac{1}{a+2} \\ x = 1 - \frac{1}{a+2} + \frac{1}{a+2} = 1. \end{cases}$$

14.6 a) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{cases} x - 2z = 7 \\ 2x - y = 7 \\ 2y - z = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 7 + 2z \\ 14 + 4z - y = 7 \\ 2y - z = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 7 + 2z \\ y = 7 + 4z \\ 14 + 8z - z = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 7 + 2z \\ y = 7 + 4z \\ 7z = -7 \end{cases} \iff \begin{cases} z = -1 \\ y = 7 - 4 = 3 \\ x = 7 - 2 = 5. \end{cases}$$

14.6 b) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{cases} x - z = 2 \\ x - y = 2 \\ y - z = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 + z \\ 2 + z - y = 2 \\ y - z = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 + z \\ y = z \\ 0 = 2. \end{cases}$$

Le système est incompatible car l'équation $0 = 2$ n'a pas de solution.

14.6 c) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x - az = c \\ ax - y = c \\ ay - z = c \end{cases} &\iff \begin{cases} x = c + az \\ a(c + az) - y = c \\ ay - z = c \end{cases} \iff \begin{cases} x = c + az \\ y = (a - 1)c + a^2z \\ a((a - 1)c + a^2z) - z = c \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = c + az \\ y = (a - 1)c + a^2z \\ (a^3 - 1)z = (1 + a - a^2)c. \end{cases} \end{aligned}$$

Dans $\mathbb{R}$, l'équation $a^3 - 1 = 0$ a pour unique solution $a = 1$ (fonction $t \mapsto t^3$ strictement croissante). Or $a \neq 1$, donc $a^3 - 1 \neq 0$, on peut déterminer z dans la troisième équation. On a alors :

$$\begin{cases} x = c + az \\ y = (a - 1)c + a^2z \\ (a^3 - 1)z = (1 + a - a^2)c \end{cases} \iff \begin{cases} z = c \frac{-a^2 + a + 1}{(a - 1)(a^2 + a + 1)} = \frac{-a^2 + a + 1}{a^3 - 1}c \\ y = (a - 1)c + a^2 \frac{-a^2 + a + 1}{a^3 - 1}c = \frac{a^2 - a + 1}{a^3 - 1}c \\ x = c + a \frac{-a^2 + a + 1}{a^3 - 1}c = \frac{a^2 + a - 1}{a^3 - 1}c. \end{cases}$$

14.7 a) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 4x + y + z = x \\ x + 4y + z = y \\ x + y + 4z = z \end{cases} &\iff \begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = -3x - y \\ x + 3y - 3x - y = 0 \\ x + y + 3 \times (-3x - y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = -3x - y \\ x = y \\ -10x = 0 \end{cases} \\ &\iff x = y = z = 0. \end{aligned}$$

14.7 b) On a les équivalences suivantes : $\begin{cases} 4x + y + z = 3x \\ x + 4y + z = 3y \\ x + y + 4z = 3z \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \iff z = -x - y.$

14.7 c) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 4x + y + z = 6x \\ x + 4y + z = 6y \\ x + y + 4z = 6z \end{cases} &\iff \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 2x - y \\ x - 2y + 2x - y = 0 \\ x + y - 2 \times (2x - y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 2x - y \\ 3x - 3y = 0 \\ -3x + 3y = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = y \\ z = 2x - x = x. \end{cases} \end{aligned}$$