

# Manipulation des fonctions usuelles

## Prérequis

Dérivation, équations du second degré.  
Chapitres 3 et 10.

 : exercices **difficiles**

## Calculs de valeurs

### Calcul 19.1 — Fonctions circulaires réciproques.



Calculer les valeurs suivantes.

a)  $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$  .....

d)  $\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$  .....

b)  $\frac{\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$  .....

e)  $\arctan(1)$  .....

c)  $\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  .....

f)  $\arccos\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)$  .....

### Calcul 19.2 — Valeurs des fonctions hyperboliques.



Calculer les valeurs suivantes. On rappelle que, pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $\text{th}(x) = \text{sh}(x)/\text{ch}(x)$ .

a)  $\text{ch}(0)$  .....

d)  $\text{sh}(\ln(3))$  .....

b)  $\text{sh}(0)$  .....

e)  $\text{ch}(\ln(2/3))$  .....

c)  $\text{ch}(\ln(2))$  .....

f)  $\text{th}(\ln(2))$  .....

### Calcul 19.3 — Identités de trigonométrie hyperbolique.



Soient  $x$  et  $y$  des réels.

Calculer en développant soigneusement, et en simplifiant au maximum, les expressions suivantes.

a)  $\text{ch}(x)\text{sh}(y) + \text{ch}(y)\text{sh}(x)$  .....

b)  $\text{ch}(x)\text{ch}(y) - \text{sh}(x)\text{sh}(y)$  .....

# Résolution d'équations

## Calcul 19.4 — Fonctions $x \mapsto a^x$ .



Résoudre les équations suivantes, d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ .

a)  $3^x = \frac{9^x}{2}$  .....

c)  $2^x = 3 \times 4^x$  .....

b)  $4^x = 2 \times 2^x$  .....

d)  $10^{2x} = 4 \times 5^x \times 9^{\frac{x}{2}}$  ...

## ▲ Calcul 19.5 — Fonctions $x \mapsto a^x$ (plus difficile).



Résoudre les équations suivantes, d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ .

On pourra faire intervenir une équation de degré 2 en posant une nouvelle variable.

a)  $2^x + 4^x = 4$  .....

b)  $16^x - 3 \times 4^x + 2 = 0$  .....

c)  $2 \times 9^x - 3^x - 3 = 0$  .....

d)  $3^x + 3^{2x} - 1 = 0$ . .....

## Calcul 19.6 — Équations avec les fonctions circulaires réciproques.



Résoudre les équations suivantes, d'inconnue  $x \in [-1, 1]$  pour les deux premiers calculs, et  $x \in \mathbb{R}$  pour les autres.

a)  $\arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$  .....

b)  $\cos(\arccos(x)) = 0$  .....

c)  $\arccos(\cos(x)) = 0$  .....

d)  $\arcsin(\sin(x)) = \frac{\pi}{3}$  .....

e)  $\arcsin(\sin(x)) = \frac{1}{3}$  .....

f)  $\tan(\arctan(x)) = 1$  .....

## Calcul 19.7 — Équations avec des fonctions hyperboliques.



Résoudre les (in)équations suivantes d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ .

On rappelle que, pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $\text{th}(x) = \text{sh}(x)/\text{ch}(x)$ .

- |                                       |                      |                                          |                      |
|---------------------------------------|----------------------|------------------------------------------|----------------------|
| a) $\text{ch}(x) = \sqrt{5}$ .....    | <input type="text"/> | d) $\text{ch}(x) \leq 4$ .....           | <input type="text"/> |
| b) $\text{sh}(x) = 1$ .....           | <input type="text"/> | e) $\text{sh}(x) \geq 3$ .....           | <input type="text"/> |
| c) $\text{th}(x) = \frac{1}{3}$ ..... | <input type="text"/> | f) $\text{th}(x) \leq \frac{1}{2}$ ..... | <input type="text"/> |

## Dérivation

### Calcul 19.8 — Quelques calculs de dérivées (I).



Dériver les fonctions suivantes.

- |                                          |                      |                                                    |                      |
|------------------------------------------|----------------------|----------------------------------------------------|----------------------|
| a) $x \mapsto 2^x + x^2$ .....           | <input type="text"/> | c) $x \mapsto x^x$ .....                           | <input type="text"/> |
| b) $x \mapsto \frac{3^x}{5^x + 1}$ ..... | <input type="text"/> | d) $x \mapsto \frac{\arcsin(x)}{\arccos(x)}$ ..... | <input type="text"/> |

### Calcul 19.9 — Quelques calculs de dérivées (II).



Dériver les fonctions suivantes. On rappelle que, pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $\text{th}(x) = \text{sh}(x)/\text{ch}(x)$ .

- |                                               |                      |                                              |                      |
|-----------------------------------------------|----------------------|----------------------------------------------|----------------------|
| a) $x \mapsto \arcsin(x^2)$ .....             | <input type="text"/> | c) $x \mapsto \arctan(\text{th}(x))$ ..      | <input type="text"/> |
| b) $x \mapsto \text{ch}(x)\text{sh}(x)$ ..... | <input type="text"/> | d) $x \mapsto \text{sh}(\text{ch}(x))$ ..... | <input type="text"/> |

### Calcul 19.10 — Deux dérivées importantes.



- |                                                                   |                      |
|-------------------------------------------------------------------|----------------------|
| a) $x \mapsto \arcsin(x) + \arccos(x)$ .....                      | <input type="text"/> |
| b) $x \mapsto \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ ..... | <input type="text"/> |

### 🚩 Calcul 19.11 — Des dérivées plus compliquées.



Dériver les fonctions suivantes. Dans ce qui suit, la fonction  $F$  est une primitive de  $x \mapsto e^{-x^2}$ .

- |                             |                      |
|-----------------------------|----------------------|
| a) $x \mapsto F(x^x)$ ..... | <input type="text"/> |
|-----------------------------|----------------------|

b)  $x \mapsto F(\sqrt{\ln(\operatorname{ch}(x))}) \dots\dots\dots$

c)  $x \mapsto \sqrt{1-x^2} + x \arcsin(x) \dots\dots\dots$

d)  $x \mapsto x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \dots\dots\dots$

### Réponses mélangées

|                                                            |                                                                                                                               |                                             |                                                                           |                                                                                                                              |                                                                          |                                        |
|------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------|
| $x \mapsto \frac{15^x \ln(3/5) + 3^x \ln(3)}{(5^x + 1)^2}$ | $3/5$                                                                                                                         | $\operatorname{ch}(x - y)$                  | $\operatorname{sh}(x + y)$                                                | $\begin{cases} \frac{\pi}{3} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \\ \cup \{ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \} \end{cases}$ | $\frac{\pi}{4}$                                                          | $\frac{\ln(4)}{\ln(20/3)}$             |
| $5/4$                                                      | $\begin{cases} \frac{1}{3} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \\ \cup \{ \pi - \frac{1}{3} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \} \end{cases}$ | $x \mapsto (\ln(x) + 1)x^x$                 | $\left] -\infty, \frac{1}{2} \ln(3) \right]$                              | $\ln(1 + \sqrt{2})$                                                                                                          | $4/3$                                                                    |                                        |
| $x \mapsto \frac{\pi}{2\sqrt{1-x^2} \arccos(x)^2}$         | $\frac{\pi}{4}$                                                                                                               | $[-\ln(4 + \sqrt{15}), \ln(4 + \sqrt{15})]$ | $x \mapsto \arctan(x)$                                                    | $\frac{\pi}{6}$                                                                                                              | $\frac{\pi}{3}$                                                          | $-\frac{\ln(3)}{\ln(2)}$               |
| $\frac{\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}{\ln(3)}$      | $1$                                                                                                                           | $\left[\ln(3 + \sqrt{10}), +\infty\right[$  | $\{2k\pi ; k \in \mathbb{Z}\}$                                            | $x \mapsto \ln(2) \times 2^x + 2x$                                                                                           | $\frac{\pi}{6}$                                                          | $0$                                    |
| $x \mapsto 0$                                              | $\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$                                                                                                       | $x \mapsto 0$                               | $x \mapsto \frac{1 - \operatorname{th}^2(x)}{1 + \operatorname{th}^2(x)}$ | $x \mapsto 2x \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$                                                                                        | $x \mapsto (\ln(x) + 1)x^x e^{-x^{2x}}$                                  | $\frac{1}{2} \ln(2)$                   |
| $\frac{\ln\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)}{\ln(2)}$     | $1 - \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$                                                                                                   | $x \mapsto \arcsin(x)$                      | $1$                                                                       | $x \mapsto \operatorname{ch}^2(x) + \operatorname{sh}^2(x)$                                                                  | $x \mapsto \operatorname{sh}(x) \operatorname{ch}(\operatorname{ch}(x))$ |                                        |
| $\frac{13}{12}$                                            | $\{0, \frac{1}{2}\}$                                                                                                          | $0$                                         | $1$                                                                       | $x \mapsto \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)^2} \frac{1}{2\sqrt{\ln(\operatorname{ch}(x))}}$                  | $2$                                                                      | $\{\ln(\sqrt{5}-2), \ln(\sqrt{5}+2)\}$ |

► Réponses et corrigés page 5

# Fiche n° 19. Manipulation des fonctions usuelles

## Réponses

|               |                          |               |                                                                                                                              |                |                                                                                                             |
|---------------|--------------------------|---------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 19.1 a) ..... | $\frac{\pi}{6}$          | 19.4 d).....  | $\frac{\ln(4)}{\ln(20/3)}$                                                                                                   | 19.7 e).....   | $\left[ \ln(3 + \sqrt{10}), +\infty \right[$                                                                |
| 19.1 b) ..... | $2$                      | 19.5 a) ..... | $\frac{\ln\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)}{\ln(2)}$                                                                       | 19.7 f) .....  | $\left] -\infty, \frac{1}{2} \ln(3) \right]$                                                                |
| 19.1 c).....  | $\frac{\pi}{4}$          | 19.5 b) ..... | $\{0, \frac{1}{2}\}$                                                                                                         | 19.8 a) ...    | $x \mapsto \ln(2) \times 2^x + 2x$                                                                          |
| 19.1 d) ..... | $\frac{\pi}{6}$          | 19.5 c) ..... | $1 - \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$                                                                                                  | 19.8 b) .      | $x \mapsto \frac{15^x \ln(3/5) + 3^x \ln(3)}{(5^x + 1)^2}$                                                  |
| 19.1 e).....  | $\frac{\pi}{4}$          | 19.5 d).....  | $\frac{\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}{\ln(3)}$                                                                        | 19.8 c).....   | $x \mapsto (\ln(x) + 1)x^x$                                                                                 |
| 19.1 f).....  | $\frac{\pi}{3}$          | 19.6 a) ..... | $1$                                                                                                                          | 19.8 d) ..     | $x \mapsto \frac{\pi}{2\sqrt{1-x^2} \arccos(x)^2}$                                                          |
| 19.2 a) ..... | $1$                      | 19.6 b) ..... | $0$                                                                                                                          | 19.9 a) .....  | $x \mapsto 2x \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$                                                                       |
| 19.2 b) ..... | $0$                      | 19.6 c).....  | $\{2k\pi ; k \in \mathbb{Z}\}$                                                                                               | 19.9 b) ...    | $x \mapsto \operatorname{ch}^2(x) + \operatorname{sh}^2(x)$                                                 |
| 19.2 c) ..... | $5/4$                    | 19.6 d) ..    | $\left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$  | 19.9 c) .....  | $x \mapsto \frac{1 - \operatorname{th}^2(x)}{1 + \operatorname{th}^2(x)}$                                   |
| 19.2 d).....  | $4/3$                    | 19.6 e) .     | $\left\{ \frac{1}{3} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \pi - \frac{1}{3} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$ | 19.9 d) ....   | $x \mapsto \operatorname{sh}(x) \operatorname{ch}(\operatorname{ch}(x))$                                    |
| 19.2 e).....  | $\frac{13}{12}$          | 19.6 f).....  | $1$                                                                                                                          | 19.10 a) ..... | $x \mapsto 0$                                                                                               |
| 19.2 f) ..... | $3/5$                    | 19.7 a) .     | $\{\ln(\sqrt{5}-2), \ln(\sqrt{5}+2)\}$                                                                                       | 19.10 b) ..... | $x \mapsto 0$                                                                                               |
| 19.3 a) ..... | $\operatorname{sh}(x+y)$ | 19.7 b).....  | $\ln(1 + \sqrt{2})$                                                                                                          | 19.11 a) ..... | $x \mapsto (\ln(x) + 1)x^x e^{-x^{2x}}$                                                                     |
| 19.3 b).....  | $\operatorname{ch}(x-y)$ | 19.7 c).....  | $\frac{1}{2} \ln(2)$                                                                                                         | 19.11 b) .     | $x \mapsto \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)^2} \frac{1}{2\sqrt{\ln(\operatorname{ch}(x))}}$ |
| 19.4 a) ..... | $\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$  | 19.7 d) .     | $[-\ln(4+\sqrt{15}), \ln(4+\sqrt{15})]$                                                                                      | 19.11 c) ..... | $x \mapsto \arcsin(x)$                                                                                      |
| 19.4 b) ..... | $1$                      |               |                                                                                                                              | 19.11 d).....  | $x \mapsto \arctan(x)$                                                                                      |
| 19.4 c) ..... | $-\frac{\ln(3)}{\ln(2)}$ |               |                                                                                                                              |                |                                                                                                             |

## Corrigés

19.1 b) On calcule :  $\frac{\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{6}} = 2.$

19.1 c) On remarque que  $\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}\right) = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$

19.1 d) On remarque que  $\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) = \frac{\pi}{6}.$

**19.1 f)** On remarque que  $\arccos\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$ .

**19.2 c)** On calcule :  $\text{ch}(\ln(2)) = \frac{e^{\ln(2)} + e^{-\ln(2)}}{2} = \frac{2 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{5}{4}$ .

**19.2 d)** On calcule :  $\text{sh}(\ln(3)) = \frac{e^{\ln(3)} - e^{-\ln(3)}}{2} = \frac{3 - \frac{1}{3}}{2} = \frac{\frac{8}{3}}{2} = \frac{4}{3}$ .

**19.2 e)** On calcule :  $\text{ch}(\ln(2/3)) = \frac{e^{\ln(2/3)} + e^{-\ln(2/3)}}{2} = \frac{\frac{2}{3} + \frac{3}{2}}{2} = \frac{\frac{13}{6}}{2} = \frac{13}{12}$ .

**19.2 f)** On sait que  $\text{th}(\ln(2)) = \frac{e^{\ln(2)} - e^{-\ln(2)}}{e^{\ln(2)} + e^{-\ln(2)}} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{3}{5}$ .

**19.3 a)** Développons :

$$\begin{aligned} \text{ch}(x)\text{sh}(y) + \text{ch}(y)\text{sh}(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \frac{e^y - e^{-y}}{2} + \frac{e^y + e^{-y}}{2} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{(e^x + e^{-x})(e^y - e^{-y}) + (e^y + e^{-y})(e^x - e^{-x})}{4} \\ &= \frac{e^{x+y} - e^{x-y} + e^{y-x} - e^{-(x+y)} + e^{x+y} - e^{y-x} + e^{x-y} - e^{-(x+y)}}{4} \\ &= \frac{2e^{x+y} - 2e^{-(x+y)}}{4} = \text{sh}(x+y). \end{aligned}$$

**19.4 a)** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On a  $3^x = \frac{9^x}{2} \iff \ln(3^x) = \ln\left(\frac{9^x}{2}\right) \iff x \ln(3) = 2x \ln(3) - \ln(2) \iff x = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$ .

**19.4 b)** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On a les équivalences  $4^x = 2 \times 2^x \iff 2x \ln(2) = (x+1) \ln(2) \iff 2x = x+1 \iff x = 1$ .

**19.4 c)** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On a les équivalences  $2^x = 3 \times 4^x \iff x \ln(2) = \ln(3) + 2x \ln(2) \iff x = -\frac{\ln(3)}{\ln(2)}$ .

**19.4 d)** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} 10^{2x} = 4 \times 5^x \times 9^{\frac{x}{2}} &\iff \ln(10^{2x}) = \ln(4 \times 5^x \times 9^{\frac{x}{2}}) \iff 2x \ln(10) = \ln(4) + x \ln(5) + \frac{x}{2} \ln(9) \\ &\iff x \left( 2 \ln(5) + 2 \ln(2) - \ln(5) - \frac{2 \ln(3)}{2} \right) = \ln(4) \iff x = \frac{\ln(4)}{2 \ln(2) + \ln(5) - \ln(3)} = \frac{\ln(4)}{\ln(20/3)}. \end{aligned}$$

**19.5 a)** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Posons  $X = 2^x$ . Alors  $2^x + 4^x = 4 \iff X + X^2 - 4 = 0$ . Cette équation a pour discriminant  $1 + 16 = 17$ , et deux racines,  $\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$ . Seule la racine  $\frac{\sqrt{17}-1}{2}$  est positive. D'où les équivalences suivantes :

$$2^x + 4^x = 4 \iff 2^x = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \iff x \ln(2) = \ln\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right) \iff x = \frac{\ln\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)}{\ln(2)}.$$

**19.5 b)** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Notons  $X = 4^x$ . Alors, on a les équivalences suivantes :

$$16^x - 3 \times 4^x + 2 = 0 \iff X^2 - 3X + 2 = 0 \iff (X-1)(X-2) = 0 \iff 4^x = 1 \text{ ou } 4^x = 2 \iff x = 0 \text{ ou } x = 1/2.$$

**19.5 c)** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Posons  $X = 3^x$ . On a  $2 \times 9^x - 3^x - 3 = 0 \iff 2X^2 - X - 3 = 0$ . Cette équation a pour discriminant  $1 + 4 \times 2 \times 3 = 25$  : les deux solutions de l'équation sont  $\frac{1 \pm 5}{4}$ , i.e.  $3/2$  et  $-1$ . Comme la seule solution positive est  $3/2$ , on a  $2 \times 9^x - 3^x - 3 \iff 3^x = \frac{3}{2} \iff x \ln(3) = \ln(3) - \ln(2) \iff x = 1 - \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$ .

**19.5 d)** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Posons  $X = 3^x$ . On a  $3^x + 3^{2x} - 1 = 0 \iff X^2 + X - 1 = 0$ . Cette équation a pour discriminant  $1 + 4 = 5$  : les deux solutions de l'équation sont  $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ . La seule solution positive étant  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ , on a

$$3^x + 3^{2x} - 1 = 0 \iff 3^x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \iff x \ln(3) = \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right).$$

**19.6 a)** Ici, pas de calcul :  $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$  et, par stricte croissance de  $\arcsin$ , l'unique solution est 1.

**19.6 b)** Soit  $x \in [-1, 1]$ . Alors  $\cos(\arccos(x)) = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z} : \arccos(x) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ . Mais comme  $\arccos$  est à valeurs dans  $[0, \pi]$ , on a  $\cos(\arccos(x)) = 0 \iff \arccos(x) = \frac{\pi}{2} \iff x = 0$ .

**19.6 c)** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On a les équivalences suivantes :  $\arccos(\cos(x)) = 0 \iff \cos(x) = 1 \iff x \in \{2k\pi ; k \in \mathbb{Z}\}$ .

**19.6 d)** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On a les équivalences suivantes :

$$\arcsin(\sin(x)) = \frac{\pi}{3} \iff \sin(x) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff x \in \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

**19.6 e)** Ici, pas besoin de connaître  $\sin\left(\frac{1}{3}\right)$  ! Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Alors :

$$\arcsin(\sin(x)) = \frac{1}{3} \iff \sin(x) = \sin\left(\frac{1}{3}\right) \iff x \in \left\{ \frac{1}{3} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \pi - \frac{1}{3} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

**19.6 f)** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Alors  $\tan(\arctan(x)) = 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z} : \arctan(x) = \frac{\pi}{4} + k\pi \iff x = 1$ .

**19.7 a)** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On pose  $X = e^x$ . Alors, comme  $e^x > 0$ , on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(x) = \sqrt{5} &\iff \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sqrt{5} \iff e^x + e^{-x} = 2\sqrt{5} \iff X + \frac{1}{X} = 2\sqrt{5} \\ &\iff X^2 + 1 = 2\sqrt{5}X \iff X^2 - 2\sqrt{5}X + 1 = 0. \end{aligned}$$

Il s'agit donc d'une équation du second degré, dont le discriminant est  $20 - 4 = 16$ , donc les deux solutions de l'équation sont  $\frac{2\sqrt{5} \pm 4}{2} = \sqrt{5} \pm 2$ . Ces deux quantités sont positives, on a donc les équivalences suivantes :

$$\operatorname{ch}(x) = \sqrt{5} \iff e^x = \sqrt{5} \pm 2 \iff x = \ln(\sqrt{5} \pm 2).$$

Ainsi, les deux solutions sont  $\ln(\sqrt{5} - 2)$  et  $\ln(\sqrt{5} + 2)$ .

**19.7 b)** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On pose  $X = e^x$ . On a  $\operatorname{sh}(x) = 1 \iff \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 1 \iff \frac{X - \frac{1}{X}}{2} = 1 \iff X^2 - 2X - 1 = 0$ , de discriminant  $4 + 4 = 8$ , de solutions  $\frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$ . La seule solution positive étant  $1 + \sqrt{2}$ , on a :

$$\operatorname{sh}(x) = 1 \iff e^x = 1 + \sqrt{2} \iff x = \ln(1 + \sqrt{2}).$$

**19.7 c)** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On pose  $X = e^x$ . Alors, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \operatorname{th}(x) = \frac{1}{3} &\iff \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{3} \iff \frac{X - \frac{1}{X}}{X + \frac{1}{X}} = \frac{1}{3} \iff X^2 - 1 = \frac{1}{3}(X^2 + 1) \\ &\iff \frac{2}{3}X^2 - \frac{4}{3} = 0 \iff X^2 = 2 \iff X = \pm\sqrt{2}. \end{aligned}$$

La seule solution positive étant  $\sqrt{2}$ , on a  $\operatorname{th}(x) \iff e^x = \sqrt{2} \iff x = \frac{1}{2} \ln(2)$ .

**19.7 d)** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On pose  $X = e^x$ . On a  $\operatorname{ch}(x) \leq 4 \iff \frac{X + \frac{1}{X}}{2} \leq 4 \iff X^2 + 1 \leq 8X \iff X^2 - 8X + 1 \leq 0$ . Ce polynôme du second degré a pour discriminant 60 et pour racines  $\frac{8 \pm 2\sqrt{15}}{2} = 4 \pm \sqrt{15}$ . Les deux racines sont positives, donc  $\operatorname{ch}(x) \leq 4 \iff 4 - \sqrt{15}e^x \leq 4 + \sqrt{15} \iff \ln(4 - \sqrt{15}) \leq x \leq \ln(4 + \sqrt{15})$ . On remarque ensuite que

$$\frac{1}{4 - \sqrt{15}} = \frac{4 + \sqrt{15}}{(5 - \sqrt{15})(4 + \sqrt{15})} = 4 + \sqrt{15}.$$

**19.7 e)** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Posons  $X = e^x$ . On a  $\text{sh}(x) \geq 3 \iff e^x - e^{-x} \leq 6 \iff X - \frac{1}{X} \leq 6 \iff X^2 - 6X - 1 \leq 0$ .

Ce trinôme du second degré a pour discriminant 40, et a donc pour racines  $\frac{6 \pm 2\sqrt{10}}{2} = 3 \pm \sqrt{10}$ . La première racine est négative, la seconde positive, et  $X \geq 0$ , donc  $\text{sh}(x) \geq 3 \iff e^x \geq 3 + \sqrt{10} \iff x \geq \ln(3 + \sqrt{10})$ .

**19.7 f)** Soit  $x \in \mathbb{R}$ , posons  $X = e^x$ . Alors, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \text{th}(x) \leq \frac{1}{2} &\iff \frac{X - \frac{1}{X}}{X + \frac{1}{X}} \leq \frac{1}{2} \iff \frac{X^2 - 1}{X^2 + 1} \leq \frac{1}{2} \\ &\iff X^2 - 1 \leq \frac{X^2 + 1}{2} \iff X^2 - 3 \leq 0 \iff X^2 \leq 3 \iff e^{2x} \leq 3 \iff x \leq \frac{1}{2} \ln(3). \end{aligned}$$

**19.8 a)** On n'oublie pas que  $2^x = e^{x \ln(2)}$ . Ainsi, la dérivée de  $x \mapsto 2^x$  est  $x \mapsto \ln(2) \times 2^x$ .

**19.8 c)** On écrit  $x^x = e^{x \ln(x)}$ . Ainsi, la dérivée de la fonction est  $x \mapsto (\ln(x) + 1)e^{x \ln(x)}$ .

**19.8 d)** On dérive un quotient. En notant  $f$  la fonction et pour  $x \in ]-1, 1[$ , on a :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \arccos(x) + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin(x)}{\arccos(x)^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{1-x^2} \arccos(x)^2}.$$

**19.9 a)** On dérive une composée  $x \mapsto 2x \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$ .

**19.9 c)** Il s'agit de dériver  $\text{th}$ . Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\text{th}'(x) = \frac{\text{ch}(x)\text{ch}(x) - \text{sh}(x)\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)^2} = \frac{\text{ch}(x)^2 - \text{sh}(x)^2}{\text{ch}(x)^2} = 1 - \frac{\text{sh}(x)^2}{\text{ch}(x)^2} = 1 - \text{th}(x)^2.$$

La suite se dérive comme la dérivée d'une composée.

**19.10 a)** La fonction est dérivable sur  $] -1, 1[$  et sa dérivée est  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$ .

**19.10 b)** La fonction est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et sa dérivée est  $x \mapsto \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{x^2} \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$ .

**19.11 a)** Il s'agit de dériver une composée. La dérivée de cette fonction est :

$$x \mapsto (\ln(x) + 1)x^x F'(x^x) = (\ln(x) + 1)x^x e^{-(x^x)^2} = (\ln(x) + 1)x^x e^{-x^{2x}}.$$

**19.11 b)** Il s'agit de dériver une composée. La dérivée de  $x \mapsto \ln(\text{ch}(x))$  est  $x \mapsto \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} = \text{th}(x)$ .

Donc, la dérivée de  $x \mapsto F(\sqrt{\ln(\text{ch}(x))})$  est :

$$x \mapsto \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} \frac{1}{2\sqrt{\ln(\text{ch}(x))}} e^{-\ln(\text{ch}(x))} = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)^2} \frac{1}{2\sqrt{\ln(\text{ch}(x))}}.$$