

## Chapitre 1 : Ensembles de nombres, inégalités dans $\mathbb{R}$

### 1. Les nombres entiers

#### 1.1 Les entiers naturels:

**Def :**  $\mathbb{N}$  désigne l'ensemble des entiers naturels.  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, n, n+1, \dots\}$ ,

Si on admet les 3 propriétés suivantes comme des **axiomes** :

- ① Toute partie non vide de  $\mathbb{N}$  admet un plus petit élément.
- ② Toute partie non vide de  $\mathbb{N}$  et majorée admet un plus grand élément.
- ③  $\mathbb{N}$  n'est pas majoré.

On peut alors montrer que

- ★  $\mathbb{N}$  possède un plus petit élément qui est 0.
- ★ Tout entier  $n \in \mathbb{N}$  a un successeur noté  $(n+1)$
- ★ Tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$  a un prédécesseur noté  $(n-1)$
- ★ La validité de la démonstration par récurrence :

**Principe de récurrence:**

Si  $\begin{cases} \mathcal{P}(n_0) \text{ est vraie} \\ \text{Pour un entier } n \text{ quelconque, } n \geq n_0, \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1) \end{cases}$ , alors  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout  $n \geq n_0$ .

Vocabulaire:

- ★ Vérifier  $\mathcal{P}(n_0)$  constitue l'**initialisation** du raisonnement par récurrence.
- ★ Une propriété  $\mathcal{P}(n)$  vérifiant  $\forall n \geq n_0, \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$  est dite **héréditaire**.

⚠ Attention: Une propriété peut être héréditaire et par ailleurs, fausse! L'étape d'initialisation est donc indispensable pour conclure.

🔗 Exercices de révisions 9a et 11a

#### 1.2 les entiers relatifs, divisibilité

**Def :**  $\mathbb{Z}$  désigne l'ensemble des entiers relatifs. Il contient  $\mathbb{N}$  et tous les opposés des entiers naturels.

On note  $\llbracket n, p \rrbracket$  la partie de  $\mathbb{Z}$  définie par  $\{x \in \mathbb{Z}, n \leq x \leq p\}$ .

$$\llbracket -1, 10 \rrbracket = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

**Déf:** Soient  $a$  et  $b$  deux entiers relatifs.

- On dit que  $b$  divise  $a$  lorsqu'on peut écrire  $a = kb$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

Symboliquement  $b|a \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } a = kb$

- On dit que  $a$  est un multiple de  $b$  lorsque  $b$  divise  $a$ .

Remarque: L'égalité  $a = kb$  donne deux diviseurs de  $a$ :  $b$  et  $k$ .

Vocabulaire: Lorsque  $b|a$ ,  $b$  est un diviseur de  $a$  et  $a$  est un multiple de  $b$ .

**Proposition 1.1:** Propriétés de la relation divise:  $a, b$  et  $c$  sont des entiers relatifs

- ①  $a|a$
- ② si  $b|a$  et  $a|b$  alors  $a = b$  ou  $a = -b$
- ③ si  $a|b$  et si  $b|c$  alors  $a|c$
- ④ si  $d|a$  et  $d|b$  alors  $\forall (u, v) \in \mathbb{Z}^2, d|(au + bv)$

Vocabulaire et notations

- ★ On note  $a\mathbb{Z}$  l'ensemble des multiples de  $a$ .  $n \in a\mathbb{Z} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n = ka$

Les entiers naturels pairs sont les multiples de 2 soit  $2\mathbb{Z}$ .

- On notera  $D(a)$  l'ensemble des diviseurs de  $a$ .  $D(a)$  contient toujours au moins 1 et  $a$ .  $D(a)$  est une partie finie de  $\mathbb{Z}$  car majorée par  $a$  et minorée par  $-a$
- Des entiers sont dits premiers entre eux lorsque leur seul diviseur commun est 1.

✎ Exercice: Montrer par récurrence sur  $n$  que  $a_n = 2^{3n} - 1$  est divisible par 7, pour tout  $n \in \mathbb{N}$

## 2. Les nombres rationnels et décimaux

**Def** :  $\mathbb{Q}$  désigne l'ensemble des rationnels.  $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^* \right\}$ .

Tout élément de  $\mathbb{Q}$  s'écrit de manière unique sous la forme d'une fraction irréductible  $\frac{p}{q}$  où les entiers  $p$  et  $q$  sont premiers entre eux.

**Def** :  $\mathbb{D}$  désigne l'ensemble des décimaux.  $\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{10^n}, a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$ .

$\mathbb{D}$  est strictement inclus dans  $\mathbb{Q}$ .

## 3 Les réels

### 3.1 Le corps des réels

**Def** :  $\mathbb{R}$  désigne l'ensemble des réels. Il contient toutes les longueurs et leurs opposées

Les réels non rationnels sont dits irrationnels ils forment l'ensemble  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

$\sqrt{2}$ ,  $\pi$  et  $e$  sont irrationnels.

On représentera  $\mathbb{R}$  par un axe gradué appelé droite réelle ou droite numérique.

### ✎ Exercice 1.2

### 3.2 Calculs dans $\mathbb{R}$

L'ensemble des nombres réels est muni de 2 opérations : l'addition et la multiplication.

★ L'addition dans  $\mathbb{R}$  vérifie :

- Elle est interne dans  $\mathbb{R}$  :  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, a + b \in \mathbb{R}$
- Elle est associative :  $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, (a + b) + c = a + (b + c)$
- 0 est neutre pour l'addition  $\forall a \in \mathbb{R}, a + 0 = 0 + a$
- Tout élément  $a$  de  $\mathbb{R}$  admet un opposé, appartenant à  $\mathbb{R}$ , noté  $-a$  tel que :  $a + (-a) = (-a) + a = 0$ .
- Elle est commutative :  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, a + b = b + a$ .

★ La multiplication dans  $\mathbb{R}$  vérifie :

- Elle est interne dans  $\mathbb{R}$  :  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, a \times b \in \mathbb{R}$
- Elle est associative :  $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, (a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
- 1 est neutre pour la multiplication :  $\forall a \in \mathbb{R}, a \times 1 = 1 \times a$
- Elle est commutative :  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, a \times b = b \times a$
- la multiplication est distributive par rapport à l'addition :  
 $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, (a + b) \times c = a \times c + b \times c$   
 $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, c \times (a + b) = c \times a + c \times b$

- Tout élément **non nul**  $a$  de  $\mathbb{R}$ , admet un inverse, appartenant à  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , noté  $a^{-1}$  ou  $\frac{1}{a}$ , tel que :  
 $a \times a^{-1} = a^{-1} \times a = 1$ .

Vocabulaire :

- $\mathbb{R}$  muni de l'addition et de la multiplication est un corps commutatif.
- 0 est absorbant :  $\forall a \in \mathbb{R}, a \times 0 = 0 \times a = 0$
- Règle du produit nul :  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, a \times b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0$

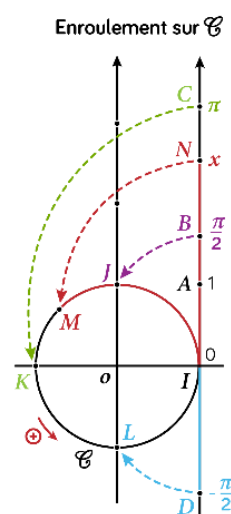
✎ Exercice : Vérifiez que  $\mathbb{Q}$  muni des mêmes opérations est également un corps commutatif.

Est-ce le cas de  $\mathbb{Z}$  ?

### 3.3 Cosinus et sinus d'un réel

**Def** : Par enroulement de la droite réelle sur le cercle trigonométrique, on associe à tout réel  $x$  un unique point du cercle noté  $M$ .

L'abscisse de  $M$  est le cosinus de  $x$  et son ordonnée le sinus de  $x$ .



♥ Se reporter à la fiche de trigonométrie en annexe pour les formules à connaître et leurs justifications

**Def** : Soit  $x$  et  $y$  deux réels. On dit que  $x$  et  $y$  sont congrus modulo  $2\pi$  et on note  $x \equiv y [2\pi]$ , lorsqu'il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $x = y + 2k\pi$

**Propriétés** :  $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \equiv y [2\pi] \Leftrightarrow \cos(x) = \cos(y) \text{ et } \sin(x) = \sin(y)$

✎ Exercices de révisions 18 et 19

## 4. Ordre dans $\mathbb{R}$

### 4.1 Définition et compatibilité avec les opérations

**Def** : Soit  $x$  et  $y$  deux réels. On dit que  $y$  est plus grand que  $x$  et on note  $x \leq y$  lorsque la différence  $(y - x)$  est un réel positif.

**Propriétés immédiates** : La relation précédente est

- Réflexive:  $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq x$
- Antisymétrique:  $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq y \text{ et } y \leq x \Rightarrow y = x$
- Transitive:  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x \leq y \text{ et } y \leq z \Rightarrow x \leq z$

On peut toujours comparer deux réels, on dit que la relation  $\leq$  est une relation d'ordre sur  $\mathbb{R}$ .  
Ou encore que  $\mathbb{R}$  est totalement ordonné.

**Proposition 1.3 :** La comparaison est compatible avec l'addition et la multiplication

① On peut ajouter un réel quelconque aux deux membres d'une inégalité :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z.$$

② On peut multiplier par un réel quelconque les deux membres d'une inégalité :

- sans changer son sens si ce réel est positif :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}_+, x \leq y \Rightarrow \lambda x \leq \lambda y$

- en changeant son sens si ce réel est négatif :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}_-, x \leq y \Rightarrow \lambda x \geq \lambda y$ .

③ On peut ajouter membre à membre deux inégalités de même sens :

$$\forall (x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4, (x \leq y) \text{ et } (x' \leq y') \Rightarrow x + x' \leq y + y'.$$

④ On peut multiplier membre à membre deux inégalités de même sens **PORTANT SUR DES REELS**

**POSITIFS :**  $\forall (x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4, (0 \leq x \leq y) \text{ et } (0 \leq x' \leq y') \Rightarrow 0 \leq xx' \leq yy'$ .

✎ Attention : Des erreurs à éviter

- Avant de multiplier une inégalité par un réel, on étudie son signe.
- On ne soustrait pas membre à membre deux inégalités.
- On ne divise pas membre à membre deux inégalités.

#### 4.2 Méthodes pratiques pour comparer deux réels :

★ Pour comparer deux nombres, on peut étudier le signe de leur différence. Pour étudier le signe de cette différence on peut :

- Utiliser les résultats suivants :
  - La somme de deux réels positifs (négatifs) est positive (négative).
  - Le produit de deux réels de même signe est positif, le produit de deux réels de signes contraires est négatif. *Tableau de signes.*
  - Le carré d'un réel est positif et la racine carrée d'un réel positif est positive.
- Etudier une fonction.

★ Pour comparer deux nombres on peut utiliser le sens de variation des fonctions usuelles.

Si  $f$  est croissante sur  $I$  intervalle de  $\mathbb{R}$  alors  $\forall x, y \in I, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

Si  $f$  est décroissante sur  $I$  intervalle de  $\mathbb{R}$  alors  $\forall x, y \in I, x \leq y \Rightarrow f(y) \leq f(x)$

Applications :

- Deux réels positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés et que leurs racines carrées.
- Deux réels strictement de même signe, non nuls, sont rangés dans l'ordre contraire de leur

$$\text{inverse } 0 < x \leq y \Rightarrow 0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x} \text{ et } x \leq y < 0 \Rightarrow \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x} < 0$$

✎ Attention : Avant de passer aux inverses dans une inégalité on vérifie que les deux membres sont non nuls et de même signe.

★ Pour établir une inégalité, on peut se ramener à une étude de signe, utiliser les règles sur l'ordre ou encore faire une démonstration par récurrence.

📖 Exercices de révisions 10, 20 et 22

#### 4.3 Majorants, minorants:

**Def:** Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{R}$ ,  $m$  et  $M$  deux réels

- $M$  est un majorant de  $A$  signifie que  $\forall x \in A, x \leq M$
- $m$  est un minorant de  $A$  signifie que  $\forall x \in A, m \leq x$ .
- On dit que  $A$  est majorée lorsqu'elle admet un majorant  $M$ .
- On dit que  $A$  est minorée lorsqu'elle admet un minorant  $m$ .
- $A$  est bornée ssi elle est majorée et minorée

#### 4.4 Plus grand élément et plus petit élément:

**Def:** Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{R}$ ,  $m$  et  $M$  deux réels

- $M$  est le plus grand élément de  $A$  lorsque  $M$  majore  $A$  et  $M \in A$ .
- $m$  est le plus petit élément de  $A$  lorsque  $m$  minore  $A$  et  $m \in A$ .

**Proposition 1.4:** Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{R}$ , si  $A$  admet un plus grand (resp petit) élément alors celui-ci est unique.

**Notation:** Si  $A$  admet un plus grand élément on le note  $\max(A)$  et si  $A$  admet un plus petit élément on le note  $\min(A)$ .

✎ Exercice 1.7

#### 4.5 Borne supérieure, borne inférieure

**Def:** Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{R}$ .

La borne supérieure de  $A$  est, si il existe, le plus petit des majorants de  $A$ .

La borne inférieure de  $A$  est, si il existe, le plus grand des minorants de  $A$ .

Sous réserve d'existence, on note  $\sup(A)$  et  $\inf(A)$  les réels ainsi définis.

**Remarque:** Si  $A$  possède un plus grand (resp plus petit) élément alors c'est sa borne sup (resp inf). Attention, la réciproque est fausse :  $\sup([0, 1]) = 1$  et  $1 \notin [0, 1]$ .  $[0, 1[$  n'admet pas de plus grand élément.

**Proposition 1.5:** Caractérisation de la borne supérieure. Soit  $A$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$

$$\alpha = \sup(A) \Leftrightarrow \forall x \in A, x \leq \alpha \text{ et } \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, \alpha - \varepsilon < x$$

$$\beta = \inf(A) \Leftrightarrow \forall x \in A, x \geq \beta \text{ et } \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, x < \beta + \varepsilon$$

**Important :** Il faut savoir faire un schéma illustrant ces caractérisations.

**Théorème 1.1 (admis):** Toute partie non vide et majorée (resp minorée) de  $\mathbb{R}$  admet une borne supérieure (resp. inférieure).

**Conventions :** Si  $A$  n'est pas majorée, on convient que  $\sup(A) = +\infty$  et si  $A$  n'est pas minorée, que  $\inf(A) = -\infty$

**Vocabulaire :** On dit que  $\mathbb{R}$  possède la propriété de la borne supérieure.

✎ Exercice : 1.11

#### 5. Valeur absolue d'un réel, intervalles de $\mathbb{R}$ :

**Def :** Soit  $x$  un réel, la valeur absolue de  $x$  est le réel positif noté  $|x|$  et défini par

$$|x| = \max(x, -x)$$

**Dans la pratique :** Pour tout réel  $x$ ,  $|x| = x$  si  $x \geq 0$  et  $|x| = -x$  si  $x \leq 0$

**Proposition 1.4 :** Propriétés de la valeur absolue :  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ , on a

- |                                         |                                             |
|-----------------------------------------|---------------------------------------------|
| ① $- x  \leq x \leq  x $                | ③ $ x  = 0 \Leftrightarrow x = 0$           |
| ② $ -x  =  x $                          | ④ $\sqrt{x^2} =  x $                        |
| ⑤ $x^2 = y^2 \Leftrightarrow  x  =  y $ | ⑦ $ x/y  =  x / y $ avec $y \neq 0$         |
| ⑥ $ xy  =  x   y $                      | ⑧ $  x  -  y   \leq  x + y  \leq  x  +  y $ |

☞ Démonstrations de ④ et de ⑧ à connaître

**Def :** Une partie  $I$  de  $\mathbb{R}$  est un intervalle si dès qu'elle contient deux réels  $a$  et  $b$ , elle contient tous les réels compris entre  $a$  et  $b$ .

Ou encore  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R} \Leftrightarrow (\forall (a, b) \in I^2, a \leq x \leq b \Rightarrow x \in I)$ .

Vocabulaire : les intervalles sont les parties convexes de  $\mathbb{R}$ .

Classification des intervalles de  $\mathbb{R}$  : Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a \leq b$ .

★  $\emptyset$  et  $\mathbb{R}$  sont des intervalles de  $\mathbb{R}$ .

★ Les intervalles bornés de  $\mathbb{R}$  :

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$  intervalle fermé borné ou segment.
- $]a, b[ = \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$  intervalle borné semi-ouvert à droite.
- $]a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$  intervalle borné semi-ouvert à gauche.
- $]a, b[ = \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$  intervalle borné ouvert.

★ Les intervalles non bornés de  $\mathbb{R}$  :

- $[a, +\infty[ = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x\}$  intervalle fermé non majoré.
- $]a, +\infty[ = \{x \in \mathbb{R}, a < x\}$  intervalle ouvert non majoré.
- $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}, x \leq b\}$  intervalle fermé non minoré.
- $]-\infty, b[ = \{x \in \mathbb{R}, x < b\}$  intervalle ouvert non minoré.

Dans la pratique : Il peut être utile de paramétrer le segment  $[a, b]$  en le considérant comme l'ensemble  $\{ta + (1 - t)b, t \in [0, 1]\}$ . Ainsi  $x \in [a, b] \Leftrightarrow \exists t \in [0, 1], x = ta + (1 - t)b$

**Def :** On définit la distance entre deux réels  $x$  et  $y$  par  $d(x, y) = |x - y|$

Remarque : Pour tout réel  $x$ ,  $|x| = d(0, x)$

**Proposition 1.7 :** Propriétés de la distance :  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ .

- |                       |                                       |                                    |
|-----------------------|---------------------------------------|------------------------------------|
| ① $d(x, y) = d(y, x)$ | ② $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ | ③ $d(x, z) + d(z, y) \geq d(x, y)$ |
|-----------------------|---------------------------------------|------------------------------------|

Dans la pratique : Soit  $x$  et  $a$  deux réels et  $r$  un réel positif

$$|x - a| = r \Leftrightarrow d(x, a) = r \Leftrightarrow x = a + r \text{ ou } x = a - r$$

$$|x - a| \leq r \Leftrightarrow d(x, a) \leq r \Leftrightarrow a - r \leq x \leq a + r \Leftrightarrow x \in [a - r, a + r]$$

$$|x - a| \geq r \Leftrightarrow d(x, a) \geq r \Leftrightarrow x \leq a - r \text{ ou } x \geq a + r \Leftrightarrow x \in ]-\infty, a - r] \cup [a + r, +\infty[$$

**Proposition 1.8 :** Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{R}$ ,  $A$  est bornée si et seulement si  $\exists \alpha > 0, \forall x \in A, |x| \leq \alpha$

Illustrations :**6. Partie entière, approximations décimales****6.1 Partie entière**

**Def:** Soit  $x \in \mathbb{R}$ , la partie entière de  $x$  est l'unique entier  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $n \leq x < n+1$ .

On note  $n = \lfloor x \rfloor$  ou  $n = E(x)$ .

Exemples :  $\lfloor 1 \rfloor = 1$ ,  $\lfloor 1,5 \rfloor = 1$ ,  $\lfloor -1,5 \rfloor = -2$

⚡ Attention aux négatifs !!

La fonction partie entière est en escalier

$$\lfloor x \rfloor = \max \{ n \in \mathbb{Z}, n \leq x \}$$

**Proposition 1.9: Propriétés de la partie entière**

- ①  $\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1 \quad x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \quad 0 \leq x - \lfloor x \rfloor < 1$
- ②  $x \mapsto \lfloor x \rfloor$  est une fonction croissante sur  $\mathbb{R}$
- ③  $\forall x \in \mathbb{R}, (\lfloor x \rfloor = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z})$
- ④  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{Z}, \lfloor x + p \rfloor = \lfloor x \rfloor + p$

⚡ Démonstrations à connaître**6.2 Approximations décimales d'un réel :**

**Déf :** On dit que  $x'$  est une valeur approchée de  $x$  à  $\varepsilon$  près ssi  $|x - x'| \leq \varepsilon$

Si  $x' \leq x$  alors  $x'$  est une valeur approchée de  $x$  par défaut.

Si  $x' \geq x$  alors  $x'$  est une valeur approchée de  $x$  par excès.

**Proposition 1.7 :** Soit  $x \in \mathbb{R}$ ,  $d_n = \frac{\lfloor x 10^n \rfloor}{10^n}$  est l'approximation décimale de  $x$  par défaut à  $10^{-n}$  près et  $d_n + 10^{-n}$  est son approximation décimale par excès à  $10^{-n}$  près.