Fiche de calcul n° 16 **016A**

Trigonométrie et nombres complexes

Prérequis
Formules de trigonométrie.

: exercices **difficiles**

Dans toute cette fiche, x désigne une quantité réelle.

Arc-moitié, arc-moyen

Calcul 16.1

Écrire sous forme trigonométrique (c'est-à-dire sous la forme $re^{i\theta}$, avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$) :

a) $1 + e^{i\frac{\pi}{6}}$ ....

b) $1 + e^{i\frac{7\pi}{6}}$ ....

c) $e^{-i\frac{\pi}{6}} - 1$ ....

d) $1 + ie^{i\frac{\pi}{3}}$ ....

e) $-1 - e^{i\frac{\pi}{6}}$ ....

f) $1 - e^{i\frac{\pi}{12}}$ ....

g) $\dfrac{1 + e^{i\frac{\pi}{6}}}{1 - e^{i\frac{\pi}{12}}}$ ....

h) $\left(1 + e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{27}$ ....

Calcul 16.2

Écrire sous forme trigonométrique (c'est-à-dire sous la forme $re^{i\theta}$, avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$) :

a) $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{2}}$ ....

b) $e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{2}}$ ....

Linéarisations et délinéarisations

Calcul 16.3 — Linéarisations.

Linéariser :

a) $\cos^3(x)$ ....

b) $\cos(2x)\sin^2(x)$ ....

c) $\cos^2(2x)\sin^2(x)$ ...

d) $\cos(3x)\sin^3(2x)$ ...

e) $\cos^3(2x)\cos(3x)$ ..

f) $\sin^2(4x)\sin(3x)$ ...

Calcul 16.4 — Délinéarisations.

Exprimer en fonction des puissances de $\cos(x)$ et de $\sin(x)$:

a) $\cos(3x)$ ....

b) $\sin(4x)$ ....

Factorisations

Calcul 16.5

Factoriser :

a) $\cos(x) + \cos(3x)$ .....

c) $\cos(x) - \cos(3x)$ .....

b) $\sin(5x) - \sin(3x)$ .....

d) $\sin(3x) + \sin(5x)$ .....

Calcul 16.6

Factoriser :

a) $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x)$ ....

b) $\cos(x) + \cos(3x) + \cos(5x) + \cos(7x)$ ....

c) $\cos(x) + \cos\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \dfrac{4\pi}{3}\right)$ ....

Réponses mélangées

$\dfrac{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\sin(2x)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ $\quad$ $\dfrac{\sin(8x)}{2\sin(x)}$ $\quad$ $-\dfrac{1}{8}\cos(6x) + \dfrac{1}{4}\cos(4x) - \dfrac{3}{8}\cos(2x) + \dfrac{1}{4}$ $\quad$ $2\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\frac{-7\mathrm{i}\pi}{12}}$

$2\sin(x)\sin(2x)$ $\quad$ $2\sin(4x)\cos(x)$ $\quad$ $2\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{12}}$ $\quad$ $\left(-2\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}$

$2^{27}\cos^{27}\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ $\quad$ $2\sin\left(\dfrac{\pi}{24}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{11\pi}{24}}$ $\quad$ $\dfrac{1}{4}\cos(3x) + \dfrac{3}{4}\cos(x)$ $\quad$ $2\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$

$-\dfrac{1}{4}\sin(11x) + \dfrac{1}{4}\sin(5x) + \dfrac{1}{2}\sin(3x)$ $\quad$ $4\cos^3(x) - 3\cos(x)$ $\quad$ $2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$

$-\dfrac{1}{4}\cos(4x) + \dfrac{1}{2}\cos(2x) - \dfrac{1}{4}$ $\quad$ $2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}$ $\quad$ $4\cos^3(x)\sin(x) - 4\cos(x)\sin^3(x)$

$-\dfrac{\sin(9x)}{8} + \dfrac{3\sin(5x)}{8} - \dfrac{\sin(3x)}{8} - \dfrac{3\sin(x)}{8}$ $\quad$ 0 $\quad$ $\dfrac{\cos(9x)}{8} + \dfrac{3\cos(5x)}{8} + \dfrac{\cos(3x)}{8} + \dfrac{3\cos(x)}{8}$

$2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{12}}$ $\quad$ $2\cos(2x)\cos(x)$ $\quad$ $2\cos(4x)\sin(x)$ $\quad$ $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)}\mathrm{e}^{\frac{13\mathrm{i}\pi}{24}}$

► Réponses et corrigés page 3

Fiche n° 16. Trigonométrie et nombres complexes

Réponses

16.1 a) .... $\boxed{2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{12}}}$

16.1 b) .... $\boxed{\left(-2\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)e^{-i\frac{5\pi}{12}}}$

16.1 c) .... $\boxed{2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{\frac{-7i\pi}{12}}}$

16.1 d) .... $\boxed{2\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)e^{\frac{5i\pi}{12}}}$

16.1 e) .... $\boxed{2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{13\pi}{12}}}$

16.1 f) .... $\boxed{2\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)e^{-i\frac{11\pi}{24}}}$

16.1 g) .... $\boxed{\frac{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)}e^{\frac{13i\pi}{24}}}$

16.1 h) .... $\boxed{2^{27}\cos^{27}\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{4}}}$

16.2 a) .... $\boxed{2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{5\pi}{12}}}$

16.2 b) .... $\boxed{2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{-i\frac{\pi}{12}}}$

16.3 a) .... $\boxed{\frac{1}{4}\cos(3x)+\frac{3}{4}\cos(x)}$

16.3 b) .... $\boxed{-\frac{1}{4}\cos(4x)+\frac{1}{2}\cos(2x)-\frac{1}{4}}$

16.3 c) ... $\boxed{-\frac{1}{8}\cos(6x)+\frac{1}{4}\cos(4x)-\frac{3}{8}\cos(2x)+\frac{1}{4}}$

16.3 d) ... $\boxed{-\frac{\sin(9x)}{8}+\frac{3\sin(5x)}{8}-\frac{\sin(3x)}{8}-\frac{3\sin(x)}{8}}$

16.3 e) .... $\boxed{\frac{\cos(9x)}{8}+\frac{3\cos(5x)}{8}+\frac{\cos(3x)}{8}+\frac{3\cos(x)}{8}}$

16.3 f) .... $\boxed{-\frac{1}{4}\sin(11x)+\frac{1}{4}\sin(5x)+\frac{1}{2}\sin(3x)}$

16.4 a) .... $\boxed{4\cos^3(x)-3\cos(x)}$

16.4 b) .... $\boxed{4\cos^3(x)\sin(x)-4\cos(x)\sin^3(x)}$

16.5 a) .... $\boxed{2\cos(2x)\cos(x)}$

16.5 b) .... $\boxed{2\cos(4x)\sin(x)}$

16.5 c) .... $\boxed{2\sin(x)\sin(2x)}$

16.5 d) .... $\boxed{2\sin(4x)\cos(x)}$

16.6 a) .... $\boxed{\frac{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\sin(2x)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}}$

16.6 b) .... $\boxed{\frac{\sin(8x)}{2\sin(x)}}$

16.6 c) .... $\boxed{0}$

Corrigés

16.1 a) On a $1+e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{12}}\left(e^{-\frac{i\pi}{12}}+e^{\frac{i\pi}{12}}\right) = \underbrace{2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}_{>0}e^{i\frac{\pi}{12}}$.

16.1 b) On a $1+e^{i\frac{7\pi}{6}} = e^{\frac{7i\pi}{12}}\left(e^{-\frac{7i\pi}{12}}+e^{\frac{7i\pi}{12}}\right) = \underbrace{2\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)}_{<0}e^{\frac{7i\pi}{12}} = \left(-2\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)e^{\frac{7i\pi}{12}}e^{-i\pi} = \left(-2\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)e^{-i\frac{5\pi}{12}}$.

16.1 c) On a $e^{-i\frac{\pi}{6}}-1 = e^{-i\frac{\pi}{12}}\left(e^{-i\frac{\pi}{12}}-e^{i\frac{\pi}{12}}\right) = e^{-i\frac{\pi}{12}}\left(-2i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{-i\frac{\pi}{12}-i\frac{\pi}{2}} = 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{-\frac{7i\pi}{12}}$.

16.1 d) On a $1+ie^{i\frac{\pi}{3}} = 1+e^{i\frac{5\pi}{6}} = e^{\frac{5i\pi}{12}}2\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)e^{\frac{5i\pi}{12}}$.

16.1 e) On a $-1-e^{i\frac{\pi}{6}} = -e^{i\frac{\pi}{12}}\left(e^{-i\frac{\pi}{12}}+e^{i\frac{\pi}{12}}\right) = \underbrace{-2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}_{<0}e^{i\frac{\pi}{12}} = 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{12}+i\pi} = 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{13\pi}{12}}$.

16.1 f) On a $1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{24}}\left(-2\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{24}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = 2\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{11\pi}{24}}$.

16.1 g) On fait le quotient de deux des résultats précédents.

16.1 h) On a $\left(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right)^{27} = \left(2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}\right)^{27} = 2^{27}\cos^{27}\left(\frac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

16.2 a) On a $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}}{2}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}}{2}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}}{2}}\right) = \underbrace{2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}_{>0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}$.

16.2 b) On a $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}}{2}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}}{2}}\right) = -2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\mathrm{i}\mathrm{e}^{5\mathrm{i}\frac{\pi}{12}} = 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{5\mathrm{i}\frac{\pi}{12}-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \underbrace{2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}_{>0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$.

16.3 a) On calcule :

$$\begin{aligned}\cos^3(x) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} + 3\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} + 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}\right)\\ &= \frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}\right) + \frac{3}{8}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right) = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos x.\end{aligned}$$

16.3 b) On calcule :

$$\begin{aligned}\cos(2x)\sin^2(x) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}}{2}\right)\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)^2 = -\frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\right)\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}-2+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\right)\\ &= -\frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x} - 2\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\right)+2\right)\\ &= -\frac{1}{4}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x) - \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

16.3 c) On calcule :

$$\begin{aligned}\cos^2(2x)\sin^2(x) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}}{2}\right)^2\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)^2 = -\frac{1}{16}\left(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}+2+\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x}\right)\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}-2+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\right)\\ &= -\frac{1}{16}\left(\mathrm{e}^{6\mathrm{i}x} - 2\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + 2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} - 4 + 2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x} - 2\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-6\mathrm{i}x}\right)\\ &= -\frac{1}{16}\left(\mathrm{e}^{6\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-6\mathrm{i}x} - 2(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x}) + 3(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}) - 4\right)\\ &= -\frac{1}{8}\cos(6x) + \frac{1}{4}\cos(4x) - \frac{3}{8}\cos(2x) + \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

16.3 d) On calcule :

$$\begin{aligned}\cos(3x)\sin^3(2x) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}}{2}\right)\left(\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)^3 = -\frac{1}{16\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}\right)\left(\mathrm{e}^{6\mathrm{i}x} - 3\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + 3\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-6\mathrm{i}x}\right)\\ &= -\frac{1}{16\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{9\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-9\mathrm{i}x} - 3(\mathrm{e}^{5\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-5\mathrm{i}x}) + \mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x} + 3(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})\right)\\ &= -\frac{1}{8}\sin(9x) + \frac{3}{8}\sin(5x) - \frac{1}{8}\sin(3x) - \frac{3}{8}\sin(x).\end{aligned}$$

16.4 a) On calcule :

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}) = \mathrm{Re}\big((\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^3\big) = \mathrm{Re}\big((\cos(x)+\mathrm{i}\sin(x))^3\big)\\ &= \mathrm{Re}(\cos^3(x) + 3\mathrm{i}\cos^2(x)\sin(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) - \mathrm{i}\sin^3(x))\\ &= \cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) = \cos^3(x) - 3\cos(x)(1-\cos^2(x)) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x).\end{aligned}$$

16.4 b) On calcule :

$$\begin{aligned}\sin(4x) &= \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}) = \mathrm{Im}\big((\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^4\big) = \mathrm{Im}\big((\cos(x)+\mathrm{i}\sin(x))^4\big)\\ &= \mathrm{Im}(\cos^4(x) + 4\mathrm{i}\cos^3(x)\sin(x) - 6\cos^2(x)\sin^2(x) - 4\mathrm{i}\cos(x)\sin^3(x) + \sin^4(x))\\ &= 4\cos^3(x)\sin(x) - 4\cos(x)\sin^3(x).\end{aligned}$$

16.5 a) On a $\cos(x)+\cos(3x) = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}) = \mathrm{Re}\Big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x+3x}{2}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-x)}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})\Big) = \mathrm{Re}\big(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}2\cos(x)\big) = 2\cos(2x)\cos(x)$.

16.5 b) On a $\sin(5x)-\sin(3x) = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{5\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}) = \mathrm{Im}\big(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})\big) = \mathrm{Im}\big(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}2\mathrm{i}\sin(x)\big) = 2\cos(4x)\sin(x)$.

16.5 c) On a :

$$\begin{aligned}\cos(x)-\cos(3x) &= \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}) = \mathrm{Re}\Big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x+3x}{2}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-x)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})\Big)\\ &= \mathrm{Re}\big(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}(-2\mathrm{i})\sin(x)\big) = 2\sin(x)\sin(2x).\end{aligned}$$

16.5 d) On a $\sin(3x)+\sin(5x) = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{5\mathrm{i}x}) = \mathrm{Im}\big(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})\big) = \mathrm{Im}\big(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}2\cos(x)\big) = 2\sin(4x)\cos(x)$.

16.6 a) Si $x\in 2\pi\mathbb{Z}$, alors cette somme vaut 0. Sinon, on a :

$$\begin{aligned}\sin(x)+\sin(2x)+\sin(3x) &= \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x})\\ &= \mathrm{Im}\big(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^2+(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^3\big).\end{aligned}$$

Or, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\neq 1$ donc $1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^2+(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^3 = \dfrac{1-\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}$.
En utilisant maintenant l'astuce de l'arc-moitié, on obtient :

$$\sin(x)+\sin(2x)+\sin(3x) = \mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x}{2}}}\,\frac{-2\mathrm{i}\sin(2x)}{-2\mathrm{i}\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right) = \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3x}{2}}\,\frac{\sin(2x)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right) = \frac{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\sin(2x)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

16.6 b) Si $x\in 2\pi\mathbb{Z}$, alors cette somme vaut 4.
Si x est de la forme $\pi+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$, la somme vaut -4.
Sinon, on calcule :

$$\begin{aligned}\cos(x)+\cos(3x)+\cos(5x)+\cos(7x) &= \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{5\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{7\mathrm{i}x})\\ &= \mathrm{Re}\Big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\big(1+(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x})+(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x})^2+(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x})^3\big)\Big).\end{aligned}$$

Or, $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}\neq 1$ donc :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\big(1+(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x})+(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x})^2+(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x})^3\big) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\frac{1-(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x})^4}{1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\frac{1-(\mathrm{e}^{8\mathrm{i}x})}{1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\frac{\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}\,\frac{-2\mathrm{i}\sin(4x)}{-2\mathrm{i}\sin(x)} = \mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}\frac{\sin(4x)}{\sin(x)}.$$

Finalement, on a :

$$\cos(x)+\cos(3x)+\cos(5x)+\cos(7x) = \frac{\cos(4x)\sin(4x)}{\sin(x)} = \frac{\sin(8x)}{2\sin(x)}.$$

16.6 c) On calcule :

$$\cos(x) + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+\frac{2\pi}{3})} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+\frac{4\pi}{3})}\right) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\underbrace{\left(1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2\right)}_{=0}\right) = 0.$$