

Sommes et produits

Certains de ces calculs ont été faits en TD, vous devez pouvoir les refaire rapidement.

Dans toute la suite, n désigne un entier naturel non nul.

Calculs de sommes simples

Calcul 17.1



Calculer les sommes suivantes.

a) $\sum_{k=1}^{n+2} n$

c) $\sum_{k=1}^n (3k + n - 1)$

b) $\sum_{k=2}^{n+2} 7k$

d) $\sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{k-4}{3} \right)$

Calcul 17.2



Même exercice.

a) $\sum_{k=1}^n k(k+1)$

d) $\sum_{k=0}^n 2^k 5^{n-k}$

b) $\sum_{k=0}^n (4k(k^2 + 2))$

e) $\sum_{k=1}^n (7^k + 4k - n + 2)$

c) $\sum_{k=2}^{n-1} 3^k$

f) $\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}$

Calcul 17.3 — Produits (I).



Calculer les produits suivants, où p et q sont des entiers naturels non nuls tels que $p \geq q$.

a) $\prod_{k=p}^q 2$

b) $\prod_{k=1}^n 3^k$

Calcul 17.4 — Produits (II).



Même exercice.

a) $\prod_{k=1}^n 5\sqrt{k} \times k$

b) $\prod_{k=-10}^{10} k$

Avec des changements d'indice

Calcul 17.5



Calculer les sommes suivantes en effectuant le changement d'indice demandé.

- a) $\sum_{k=1}^n n+1-k$ avec $j = n+1-k$
- b) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k}$ avec $j = n+1-k$
- c) $\sum_{k=1}^n k2^k$ avec $j = k-1$
- d) $\sum_{k=3}^{n+2} (k-2)^3$ avec $j = k-2$

Sommes et produits télescopiques

Calcul 17.6 — Sommes télescopiques.



Calculer les sommes suivantes.

- a) $\sum_{k=2}^{n+2} (k+1)^3 - k^3$
- b) $\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$
- c) $\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$
- d) $\sum_{k=1}^n k \times k!$

Calcul 17.7 — Produits télescopiques.



Calculer les produits suivants.

- a) $\prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k}$
- b) $\prod_{k=1}^n \frac{2k+1}{2k-3}$
- c) $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right)$
- d) $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$

Autres sommes

Calcul 17.8 — À l'aide d'une décomposition en éléments simples.



Calculer les sommes suivantes.

- a) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$
- b) $\sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+2)(k+3)}$...

Calcul 17.9 — Sommations par paquets.



Calculer les sommes suivantes.

a) $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k^2 \dots\dots\dots$

b) $\sum_{k=0}^{2n} \min(k, n) \dots\dots\dots$

Sommes doubles

Calcul 17.10



Calculer les sommes doubles suivantes.

a) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} j \dots\dots\dots$

d) $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (i + j)^2 \dots\dots\dots$

b) $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j} \dots\dots\dots$

e) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \ln(i^j) \dots\dots\dots$

c) $\sum_{1 \leq i < j \leq n} (i + j) \dots\dots\dots$

f) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j) \dots\dots\dots$

Réponses mélangées

$$\begin{array}{ccccccc}
 3^{\frac{n(n+1)}{2}} & \frac{n^2(n+1)}{2} & 0 & \frac{n(5n+1)}{2} & \frac{n(n+1)}{2} \ln(n!) & \frac{7(n+1)(n+4)}{2} & \\
 1 - 4n^2 & \frac{n+1}{2n} & \frac{1}{n} & \frac{n(n^2-1)}{2} & 1 - \frac{1}{n+1} & n2^{n+1} + 2(1-2^n) & 2n^2 + n \\
 \frac{n(n+1)(4n-1)}{6} & \frac{n(n+1)}{2} & \frac{5^{n+1} - 2^{n+1}}{3} & n+1 & 5^n (n!)^{\frac{3}{2}} & 0 & \frac{n+1}{2n} \\
 2^{q-p+1} & (n+1)! - 1 & \frac{7}{6}(7^n - 1) + n(n+4) & \frac{1}{2} - \frac{1}{n+3} & \frac{n(n+1)(n+2)}{3} & & \\
 \frac{n(n+3)}{4} & \frac{n^2(n+1)^2}{4} & n(n+1)(n^2+n+4) & n(n+2) & \frac{(n-2)(n-7)}{6} & \ln(n+1) & \\
 (n+3)^3 - 2^3 & \frac{n(3n+1)}{2} & \frac{9}{2}(3^{n-2} - 1) & \frac{n(n+1)(7n^2+13n+4)}{12} & 1 - \frac{1}{(n+1)!} & &
 \end{array}$$

► Réponses et corrigés page 4

Fiche n° 17. Sommes et produits

Réponses

17.1 a).....	$\boxed{\frac{n(n+2)}{2}}$	17.3 b).....	$\boxed{3^{\frac{n(n+1)}{2}}}$	17.7 d).....	$\boxed{\frac{n+1}{2n}}$
17.1 b).....	$\boxed{\frac{7(n+1)(n+4)}{2}}$	17.4 a).....	$\boxed{5^n(n!)^{\frac{3}{2}}}$	17.8 a).....	$\boxed{1 - \frac{1}{n+1}}$
17.1 c).....	$\boxed{\frac{n(5n+1)}{2}}$	17.4 b).....	$\boxed{0}$	17.8 b).....	$\boxed{\frac{1}{2} - \frac{1}{n+3}}$
17.1 d).....	$\boxed{\frac{(n-2)(n-7)}{6}}$	17.5 a).....	$\boxed{\frac{n(n+1)}{2}}$	17.9 a).....	$\boxed{2n^2 + n}$
17.2 a).....	$\boxed{\frac{n(n+1)(n+2)}{3}}$	17.5 b).....	$\boxed{0}$	17.9 b).....	$\boxed{\frac{n(3n+1)}{2}}$
17.2 b)...	$\boxed{n(n+1)(n^2+n+4)}$	17.5 c).....	$\boxed{n2^{n+1} + 2(1-2^n)}$	17.10 a).....	$\boxed{\frac{n^2(n+1)}{2}}$
17.2 c).....	$\boxed{\frac{9}{2}(3^{n-2} - 1)}$	17.5 d).....	$\boxed{\frac{n^2(n+1)^2}{4}}$	17.10 b).....	$\boxed{\frac{n(n+3)}{4}}$
17.2 d).....	$\boxed{\frac{5^{n+1} - 2^{n+1}}{3}}$	17.6 a).....	$\boxed{(n+3)^3 - 2^3}$	17.10 c).....	$\boxed{\frac{n(n^2-1)}{2}}$
17.2 e)...	$\boxed{\frac{7}{6}(7^n - 1) + n(n+4)}$	17.6 b).....	$\boxed{\ln(n+1)}$	17.10 d).....	$\boxed{\frac{n(n+1)(7n^2+13n+4)}{12}}$
17.2 f).....	$\boxed{\frac{n+1}{2n}}$	17.6 c).....	$\boxed{1 - \frac{1}{(n+1)!}}$	17.10 e).....	$\boxed{\frac{n(n+1)}{2} \ln(n!)}$
17.3 a).....	$\boxed{2^{q-p+1}}$	17.6 d).....	$\boxed{(n+1)! - 1}$	17.10 f).....	$\boxed{\frac{n(n+1)(4n-1)}{6}}$
		17.7 a).....	$\boxed{n+1}$		
		17.7 b).....	$\boxed{1-4n^2}$		
		17.7 c).....	$\boxed{\frac{1}{n}}$		

Corrigés

17.1 a) On utilise la formule suivante : $\sum_{k=1}^{n+2} n = n \sum_{k=1}^{n+2} 1 = (n+2-1+1) \times n = n(n+2)$.

17.1 b) On utilise la formule présente en prérequis : $\sum_{k=2}^{n+2} 7k = 7 \times \frac{(n+2-2+1)(n+2+2)}{2} = \frac{7(n+1)(n+4)}{2}$.

17.1 c) On utilise la linéarité de la somme :

$$\sum_{k=1}^n (3k + n - 1) = 3 \sum_{k=1}^n k + (n-1) \sum_{k=1}^n 1 = \frac{3n(n+1)}{2} + n(n-1) = \frac{n(5n+1)}{2}.$$

17.1 d) On utilise la linéarité de la somme :

$$\sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{k-4}{3} \right) = \frac{1}{3} \sum_{k=2}^{n-1} (k-4) = \frac{1}{3} \left(\sum_{k=2}^{n-1} k - 4 \sum_{k=2}^{n-1} 1 \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{(n-2)(n+1)}{2} - 4(n-2) \right) = \frac{(n-2)(n-7)}{6}.$$

17.2 a) On développe et utilise la linéarité de la somme $\sum_{k=1}^n k(k+1) = \sum_{k=1}^n k^2 + k = \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k$.

Puis, on utilise la formule suivante : $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. D'où $\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

17.2 b) On utilise la linéarité de la somme :

$$\sum_{k=0}^n (4k(k^2+2)) = 4 \sum_{k=0}^n k^3 + 8 \sum_{k=0}^n k = 4 \frac{n^2(n+1)^2}{4} + 8 \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)(n(n+1)+4) = n(n+1)(n^2+n+4).$$

17.2 c) On utilise la formule pour les sommes géométriques : on a $\sum_{k=2}^{n-1} 3^k = 3^2 \frac{1-3^{n-1-2+1}}{1-3} = \frac{9}{2}(3^{n-2}-1)$.

17.2 d) On factorise pour faire apparaître une somme géométrique :

$$\sum_{k=0}^n 2^k 5^{n-k} = 5^n \sum_{k=0}^n 2^k 5^{-k} = 5^n \sum_{k=0}^n \left(\frac{2}{5}\right)^k = 5^n \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{5}} = 5^{n+1} \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{3} = \frac{5^{n+1} - 2^{n+1}}{3}.$$

17.2 e) On utilise la linéarité de la somme :

$$\sum_{k=1}^n (7^k + 4k - n + 2) = \sum_{k=1}^n 7^k + 4 \sum_{k=1}^n k + (-n+2) \sum_{k=1}^n 1 = 7 \frac{7^n-1}{6} + 4 \frac{n(n+1)}{2} + (-n+2)n = \frac{7}{6}(7^n-1) + n + 4.$$

17.2 f) On utilise la formule suivante : $\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k = \frac{n+1}{2n}$.

17.3 a) On utilise la formule suivante : $\prod_{k=p}^q 2 = 2 \times \dots \times 2 = 2^{q-p+1}$.

17.3 b) On utilise la formule suivante : $\prod_{k=1}^n 3^k = 3^1 \times 3^2 \times \dots \times 3^n = 3^{1+\dots+n} = 3^{\left(\sum_{k=1}^n k\right)} = 3^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

17.4 a) On factorise et on utilise que $\sqrt{k} = k^{\frac{1}{2}}$. On a :

$$\prod_{k=1}^n 5\sqrt{k} \times k = 5^n \prod_{k=1}^n k^{\frac{3}{2}} = 5^n \left(\prod_{k=1}^n k\right)^{\frac{3}{2}} = 5^n (n!)^{\frac{3}{2}}.$$

17.4 b) Un produit est nul si l'un des termes est nul.

17.5 a) Avec ce changement ou renversement, on a $k = n+1-j$, les bornes varient alors de n à 1 , on les remet dans le bon ordre. On a $\sum_{k=1}^n n+1-k = \sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}$.

17.5 b) On utilise la linéarité de la somme et on effectue ce changement ou renversement dans la seconde. On a $k = n+1-j$, les bornes varient alors de n à 1 , on les remet dans le bon ordre. On a :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+1-k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}.$$

17.5 c) Avec le changement d'indice, on a, en notant $S_n = \sum_{k=1}^n k2^k$:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{j=0}^{n-1} (j+1)2^{j+1} = \sum_{j=0}^{n-1} j2^{j+1} + \sum_{j=0}^{n-1} 2^{j+1} = 2 \sum_{j=0}^{n-1} j2^j + 2 \sum_{j=0}^{n-1} 2^j \\ &= 2 \left[\sum_{j=1}^n j2^j - n2^n \right] + 2 \frac{1-2^n}{1-2} = 2S_n - n2^{n+1} - 2(1-2^n). \end{aligned}$$

D'où $S_n = n2^{n+1} + 2(1-2^n) = (n-1)2^{n+1} + 2$.

17.5 d) On a $\sum_{k=3}^{n+2} (k-2)^3 = \sum_{j=1}^n j^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

17.6 a) On reconnaît une somme télescopique :

$$\sum_{k=2}^{n+2} (k+1)^3 - k^3 = 3^3 - 2^3 + 4^3 - 3^3 + \cdots + (n+3)^3 - (n+2)^3 = (n+3)^3 - 2^3.$$

17.6 b) On calcule :

$$\sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^n \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(2) + \cdots + \ln(n+1) - [\ln(1) + \cdots + \ln(n)] = \ln(n+1).$$

17.6 c) En écrivant $k = k+1-1$, on a :

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^n \left[\frac{k+1-1}{(k+1)!} \right] = \sum_{k=1}^n \left[\frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!} \right] = \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right] = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

17.6 d) En écrivant $k = k+1-1$, on a :

$$\sum_{k=1}^n k \times k! = \sum_{k=1}^n (k+1-1)k! = \sum_{k=1}^n [(k+1) \times k! - k!] = \sum_{k=1}^n [(k+1)! - k!] = (n+1)! - 1.$$

17.7 a) On écrit $\prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k} = \frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \cdots \times \frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{1} = n+1$.

17.7 b) Dans cet exemple, il faut aller un terme plus loin pour voir le télescopage :

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n \frac{2k+1}{2k-3} &= \frac{3}{-1} \times \frac{5}{1} \times \frac{7}{3} \times \cdots \times \frac{2(n-1)+1}{2(n-1)-3} \times \frac{2n+1}{2n-3} \\ &= \frac{2(n-1)+1}{-1} \times \frac{2n+1}{1} = -(2n-2+1)(2n+1) = -(2n-1)(2n+1) = 1-4n^2. \end{aligned}$$

17.7 c) En mettant au même dénominateur : $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^n \left(\frac{k-1}{k}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$.

17.7 d) Il faut remarquer l'identité remarquable et faire deux produits télescopiques :

$$\begin{aligned}\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) &= \prod_{k=2}^n \left(\frac{k^2 - 1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^n \frac{(k-1)(k+1)}{k \times k} = \left(\prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k}\right) \times \left(\prod_{k=2}^n \frac{k+1}{k}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{n-1}{n}\right) \times \left(\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n} \times \frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}.\end{aligned}$$

17.8 a) D'après la décomposition en éléments simples, on a $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$. En réduisant au même dénominateur et en identifiant, on trouve $a = 1$ et $b = -1$.

D'où $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$, en reconnaissant une somme télescopique.

17.8 b) D'après la décomposition en éléments simples, on a $\frac{1}{(k+2)(k+3)} = \frac{a}{k+2} + \frac{b}{k+3}$. En réduisant au même dénominateur et en identifiant, on trouve $a = 1$ et $b = -1$.

D'où $\sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+2)(k+3)} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+3}$, en reconnaissant une somme télescopique.

17.9 a) Séparons les termes d'indice pair et ceux d'indice impair. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k^2 &= \sum_{\substack{0 \leq k \leq 2n \\ k \text{ pair}}} (-1)^k k^2 + \sum_{\substack{0 \leq k \leq 2n \\ k \text{ impair}}} (-1)^k k^2 = \sum_{\substack{0 \leq k \leq 2n \\ k \text{ pair}}} k^2 + \sum_{\substack{0 \leq k \leq 2n \\ k \text{ impair}}} (-1)k^2 \\ &= \sum_{p=0}^n (2p)^2 - \sum_{p=0}^{n-1} (2p+1)^2 = \sum_{p=0}^n 4p^2 - \sum_{p=0}^{n-1} (4p^2 + 4p + 1) \\ &= 4 \underbrace{\sum_{p=0}^n p^2}_{=4n^2} - 4 \sum_{p=0}^{n-1} p^2 - 4 \sum_{p=0}^{n-1} p - \sum_{p=0}^{n-1} 1 = 4n^2 - 4 \frac{n(n-1)}{2} - n = 2n^2 + n.\end{aligned}$$

17.9 b) Séparons les termes plus petits que n et les autres. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2n} \min(k, n) &= \sum_{k=0}^n \min(k, n) + \sum_{k=n+1}^{2n} \min(k, n) \\ &= \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=n+1}^{2n} n = \frac{n(n+1)}{2} + n[2n - (n+1) + 1] = \frac{n(n+1)}{2} + n^2 = \frac{n(3n+1)}{2}.\end{aligned}$$

17.10 a) Comme il n'y a que l'indice j dans la somme, nous pouvons factoriser :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} j = \left(\sum_{j=1}^n j\right) \left(\sum_{j=1}^n 1\right) = \frac{n(n+1)}{2} n = \frac{n^2(n+1)}{2}.$$

17.10 b) On somme d'abord sur l'indice i ; on calcule donc :

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \sum_{i=1}^j i = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \times \frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (j+1) = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n+1} k = \frac{n(n+3)}{4}.$$

Signalons que, en revanche, l'autre ordre de sommation ne permettait pas de conclure.

17.10 c) Il faut faire attention à l'inégalité stricte :

$$\begin{aligned}
 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (i+j) &= \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} (i+j) = \sum_{j=2}^n \left(\sum_{i=1}^{j-1} i + \sum_{i=1}^{j-1} j \right) = \sum_{j=2}^n \left[\frac{j(j-1)}{2} + j(j-1) \right] \\
 &= \sum_{j=2}^n \left[\frac{3}{2}(j^2 - j) \right] = \frac{3}{2} \left(\sum_{j=2}^n j^2 - \sum_{j=2}^n j \right) = \frac{3}{2} \left[\left(\sum_{j=1}^n j^2 \right) - 1 - \left(\sum_{j=1}^n j \right) + 1 \right] \\
 &= \frac{3}{2} \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right] = \frac{3n(n+1)(2n+1-3)}{3 \times 2 \times 2} = \frac{n(n+1)(n-1)}{2} = \frac{n(n^2-1)}{2}.
 \end{aligned}$$

17.10 d) On développe d'abord puis on choisit l'ordre de sommation qui semble faciliter les calculs :

$$\begin{aligned}
 \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (i+j)^2 &= \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (i^2 + 2ij + j^2) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} i^2 + 2 \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij + \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} j^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=i}^n i^2 \right) + 2 \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^j ij \right) + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^j j^2 \right) = \sum_{i=1}^n \left(i^2 \sum_{j=i}^n 1 \right) + 2 \sum_{j=1}^n \left(j \sum_{i=1}^j i \right) + \sum_{j=1}^n \left(j^2 \sum_{i=1}^j 1 \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n i^2(n-i+1) + 2 \sum_{j=1}^n j \frac{j(j+1)}{2} + \sum_{j=1}^n j^3 = \sum_{i=1}^n [i^2(n+1) - i^3] + \sum_{j=1}^n (j^3 + j^2) + \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\
 &= (n+1) \sum_{i=1}^n i^2 - \sum_{i=1}^n i^3 + \sum_{j=1}^n j^3 + \sum_{j=1}^n j^2 + \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\
 &= (n+2) \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\
 &= \frac{n(n+1)(7n^2+13n+4)}{12}.
 \end{aligned}$$

17.10 e) On calcule :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \ln(i^j) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} j \ln(i) = \left(\sum_{j=1}^n j \right) \left(\sum_{i=1}^n \ln(i) \right) = \frac{n(n+1)}{2} \ln \left(\prod_{i=1}^n i \right) = \frac{n(n+1)}{2} \ln(n!).$$

17.10 f) On fait une sommation par paquets :

$$\begin{aligned}
 \sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j) &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \max(i, j) + \sum_{1 \leq j < i \leq n} \max(i, j) + \sum_{1 \leq j = i \leq n} \max(i, j) \\
 &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} j + \sum_{1 \leq j < i \leq n} i + \sum_{i=1}^n i \\
 &= 2 \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} j + \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{par symétrie} \\
 &= 2 \sum_{j=2}^n j(j-1) + \frac{n(n+1)}{2} = 2 \sum_{j=1}^n j(j-1) + \frac{n(n+1)}{2} \\
 &= 2 \left[\sum_{j=1}^n j^2 - \sum_{j=1}^n j \right] + \frac{n(n+1)}{2} = 2 \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right] + \frac{n(n+1)}{2} \\
 &= \frac{n(n+1)}{6} (4n+2-6+3) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}.
 \end{aligned}$$