

Nombres complexes

 : exercices difficiles

Calculs divers et variés

Calcul 15.1 — Écriture algébrique.



Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique.

a) $(2 + 6i)(5 + i)$

e) $(2 - 3i)^4$

b) $(3 - i)(4 + i)$

f) $\frac{1}{3 - i}$

c) $(4 - 3i)^2$

g) $\frac{2 - 3i}{5 + 2i}$

d) $(1 - 2i)(1 + 2i)$

h) $e^{-i\frac{\pi}{3}}$

Calcul 15.2 — Forme exponentielle.



Mettre les nombres complexes suivants sous forme exponentielle.

a) 12

d) $-2i$

g) $-5 + 5i\sqrt{3}$

b) -8

e) $-2e^{i\frac{3\pi}{5}}$

h) $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{6}}$

c) $\sqrt{3}i$

f) $5 - 5i$

 Calcul 15.3 — Une simplification.
On pose $z = \frac{1 + \sqrt{2} + i}{1 + \sqrt{2} - i}$.

a) Calculer $|z|$

b) Mettre z sous forme algébrique

c) Calculer z^{1515}

Réponses mélangées

$13 - i$

$\frac{3}{10} + \frac{1}{10}i$

1

$4 + 32i$

$\frac{4}{29} - \frac{19}{29}i$

$2e^{i\frac{8\pi}{5}}$

$-119 + 120i$

5

$\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$

$5\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$

12

$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$8e^{i\pi}$

$\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$

$2e^{-i\frac{\pi}{2}}$

$2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{4}}$

$7 - 24i$

$10e^{i\frac{2\pi}{3}}$

► Réponses et corrigés page 2

Fiche n° 15. Nombres complexes

Réponses

15.1 a).....	$\boxed{4 + 32i}$	15.1 g).....	$\boxed{\frac{4}{29} - \frac{19}{29}i}$	15.2 c).....	$\boxed{\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}}$	15.2 h)	$\boxed{2 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{4}}}$
15.1 b).....	$\boxed{13 - i}$			15.2 d).....	$\boxed{2e^{-i\frac{\pi}{2}}}$	15.3 a).....	$\boxed{1}$
15.1 c).....	$\boxed{7 - 24i}$	15.1 h).....	$\boxed{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$	15.2 e).....	$\boxed{2e^{i\frac{8\pi}{5}}}$	15.3 b)...	$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}}$
15.1 d).....	$\boxed{5}$	15.2 a).....	$\boxed{12}$	15.2 f).....	$\boxed{5\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}$	15.3 c)...	$\boxed{-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}}$
15.1 e) ..	$\boxed{-119 + 120i}$	15.2 b).....	$\boxed{8e^{i\pi}}$	15.2 g).....	$\boxed{10e^{i\frac{2\pi}{3}}}$		
15.1 f).....	$\boxed{\frac{3}{10} + \frac{1}{10}i}$						

Corrigés

15.1 a) On développe : $(2 + 6i)(5 + i) = 10 + 2i + 30i + 6i^2 = 10 + 32i - 6 = 4 + 32i$.

15.1 b) On développe : $(3 - i)(4 + i) = 12 + 3i - 4i - i^2 = 12 - i + 1 = 13 - i$.

15.1 c) On développe : $(4 - 3i)^2 = 4^2 - 2 \times 4 \times 3i + (3i)^2 = 16 - 24i - 9 = 7 - 24i$.

15.1 d) On développe : $(1 - 2i)(1 + 2i) = 1^2 - (2i)^2 = 1 + 4 = 5$.

Ou bien : en posant $z = 1 - 2i$, on reconnaît la quantité $z\bar{z}$, c'est-à-dire $|z|^2$. Ainsi, $(1 - 2i)(1 + 2i) = 1^2 + 2^2 = 5$.

15.1 e) On développe :

$$(2 - 3i)^4 = ((2 - 3i)^2)^2 = (4 - 2 \times 2 \times 3i - 9)^2 = (-5 - 12i)^2 = (5 + 12i)^2 = 5^2 + 2 \times 5 \times 12i - 12^2 = -119 + 120i.$$

Autre solution : avec la formule du binôme de Newton, on a :

$$\begin{aligned} (2 - 3i)^4 &= \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} 2^k (-3i)^{4-k} \\ &= (-3i)^4 + 4 \times 2 \times (-3i)^3 + 6 \times 2^2 \times (-3i)^2 + 4 \times 2^3 \times (-3i) + 2^4 \\ &= 81 + 216i - 216 - 96i + 16 = -119 + 120i. \end{aligned}$$

15.1 f) On utilise l'expression conjuguée : $\frac{1}{3 - i} = \frac{3 + i}{(3 - i)(3 + i)} = \frac{3 + i}{3^2 + 1^2} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10}i$.

15.1 g) On utilise l'expression conjuguée et on développe :

$$\frac{2 - 3i}{5 + 2i} = \frac{(2 - 3i)(5 - 2i)}{(5 + 2i)(5 - 2i)} = \frac{10 - 4i - 15i - 6}{5^2 + 2^2} = \frac{4}{29} - \frac{19}{29}i.$$

15.1 h) On utilise la définition de l'écriture exponentielle et la trigonométrie :

$$e^{-i\frac{\pi}{3}} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

15.2 a) On a $|12| = 12$ et $\arg(12) = 0$, donc la réponse est 12 (ou $12e^{0i}$).

15.2 b) On a $|-8| = 8$ et $-1 = e^{i\pi}$.

15.2 c) On a $|\sqrt{3}i| = \sqrt{3}$ et $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$.

15.2 d) On a $|-2i| = 2$ et $-i = \bar{i} = e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

15.2 e) On écrit que $-2 = 2e^{i\pi}$ et on utilise les propriétés de l'exponentielle : $-2e^{i\frac{3\pi}{5}} = 2e^{i\pi}e^{i\frac{3\pi}{5}} = 2e^{i\pi+i\frac{3\pi}{5}} = 2e^{i\frac{8\pi}{5}}$.

15.2 f) On calcule $|5 - 5i| = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{2 \times 5^2} = 5\sqrt{2}$ et on écrit :

$$5 - 5i = 5\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 5\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

15.2 g) On calcule $|-5 + 5i\sqrt{3}| = \sqrt{25 + 75} = 10$ puis on écrit :

$$-5 + 5i\sqrt{3} = 10 \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 10 \left(\cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) \right).$$

15.2 h) On écrit que $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{4}} \left(e^{i(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})} + e^{i(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4})} \right) = e^{i\frac{\pi}{4}} (e^{i\frac{\pi}{12}} + e^{-i\frac{\pi}{12}}) = 2 \cos \left(\frac{\pi}{12} \right) e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Ainsi, $|e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{6}}| = 2 \cos \left(\frac{\pi}{12} \right)$ (car $\cos \left(\frac{\pi}{12} \right) \geq 0$ et $|e^{i\frac{\pi}{4}}| = 1$) et $\arg(e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{6}}) = \arg(e^{i\frac{\pi}{4}}) = \frac{\pi}{4}$.

On en déduit que l'écriture exponentielle de $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{6}}$ est $2 \cos \left(\frac{\pi}{12} \right) e^{i\frac{\pi}{4}}$.

15.3 a) On remarque que le dénominateur de z est le conjugué du numérateur. Ainsi, $|z| = 1$.

15.3 b) De plus, en multipliant par le conjugué, on obtient :

$$\begin{aligned} z &= \frac{(1 + \sqrt{2} + i)^2}{(1 + \sqrt{2} - i)(1 + \sqrt{2} + i)} = \frac{(1 + \sqrt{2})^2 + 2(1 + \sqrt{2})i - 1}{(1 + \sqrt{2})^2 + 1} = \frac{1 + 2\sqrt{2} + 2 + 2(1 + \sqrt{2})i - 1}{1 + 2\sqrt{2} + 2 + 1} \\ &= \frac{2 + 2\sqrt{2} + 2(1 + \sqrt{2})i}{4 + 2\sqrt{2}} = \frac{2(1 + \sqrt{2})(1 + i)}{2\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i. \end{aligned}$$

15.3 c) Enfin, $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = e^{i\frac{\pi}{4}}$, donc $z^{1515} = (e^{i\frac{\pi}{4}})^{1515} = e^{\frac{1515}{4}i\pi}$. Comme de plus $1515 = 4 \times 378 + 3$, on a :

$$e^{\frac{1515}{4}i\pi} = e^{378i\pi + \frac{3\pi}{4}i} = e^{378i\pi} e^{\frac{3\pi}{4}i} = e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$