

Chapitre 0: Éléments de logique et théorie des ensembles - cours/TD

Ce chapitre introductif est destiné à être consulté tout au long de l'année. Les notions abordées font partie des fondements du cours de mathématiques.

1. Éléments de logique

1.1 Assertion et prédicat

Def : On appelle **assertion** un énoncé mathématiques qui est soit vrai, soit faux.

Un axiome est un énoncé vrai par définition. Dans le cours, les propositions, théorèmes, corollaires et lemmes sont des assertions vraies.

On considère qu'il ne peut y avoir de contradiction c'est à dire d'assertions qui sont à la fois vraies et fausses, cela est à la base du raisonnement par l'absurde.

Exemples:

- 7 est un nombre premier est une assertion vraie
- $2 + 3 = 6$ est une assertion fausse
- Par deux points quelconques du plan passe une droite et une seule est une assertion vraie, c'est un des axiomes d'Euclide.

Def : On appelle **prédicat** un énoncé mathématique faisant intervenir une ou plusieurs variables et dont la valeur de vérité dépend des valeurs de ces variables.

Exemple : $\mathcal{P}(n) : n^2 + 2n$ est un multiple de 3, est une propriété qui dépend de n , on parle alors de prédicat. $\mathcal{P}(2)$ est une assertion fausse alors que $\mathcal{P}(3)$ est vraie.

1.2 Connecteurs logiques

Def : La **négation** d'une assertion $\mathcal{P}$ est l'assertion notée $(\text{non } \mathcal{P})$ qui est vraie lorsque $\mathcal{P}$ est fausse et fausse lorsque $\mathcal{P}$ est vraie.

Exemple : La négation de l'assertion « $f(x) = 0$ admet des solutions sur $\mathbb{R}$ » est « $f(x)$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ »

Def :

- La **disjonction** de deux assertions est notée $[\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q}]$. Elle est vraie lorsque l'une des deux propositions au moins est vraie.
- La **conjonction** de deux assertions est notée $[\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q}]$. Elle est vraie lorsque les deux propositions sont vraies.

✎ **Exercice 0.1:** Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses

- a) $(1 + 1 = 2)$ ou $(2 < 6)$ b) (2 est impair) ou $(2 < 6)$ c) $2 \leq 6$
- d) $(1 + 1 = 2)$ et (2 est impair) e) $(1 + 1 = 2)$ et $(2 \leq 6)$

Remarques

★ Le OU logique est **inclusif** alors que dans le langage courant le ou est le plus souvent exclusif et a le sens de "ou bien".

★ L'accolade est une conjonction, ainsi: $\begin{cases} 1+1=2 \\ 2 < 6 \end{cases}$ est vraie alors que $\begin{cases} 2 \text{ est impair} \\ 2 < 6 \end{cases}$ est faux

★ Si P est une assertion alors $[P \text{ et } (\text{non}P)]$ est fausse tandis que $[P \text{ ou } (\text{non}P)]$ est vraie.

Proposition 0.1: Soit P , Q et R trois assertions.

- La négation de $(\text{non}P)$ est P
- La négation de $(P \text{ et } Q)$ est $[(\text{non}P) \text{ ou } (\text{non}Q)]$
- La négation de $(P \text{ ou } Q)$ est $[(\text{non}P) \text{ et } (\text{non}Q)]$
- L'assertion $[P \text{ ou } (Q \text{ et } R)]$ a même valeur de vérité que $[(P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)]$
- L'assertion $[P \text{ et } (Q \text{ ou } R)]$ a même valeur de vérité que $[(P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)]$

✎ Exercice 0.2:

a) Donner la négation des assertions suivantes

$$A = (\pi > 3 \text{ et } \pi \in \mathbb{N}) \quad B(x) = x \in [-1, 1[$$

b) Résoudre le système $\begin{cases} ab = 0 \\ a + b = 1 \end{cases}$

1.3 Implication et équivalence

Def : Soit P et Q deux assertions, l'implication notée $(P \Rightarrow Q)$ est, par définition, l'assertion $[(\text{non}P) \text{ ou } Q]$

$(P \Rightarrow Q)$ s'énonce sous la forme : si P alors Q .

✎ **Exercice 0.3:** Donner la définition des implications suivantes. Sont elles vraies ?

a) $x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$ b) $x = e \Rightarrow \ln x = 1$ c) $x = e \Rightarrow x < 3$ d) $e = 3 \Rightarrow 1 + 1 = 2$

✎ Compléter la table de vérité suivante.

P	Q	Non P	$P \Rightarrow Q$
V	V		
V	F		
F	V		
F	F		

Remarques:

★ $P \Rightarrow Q$ est vraie lorsque P est fausse ou Q est vraie, par suite, toutes les implications commençant par une propriété fausse sont vraies:

★ $P \Rightarrow Q$ est fausse lorsque P est vraie et Q est fausse.

Vocabulaire : Lorsque $P \Rightarrow Q$ est vraie, on dit que:

- ★ P est une **condition suffisante** pour Q car il suffit que P soit vraie pour que Q le soit aussi.
- ★ Q est une **condition nécessaire** pour P car on ne peut avoir P vraie et Q fausse.

Proposition 0.2: La négation de $(P \Rightarrow Q)$ est $(P \text{ et non } Q)$.

✎ **Exercice 0.4:** Ecrire la négation des propositions de l'exercice 3.

Dans la pratique : Les propositions et théorèmes du cours sont le plus souvent des implications. On utilise $P \Rightarrow Q$ de la manière suivante.

- Si P est vraie alors on peut en déduire que Q est vraie.
- Si Q est fausse alors on peut en déduire que P est fausse.

✎ Attention: Si P est fausse ou si Q est vraie, **on ne peut rien en déduire.**

✎ **Exercice 0.5:** On admet que : « si il pleut, alors je prends mon parapluie ». Que peut-on déduire :

- a) Si j'ai mon parapluie ?
- b) Si il fait grand soleil ?
- c) Si il pleut ?
- d) Si je n'ai pas de parapluie ?

Proposition 0.3 et def: Les implications $(P \Rightarrow Q)$ et $(\text{non}Q \Rightarrow \text{non}P)$ ont même valeur de vérité. $(\text{non}Q \Rightarrow \text{non}P)$ est la **contraposée** de $(P \Rightarrow Q)$

✎ **Exercice 0.6:** Ecrire les contraposées des implications de l'exercice 3.

Dans la pratique : Pour établir que $(P \Rightarrow Q)$ est vraie on pourra:

- Supposer que P est vraie et démontrer que Q est vraie.
- Montrer la contraposée, c'est à dire supposer que Q est fausse et démontrer que P est fausse.
- Reasonner par l'absurde en supposant que la négation de l'implication est vraie pour aboutir à une contradiction.

Def : L'implication **réciroque** de $(P \Rightarrow Q)$, est $(Q \Rightarrow P)$

✎ Attention: une implication peut être vraie et sa réciproque fausse.

Exercice 0.7: Dire si les réciproques des implications de l'exercice 3 sont vraies ou fausses

Def : On dit que deux propositions P et Q sont équivalentes lorsqu'on a la double implication $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$. Dans ce cas, on note $(P \Leftrightarrow Q)$ et on énonce :

P **équiva**ut à Q ou encore P **si et seulement si** (ssi) Q

Deux assertions équivalentes ont simultanément la même valeur de vérité

Exemples:

- a) $(\text{non}(\text{non}P)) \Leftrightarrow P$
- b) $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\text{non}Q \Rightarrow \text{non}P)$
- c) $(\text{non}(P \text{ ou } Q)) \Leftrightarrow (\text{non}P) \text{ et } (\text{non}Q)$
- d) $x = e \Leftrightarrow \ln x = 1$
- e) $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1$

Lorsque $P \Leftrightarrow Q$ on dit que Q est une **condition nécessaire et suffisante** pour P .

Pour établir la validité d'une équivalence, on pourra raisonner:

- ★ par équivalence directe.
- ★ par double implication.

2. Notions de base sur les ensembles

2.1 Généralités:

Def : Un ensemble est une collection d'objets. On peut le décrire de différentes façons:

- En le nommant si une notation lui a été attribuée: $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{C}$...

- En extension c'est à dire en listant ses éléments :

$$A = \{1, -3, 2\} \quad B = \{0, 2, 4, \dots, 2n\} \quad \text{PCSI2} = \{\text{Alexis}, \dots, \text{Zoé}\}$$

- En compréhension c'est à dire en caractérisant ses éléments par une propriété $\mathcal{P}$

$$E = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \in [0, 4]\}$$

Si $E = \{x \in E \mid \mathcal{P}(x)\}$, alors A contient tous les éléments de E pour lesquels $\mathcal{P}(x)$ est vraie.

- En utilisant un paramètre

$$E = \{2n + 3, n \in \mathbb{N}\}$$

Remarque : On peut décrire un même ensemble en utilisant différentes méthodes :

$$3\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ divisible par } 3\} = \{3k, k \text{ décrit } \mathbb{Z}\}$$

★ Vocabulaire et notations :

- Si un ensemble E contient l'élément a on note $a \in E$ et on dit que a appartient à E .

Sinon, on note: $a \notin E$.

- Il existe un ensemble ne contenant aucun élément, c'est l'ensemble vide noté $\emptyset$.

- Un ensemble ne contenant qu'un seul élément s'appelle un singleton. On note $E = \{a\}$.

- Deux ensembles sont égaux ssi ils ont les mêmes éléments.

2.2 Parties d'un ensemble, inclusion:

Def: Soit E et A deux ensembles. A est une partie de E , ou un sous-ensemble de E lorsque tout élément de A est dans E .

On note $A \subset E$ et on lit " A est inclus dans E "

✎ Illustration :

✎ Attention à ne pas confondre :

$\in$ est réservé aux éléments

$\subset$ est réservé aux parties.

Exemples: $\{-1, 2, \sqrt{3}\} \subset \mathbb{R}$

En pratique: Comment démontrer une inclusion ?

On prend un élément quelconque de A (Soit $x \in A$...) et on montre qu'il est nécessairement dans B (.....donc $x \in B$). On conclut : $A \subset B$.

✎ **Exercice 0.8:** Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère la partie

$\Gamma = \{M(x,y) \mid y = \sqrt{1-x^2}\}$. Montrer que Γ est inclus dans le cercle trigonométrique. A-t-on égalité ?

Proposition : Soit A , B et C trois ensembles.

① $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ et $B \subset A$

② Si $A \subset B$ et $B \subset C$ alors $A \subset C$

Conséquence pratique: Pour démontrer que $A = B$, on raisonne le plus souvent par double-inclusion.

✎ **Exercice 0.9:** On considère les ensembles suivants :

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x - y = 1\}$ et $B = \{(t+1, 4t+3), t \in \mathbb{R}\}$. Montrer que $A = B$

Déf: On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de l'ensemble E .

Remarque: $\mathcal{P}(E)$ contient toujours $\emptyset$ et E .

⚡ **Attention:** $\mathcal{P}(E)$ est un ensemble dont les éléments sont des ensembles.

✂ **Exercice 0.10:** Soit $E = \{1, 3, 2\}$, Donner les éléments de $\mathcal{P}(E)$

1.3 Opérations sur les parties d'un ensemble:

a) Réunion et intersection:

Déf: Soit A et B dans $\mathcal{P}(E)$.

L'intersection de A et de B est $A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$

La réunion de A et de B est $A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$.

✂ Illustration:

★ **Vocabulaire:** Lorsque $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont disjoints.

b) Complémentaire:

Déf: Soit A une partie de E , le complémentaire de A dans E est noté $\bar{A}$ ou A^c et défini par :

$$\bar{A} = \{x \in E, x \notin A\}$$

✂ Illustration:

c) Différence:

Déf: Soit A et B des parties de E . La différence de A et de B est

$$A \setminus B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}.$$

On lit « A privé de B ».

✂ Illustration:

★ **Remarques :** $A \setminus B = A \cap \bar{B}$ et $\bar{\bar{A}} = A$

1.4 Produit cartésien de deux ensembles:

Déf: Soit E et F deux ensembles. Le produit cartésien de E et de F noté $E \times F$ est l'ensemble des couples (x, y) tels que $x \in E$ et $y \in F$.

$$E \times F = \{(x, y), x \in E, y \in F\}$$

✂ Illustration:

Exemple: $(-1, \sqrt{2}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$

★ Notation: Si $E = F$ alors $E \times F = E \times E$ est noté E^2 .

Def : Soit E un ensemble, un n-uplet de E est une liste ordonnée d'éléments de E que l'on peut noter $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. L'ensemble de ces n-uplets constitue le produit cartésien $E^n = E \times E \times \dots \times E$.

Exemples :

- $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des couples de réels. $(0, \sqrt{2}) \in \mathbb{R}^2$,
- $\mathbb{R}^3$ est l'ensemble des triplets de réels.

3. Quantificateurs

On considère un prédicat portant sur une variable x pouvant prendre ses valeurs dans un ensemble E . Par exemple : $\mathcal{P}(x) : (x^2 \geq 4)$ avec $x \in \mathbb{R}$.

- $[\forall x \in E, \mathcal{P}(x)]$ est une assertion qui se lit "pour tout x dans E on a $\mathcal{P}(x)$ ". Elle est vraie lorsque $\mathcal{P}(x)$ est vrai pour tous les éléments de E .
- $[\exists x \in E, \mathcal{P}(x)]$ est une assertion qui se lit "il existe un élément de E tel que $\mathcal{P}(x)$ ". Elle est vraie lorsque $\mathcal{P}(x)$ est vrai pour au moins un élément de E .
- $[\exists! x \in E, \mathcal{P}(x)]$ est une assertion qui se lit "il existe un unique élément de E tel que $\mathcal{P}(x)$ ". Elle est vraie lorsque $\mathcal{P}(x)$ est vrai pour exactement un élément de E .

Exemples:

- Pour tout réel de $[0, 1]$, $x^2 \leq 1$ s'écrit symboliquement : $(\forall x \in [0, 1], x^2 \leq 1)$
- Il existe un entier naturel n tel que u_n est positif s'écrit symboliquement : $(\exists n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0)$
- f s'annule une seule fois sur $\mathbb{R}$ s'écrit symboliquement : $(\exists! x \in \mathbb{R}, f(x) = 0)$

Exercice 0.11: Dire si les propositions suivantes écrites symboliquement, sont vraies ou fausses:

- | | |
|--|--|
| a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ | b) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 = 0$ |
| c) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 = 0$ | d) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 = 0$ |

Dans la pratique :

- ★ Pour montrer que $[\forall x \in E, \mathcal{P}(x)]$ est vraie, on commence la preuve par : Soit $x \in E$... puis on montre que, indépendamment de la valeur de x dans E , $\mathcal{P}(x)$ est vraie.
- ★ Pour montrer que $[\exists x \in E, \mathcal{P}(x)]$ est vraie, on trouve un élément x_0 de E tel que $\mathcal{P}(x_0)$ est vraie ou on utilise un théorème d'existence qui nous évite de chercher x_0 .
- ★ Lorsqu'on a une hypothèse du type $[\forall x \in E, \mathcal{P}(x)]$, on peut remplacer x par une valeur choisie arbitrairement dans E . par exemple si on a $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$ alors on peut écrire : $f(2) \geq 0$.
- ★ Lorsqu'on a une hypothèse du type $[\exists x \in E, \mathcal{P}(x)]$, on peut écrire : soit $x \in E$ tel que $\mathcal{P}(x)$sans se préoccuper de la valeur de x .

Proposition 0.4:

La négation de la proposition $[\forall x \in E, \mathcal{P}(x)]$ est $[\exists x \in E, (\text{non } \mathcal{P}(x))]$

La négation de la proposition $[\exists x \in E, \mathcal{P}(x)]$ est $[\forall x \in E, (\text{non } \mathcal{P}(x))]$

Exercice 0.12: Ecrire symboliquement les assertions suivantes ainsi que leur négation.

f désigne une fonction définie sur $\mathbb{R}$

- Un carré est toujours positif
- La suite (u_n) est croissante

- c) $f(x) = 2$ admet une solution sur $\mathbb{R}$
- d) f est une fonction paire
- e) 2 est le plus petit élément de E
- f) Pour tout réel x , si x est un entier alors $f(x)$ est un entier

Proposition 0.5 : Soit $P(x, y)$ un prédicat qui dépend de deux variables x et y .

- Les propositions $[\forall x \in E, \forall y \in F, P(x, y)]$ et $[\forall y \in F, \forall x \in E, P(x, y)]$ sont équivalentes
- Les propositions $[\exists x \in E, \exists y \in F, P(x, y)]$ et $[\exists y \in F, \exists x \in E, P(x, y)]$ sont équivalentes

✎ **Attention :** Lorsque les quantificateurs sont différents, on ne peut en général pas les permuter :

- $[\forall x \in E, \exists y \in F, P(x, y)]$ signifie que pour tout x fixé dans E , il existe un élément y de F tel que $P(x, y)$ est vraie et y donc dépend de x .
- $[\exists y \in F, \forall x \in E, P(x, y)]$ signifie qu'il existe un élément y de F tel que $P(x, y)$ est vraie pour toutes les valeurs de x .

Exercice 0.13: Soit le prédicat: $P(x, y) : x + y = x^3 + y^3$ où x et y sont des réels.

- a) $P(x, y)$ est-il toujours vrai?
 - b) Existe-t-il des valeurs de x et de y pour lesquelles $P(x, y)$ est vrai ?
 - c) Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses
- $A: (\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y = x^3 + y^3)$
- $B: (\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x + y = x^3 + y^3)$

IMPORTANT: Il n'est pas pertinent de faire un usage immodéré des écritures symboliques. Une copie gagne en lisibilité à contenir des phrases écrites en français et surtout on ne mélangera pas les deux types d'écriture.

Exercices complémentaires :

0.14 A, B et C sont trois parties d'un ensemble E.

Montrer que $(A \cup B) \cap C \subset A \cup (B \cap C)$ avec égalité si et seulement si $A \subset C$

0.15 A, B et C sont trois parties d'un ensemble E. Montrer les équivalences suivantes:

a. $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$

b. $A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C$

c. $[(A \cup B) = (A \cup C) \text{ et } (A \cap B) = (A \cap C)] \Leftrightarrow B = C$

0.16: Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses puis écrire symboliquement leur négation :

a) $\forall x \in \mathbb{R}, -x \leq 0$

b) $\forall x \in \mathbb{R}, -x^2 \leq 0$

c) $\exists x \in \mathbb{R}, x > x^2$

d) $\exists x \in \mathbb{R}, \sin x = 2$

e) $\forall x \in \mathbb{R}^+, \exists y \in \mathbb{R}, x = y^2$

f) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^+, x = y^2$

0.17 : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, écrire symboliquement les propositions suivantes ainsi que leur négation :

a) f admet un maximum en 2

b) 1 admet un unique antécédent par f

c) f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$

d) f est paire

e) f est 2π périodique.

d) f est de signe constant.

0.18 : Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+, [x + 1 = \sqrt{x} \Rightarrow x^2 + x + 1 = 0]$

Que pensez-vous de l'assertion : $\exists x \in \mathbb{R}_+, x + 1 = \sqrt{x}$

0.19 : Montrer que $\{y \in \mathbb{R} | \exists x \in [-1, 2], y = x^2\} = [0, 4]$

0.20 : Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\sqrt{x+1} \leq 2(x-2)$

0.21 : Vrai ou faux ?

a) $\exists x \in [-1, 2], x^2 + 3x + 1 = 0$

b) $\forall m \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, x^2 + mx + 2 = 0$

c) $\exists x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*, z = xy$

d) $\forall y \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}^*, z = xy$

0.22 : Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}, ax + be^x = 0) \Leftrightarrow (a = b = 0)$