

Coefficients binomiaux, binôme de Newton

La lettre n désigne un entier naturel non nul.

 : exercices **difficiles**

Manipulations de factorielles et de coefficients binomiaux

Calcul 18.1 — Pour s'échauffer (I).



Donner la valeur des expressions suivantes :

a) $\frac{101!}{99!}$	c) $\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}$	e) $\binom{8}{3}$
b) $\frac{10!}{7!}$	d) $\binom{6}{2}$	f) $4 \times \binom{7}{4}$

Calcul 18.2 — Pour s'échauffer (II).



Écrire les expressions suivantes à l'aide de factorielles, de coefficients binomiaux et, le cas échéant, à l'aide de puissances.

a) $6 \times 7 \times 8 \times 9$	c) $2 \times 4 \times \cdots \times (2n)$
b) $\frac{6 \times 7 \times 8 \times 9}{2 \times 3 \times 4}$	d) $3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)$...

Calcul 18.3 — Avec des paramètres (I).



Simplifier les expressions ci-dessous. La lettre k désigne un entier naturel tel que $k < n$.

a) $\binom{n}{2}$ (pour $n \geq 2$)	d) $\frac{(n+2)!}{n!}$
b) $\binom{n}{3}$ (pour $n \geq 3$)	e) $\frac{1}{n!} - \frac{n}{(n+1)!}$
c) $\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}}$	f) $\frac{(n+1)!}{2^{2(n+1)}} - \frac{n!}{2^{2n}}$

Calcul 18.4 — Avec des paramètres (II).



Simplifier les expressions ci-dessous. La lettre a désigne un nombre non nul.

a) $\frac{1}{n!} + \frac{1}{2n \times (n+1)!} + \frac{1}{2 \times (n+2)!}$	
b) $\frac{(3(n+1))!}{a^{3(n+1)} \times ((n+1)!)^3} \div \frac{(3n)!}{a^{3n} \times (n!)^3}$	

Autour du binôme de Newton

Calcul 18.5



Calculer les sommes ci-dessous à l'aide de la formule du binôme de Newton.

a) $\sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k}$

c) $\sum_{k=0}^n 2^{2n-k} \binom{n}{k}$

b) $\sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k}$

d) $\sum_{k=0}^n 2^{k+2} \binom{n}{k} \times 3^{2n-k+1}$

Calcul 18.6



a) Développer à l'aide de la formule du binôme de Newton $(1 + x)^n + (1 - x)^n$

b) Calculer $\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p}$

Calcul 18.7



En utilisant la fonction $x \mapsto (1 + x)^n$, ses dérivées d'ordre 1 et 2 et sa primitive s'annulant en 0, calculer :

a) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$

c) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times k^2$

b) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times k$

d) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times \frac{1}{k+1}$

Calcul 18.8



a) Donner le coefficient de x^n dans le développement de $(1 + x)^{2n}$

b) En donner une autre expression en développant le produit $(1 + x)^n (1 + x)^n$

c) Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$

Réponses mélangées

$\binom{2n}{n}$	56	$\frac{(2n+1)!}{2^n \times n!}$	10 100	$2^n \times n!$	3^n	$(n+2)(n+1)$	$\frac{1}{30}$
$\frac{3(3n+2)(3n+1)}{a^3(n+1)^2}$	140	6^n	$\frac{9!}{5!}$	$\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$	$\frac{(n+1)^3}{n \times (n+2)!}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	
15	0	$\binom{2n}{n}$	$n2^{n-1}$	$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$	2^n	720	$\frac{k+1}{n-k}$
12×15^n	$\frac{1}{(n+1)!}$	$\frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$	2^{n-1}	$\frac{n! \times (n-3)}{2^{2n+2}}$	$\binom{9}{4}$	$2 \times \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p}$	

► Réponses et corrigés page 3

Fiche n° 18. Coefficients binomiaux, binôme de Newton

Réponses

18.1 a).....	$\boxed{10\ 100}$	18.3 b).....	$\boxed{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}}$	18.5 d).....	$\boxed{12 \times 15^n}$
18.1 b).....	$\boxed{720}$	18.3 c).....	$\boxed{\frac{k+1}{n-k}}$	18.6 a).....	$\boxed{2 \times \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p}}$
18.1 c).....	$\boxed{\frac{1}{30}}$	18.3 d).....	$\boxed{(n+2)(n+1)}$	18.6 b).....	$\boxed{2^{n-1}}$
18.1 d).....	$\boxed{15}$	18.3 e).....	$\boxed{\frac{1}{(n+1)!}}$	18.7 a).....	$\boxed{2^n}$
18.1 e).....	$\boxed{56}$	18.3 f).....	$\boxed{\frac{n! \times (n-3)}{2^{2n+2}}}$	18.7 b).....	$\boxed{n2^{n-1}}$
18.1 f).....	$\boxed{140}$	18.4 a).....	$\boxed{\frac{(n+1)^3}{n \times (n+2)!}}$	18.7 c).....	$\boxed{n(n+1)2^{n-2}}$
18.2 a).....	$\boxed{\frac{9!}{5!}}$	18.4 b).....	$\boxed{\frac{3(3n+2)(3n+1)}{a^3(n+1)^2}}$	18.7 d).....	$\boxed{\frac{2^{n+1} - 1}{n+1}}$
18.2 b).....	$\boxed{\binom{9}{4}}$	18.5 a).....	$\boxed{3^n}$	18.8 a).....	$\boxed{\binom{2n}{n}}$
18.2 c).....	$\boxed{2^n \times n!}$	18.5 b).....	$\boxed{0}$	18.8 b).....	$\boxed{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2}$
18.2 d).....	$\boxed{\frac{(2n+1)!}{2^n \times n!}}$	18.5 c).....	$\boxed{6^n}$	18.8 c).....	$\boxed{\binom{2n}{n}}$
18.3 a).....	$\boxed{\frac{n(n-1)}{2}}$				

Corrigés

18.1 a) On calcule : $\frac{101!}{99!} = \frac{101 \times 100!}{99!} = \frac{101 \times 100 \times 99!}{99!} = 101 \times 100 = 10\ 100$.

18.1 b) On calcule : $\frac{10!}{7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$.

18.1 c) On calcule : $\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} = \frac{5}{5 \times 4!} - \frac{1}{5!} = \frac{5-1}{5!} = \frac{4}{5!} = \frac{4}{5 \times 4 \times 3 \times 2} = \frac{1}{30}$.

18.1 d) On calcule : $\binom{6}{2} = \frac{6!}{2! \times 4!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{2 \times 4!} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$.

18.1 e) On calcule : $\binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \times 5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{3! \times 5!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{2 \times 3} = 8 \times 7 = 56$.

18.1 f) On calcule : $4 \times \binom{7}{4} = 4 \times \frac{7!}{4! \times 3!} = \frac{4 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{4 \times 3! \times 3!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{2 \times 3} = 140$.

18.2 a) Par définition, $9! = (2 \times 3 \times 4 \times 5) \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 = 5! \times 6 \times 7 \times 8 \times 9$. Donc, $6 \times 7 \times 8 \times 9 = \frac{9!}{5!}$.

18.2 b) Comme pour le calcul précédent, on a $6 \times 7 \times 8 \times 9 = \frac{9!}{5!}$. Or, $2 \times 3 \times 4 = 4!$. Ainsi :

$$\frac{6 \times 7 \times 8 \times 9}{2 \times 3 \times 4} = \frac{9!}{5!} \times \frac{1}{4!} = \binom{9}{4} = \binom{9}{5}.$$

18.2 c) On peut mettre 2 en facteur de chaque nombre du produit $2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)$, produit qui contient n facteurs. Ainsi, on a :

$$2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n) = 2^n \times (1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n) = 2^n \times n!.$$

18.2 d) On multiplie le produit $3 \times 5 \times 7 \times \dots \times (2n+1)$ par le produit $2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)$ de la question précédente. On obtient ainsi le produit de tous les entiers compris entre 2 et $(2n+1)$. Il s'agit donc de $(2n+1)!$.
Donc, on a :

$$3 \times 5 \times 7 \times \dots \times (2n+1) = \frac{(2n+1)!}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)} = \frac{(2n+1)!}{2^n \times n!}.$$

18.3 a) Par définition, $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2! \times (n-2)!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2)!}{2! \times (n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}.$

18.3 b) Par définition, $\binom{n}{3} = \frac{n!}{3! \times (n-3)!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3)!}{3! \times (n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$

18.3 c) On calcule :

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}} = \frac{\frac{n!}{k! \times (n-k)!}}{\frac{n!}{(k+1)! \times (n-(k+1))!}} = \frac{n!}{k! \times (n-k)!} \times \frac{(k+1)! \times (n-(k+1))!}{n!} = \frac{(k+1) \times k! \times (n-k-1)!}{k! \times (n-k) \times (n-k-1)!} = \frac{k+1}{n-k}.$$

18.3 d) On calcule $\frac{(n+2)!}{n!} = \frac{(n+2) \times (n+1) \times n!}{n!} = (n+2)(n+1).$

18.3 e) On réduit au même dénominateur $\frac{1}{n!} - \frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1}{(n+1) \times n!} - \frac{n}{(n+1)!} = \frac{(n+1) - n}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!}.$

18.3 f) On réduit au même dénominateur :

$$\frac{(n+1)!}{2^{2(n+1)}} - \frac{n!}{2^{2n}} = \frac{(n+1)!}{2^{2n+2}} - \frac{2^2 \times n!}{2^2 \times 2^{2n}} = \frac{(n+1)! - 4 \times n!}{2^{2n+2}} = \frac{(n+1) \times n! - 4 \times n!}{2^{2n+2}} = \frac{n! \times (n-3)}{2^{2n+2}}.$$

18.4 a) On met chaque terme au même dénominateur (à savoir $2n(n+2)!$) :

$$\frac{1}{n!} = \frac{2n(n+1)(n+2)}{n! \times 2n(n+1)(n+2)}, \quad \frac{1}{2n(n+1)!} = \frac{n+2}{2n \times (n+1)! \times (n+2)} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2(n+2)!} = \frac{n}{2 \times (n+2)! \times n}.$$

D'où :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} + \frac{1}{2n \times (n+1)!} + \frac{1}{2 \times (n+2)!} &= \frac{2n(n+1)(n+2) + n + 2 + n}{2n \times (n+2)!} \\ &= \frac{2(n+1)(n(n+2)+1)}{2n \times (n+2)!} = \frac{(n+1)(n^2+2n+1)}{n(n+2)!}. \end{aligned}$$

Ainsi, on a $\frac{1}{n!} + \frac{1}{2n \times (n+1)!} + \frac{1}{2 \times (n+2)!} = \frac{(n+1)^3}{n \times (n+2)!}.$

18.4 b) On a :

$$\frac{(3(n+1))!}{a^{3(n+1)} \times ((n+1)!)^3} \div \frac{(3n)!}{a^{3n} \times (n!)^3} = \frac{(3n+3)!}{a^{3n+3} \times ((n+1)!)^3} \times \frac{a^{3n} \times (n!)^3}{(3n)!}.$$

Or :

$$\begin{aligned} (3n+3)! &= (3n+3) \times (3n+2) \times (3n+1) \times (3n)! \\ a^{3n+3} &= a^{3n} \times a^3 \\ ((n+1)!)^3 &= ((n+1) \times n!)^3 = (n+1)^3 \times (n!)^3. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{(3(n+1))!}{a^{3(n+1)} \times ((n+1)!)^3} \div \frac{(3n)!}{a^{3n} \times (n!)^3} &= \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{a^3 \times (n+1)^3} \\ &= \frac{3(n+1)(3n+2)(3n+1)}{a^3 \times (n+1)^3} = \frac{3(3n+2)(3n+1)}{a^3(n+1)^2}. \end{aligned}$$

18.5 a) On constate que $\sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k \times 1^{n-k} = (2+1)^n = 3^n$.

18.5 b) On constate que :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n (-1) \times \binom{n}{k} (-1)^k \times 1^{n-k} = -1 \times \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \times 1^{n-k} = (-1) \times (-1+1)^n = 0.$$

18.5 c) On calcule $\sum_{k=0}^n 2^{2n-k} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n 2^n \times 2^{n-k} \binom{n}{k} = 2^n \times \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} \times 1^k = 2^n \times (1+2)^n = 2^n \times 3^n = 6^n$.

18.5 d) On calcule :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n 2^{k+2} \binom{n}{k} \times 3^{2n-k+1} &= \sum_{k=0}^n 2^2 \times 2^k \times \binom{n}{k} \times 3^{n+1} \times 3^{n-k} = 4 \times 3^{n+1} \times \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k \times 3^{n-k} \\ &= 4 \times 3^{n+1} \times (2+3)^n = 4 \times 3^{n+1} \times 5^n = 4 \times 3 \times 3^n \times 5^n = 12 \times 15^n. \end{aligned}$$

18.6 a) On développe $(1+1)^n + (1-1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1 + (-1)^k)$.

Or, $1 + (-1)^k = 2$ si k est pair et $1 + (-1)^k = 0$ si k est impair.

Ainsi, en notant $P = \{k \in \mathbb{N} \mid 0 \leq k \leq n \text{ et } k \text{ pair}\}$, on a :

$$(1+1)^n + (1-1)^n = \sum_{k \in P} \binom{n}{k} \times 2 = 2 \times \sum_{k \in P} \binom{n}{k}.$$

Or, si $k \in P$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $k = 2p$. Comme $0 \leq k \leq n$, on a alors $0 \leq 2p \leq n$ et donc $0 \leq p \leq \frac{n}{2}$.

Comme $p \in \mathbb{N}$, on peut aussi écrire $0 \leq p \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Ainsi :

$$\sum_{k \in P} \binom{n}{k} = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p} \quad \text{et} \quad (1+1)^n + (1-1)^n = 2 \times \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p}.$$

18.6 b) On déduit de la première question que $\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p} = \frac{1}{2}((1+1)^n + (1-1)^n) = 2^{n-1}$.

18.7 a) On a $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$. En évaluant en $x=1$, on obtient $(1+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$. Ainsi, $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.

18.7 b) En dérivant par rapport à x la relation $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$, on obtient $n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \times k \times x^{k-1}$.

En évaluant en $x=1$, on obtient $n(1+1)^{n-1} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \times k$. Ainsi, $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times k = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \times k = n2^{n-1}$.

18.7 c) On dérive deux fois par rapport à x la relation $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$.

On obtient $n(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \times k \times (k-1) \times x^{k-2}$.

On évalue en $x = 1$ pour obtenir $n(n-1)(1+1)^{n-2} = \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \times k \times (k-1)$. Ainsi, $\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \times k \times (k-1) = n(n-1)2^{n-2}$.

Or, par linéarité, on a $\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \times k \times (k-1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times k \times (k-1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times k^2 - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times k$. Donc :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times k^2 = \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \times k \times (k-1) + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times k = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}.$$

18.7 d) On intègre entre 0 et x la relation $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$. On obtient :

$$\frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1} - \frac{1}{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times \frac{1}{k+1} x^{k+1}.$$

En évaluant en $x = 1$, on obtient $\frac{1}{n+1}(1+1)^{n+1} - \frac{1}{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times \frac{1}{k+1}$. Ainsi, $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times \frac{1}{k+1} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$.

18.8 a) On développe $(1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k$. Ainsi, le coefficient de x^n vaut $\binom{2n}{n}$.

18.8 b) On obtient une contribution en x^n dans le produit $(1+x)^n(1+x)^n$ à chaque fois que l'on multiplie un terme de la forme $a_k x^k$ dans le premier facteur avec un terme de la forme $b_{n-k} x^{n-k}$ dans le deuxième facteur, et ce pour toutes les valeurs de k entières naturelles et inférieures ou égales à n . Or, $(1+x)^n \times (1+x)^n = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \right) \times \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} \right)$.

Donc, le coefficient de x^n vaut $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

18.8 c) On déduit, en comparant les réponses aux questions précédentes, que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.