

Exercices – Chapitre 1: Ensembles de nombres, inégalités dans $\mathbb{R}$

♦ Exercice corrigé - ♥ A savoir refaire

Ensembles de nombres1.1 Montrer par récurrence sur n que $a_n = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.**1.2 Irrationalité de $\sqrt{2}$** a. Soit $n \in \mathbb{Z}$, montrer, par disjonction des cas, que n^2 est pair si et seulement si n est pair.b. Montrer, par l'absurde, que $\sqrt{2}$ est irrationnelc. Montrer que $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2, (a + b\sqrt{2} = 0) \Rightarrow (a = b = 0)$ d. En déduire que $\forall (m, n, p, q) \in \mathbb{Z}^4, (m + n\sqrt{2} = p + q\sqrt{2}) \Rightarrow (m = p \text{ et } n = q)$ 1.3 Montrer que $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, [(a + b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \Rightarrow (a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ ou } b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})]$ **Ordre sur $\mathbb{R}$** 1.4 On donne $0 < a \leq x \leq b, d \leq y \leq c < 0$ et $0 < e \leq z \leq f$. Encadrer les réels suivants

$$\alpha = 4x - 2y \quad \beta = xy \quad \gamma = \frac{x-y}{z} \quad \delta = x^2 + y^2 \quad \varepsilon = \frac{1}{2}x - y^2$$

♥ 1.5 Des inégalités à connaître

a. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leq |x|$ puis en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |\sin(nx)| \leq n|x|$ b. Soit $x \in [-\pi, \pi]$, comparer $\cos(x)$ et $1 - \frac{x^2}{2}$.

♥ 1.6 Inégalités entre les moyennes

Soit a et b deux réels strictement positifs. On pose $m = \frac{a+b}{2}$, $g = \sqrt{ab}$ et $h = \frac{2ab}{a+b}$ Montrer que $g \leq m$ puis que $h \leq g \leq m$. En déduire que $\forall x > 0, x + \frac{1}{x} \geq 2$

♥ 1.7 Montrer les assertions suivantes

a. Montrer que: $\forall x \in [0,1], \forall k \in \mathbb{N}^*, 0 \leq x^k(1-x)^k \leq 1$ b. Montrer que: $\forall x \in [0,1], \forall k \in \mathbb{N}^*, 0 \leq x^k(1-x)^k \leq x^k$ c. Montrer que: $\forall x \in [0,1], \forall k \in \mathbb{N}^*, 0 \leq x^k(1-x)^k \leq (1-x)^k$ d. Montrer que: $\forall x \in [0,1], \forall k \in \mathbb{N}^*, 0 \leq x^k(1-x)^k \leq \left(\frac{1}{4}\right)^k$ En déduire que: $\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=0}^n x^k(1-x)^k = 1 + x(1-x) + x^2(1-x)^2 + \dots + x^n(1-x)^n \leq \frac{4}{3}$ ♦ 1.8 a. Montrer que pour tous réels x et y on a : $(x+y)^2 \geq 4xy$ a. En déduire que $\forall a, b, c \in]0; +\infty[, (b+c)(c+a)(a+b) \geq 8abc$.b. Montrer que $\forall a, b, c \in]0; +\infty[, (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$ 1.9 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, n < 2^n$ **Majorant, minorant, borne sup, borne inf**1.10 Soit A une partie de $\mathbb{R}$, écrire symboliquement les propositions suivantes et donner un exemple de partie A pour laquelle la proposition est vraie. $\mathcal{P}_1$: 3 majore A $\mathcal{P}_2$: 1 ne majore pas A $\mathcal{P}_3$: A est majorée $\mathcal{P}_4$: A est bornée $\mathcal{P}_5$: A n'est pas minorée $\mathcal{P}_6$: Le plus petit élément de A est 1

$\mathcal{P}_7$: A admet un plus grand élément $\mathcal{P}_8$: A n'admet pas de plus grand élément

♥ 1.11 Donner lorsqu'ils existent, les majorants, les minorants, la borne sup, la borne inf le plus petit élément, le plus grand élément des ensembles suivants :

$$I = \{x \in \mathbb{R}^* \mid -2 < x + \frac{1}{2x} \leq 2\} \quad A = \left\{1 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\} \quad B = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

1.12 a. Soit A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$ telles que $A \subset B$.

Comparer $\sup(A)$, $\sup(B)$, $\inf(A)$ et $\inf(B)$.

b. Soit A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On pose $A + B = \{a + b, a \in A, b \in B\}$.

Montrer que A + B admet une borne supérieure puis que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Valeur absolue, partie entière

1.13 Traduire les inégalités suivantes en termes d'appartenance à un intervalle que l'on représentera sur la droite réelle :

a) $|x - 1| \leq 2$ b) $|x + 1| < \varepsilon$ c) $|x - a| \leq \frac{1}{2}$ d) $|x + 2a| \leq \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ et $a \in \mathbb{R}$.

1.14 Représenter sur la droite réelle les parties de $\mathbb{R}$ suivantes et préciser lesquelles sont des intervalles.

a) $|x + 3| > 2$ b) $|2x + 1| < \varepsilon$ c) $|4x - 2| \geq 4$ d) $|x + 1| + |x - 2| > 5$.

♥ 1.15 Soit $a \in \mathbb{R}$, montrer que $(\forall \varepsilon > 0, |a| \leq \varepsilon) \Rightarrow a = 0$

1.16 Soit x, y deux réels.

Montrer que $\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}$ et $\min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}$

♦ 1.17 Résoudre dans $\mathbb{R}$ $\|x + 2| - |2x - 1|\| = \|x + 1| - |2x - 2|\|$

♥ 1.18 Soit A une partie bornée et non vide de $\mathbb{R}$. On pose $B = \{|x - y|, (x, y) \in A^2\}$.

Justifier que B est bornée puis calculer $\sup(B)$ et $\inf(B)$, sont-ils respectivement les plus grand et plus petit élément de B ?

♦ 1.19 Démontrer les inégalités suivantes, pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$.

a) $|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|$ b) $1 + |xy - 1| \leq (1 + |x - 1|) \times (1 + |y - 1|)$

♥ 1.20 Représenter graphiquement sur $[-2, 2]$ les fonctions suivantes :

$f_1: x \mapsto \lfloor 2x \rfloor$ $f_2: x \mapsto \lfloor x^2 \rfloor$ $f_3: x \mapsto \left\lfloor \frac{x}{2} + 1 \right\rfloor$

♥ 1.21 Soit $x \in \mathbb{R}$, calculer $x \mapsto \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$

1.22 Résoudre dans $\mathbb{R}$ $\lfloor \sqrt{x^2 + 1} \rfloor = 2$

♥ 1.23 Montrer les égalités suivantes où $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

a) $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$ b) $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$

♦ 1.24 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \left\lfloor \left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1} \right)^2 \right\rfloor = 4n + 1$

