

Chapitre 2: Fonctions de la variable réelle - Partie 1

La plupart des résultats de ce chapitre, pour certains vus en Terminale, sont admis provisoirement et démontrés ultérieurement.

1. Généralités sur les fonctions, rappels et compléments:

1.1 Définition, image, antécédent :

Def : Soit D une partie de $\mathbb{R}$, une fonction f de D dans $\mathbb{R}$ associe à chaque réel x de D un unique réel noté $f(x)$ et appelé image de x par f .

On notera: $f: \begin{cases} D \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$

Attention : Pour parler de la fonction on utilise f et pas $f(x)$ qui désigne un réel.

Vocabulaire : D est l'ensemble de définition de f . Il peut être donné avec la définition de f , ou bien on doit le déterminer en cherchant l'ensemble des réels qui ont une image par f .

Propriété 2.1 : Deux fonctions f et g sont égales si et seulement si elles ont le même ensemble de définition D et si $\forall x \in D, f(x) = g(x)$

Notation : On note $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ ou $\mathbb{R}^D$ l'ensemble des fonctions de D dans $\mathbb{R}$.

Def : L'ensemble des images de tous les éléments D par f s'appelle l'image directe de D par f et se note $f(D)$. $f(D) = \{ f(x), x \in D \}$.

Def : Le réel x est un antécédent de y par f lorsque $x \in D$ et $f(x) = y$.

Remarque : Un réel y peut ne pas avoir d'antécédent par f ou en avoir un seul ou encore plusieurs.

Def : Soit D' une partie de D .

• La restriction de f à D' est la fonction g définie par $g: \begin{cases} D' \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$, c'est à dire: g est définie sur D' et $\forall x \in D' g(x) = f(x)$. On note $g \equiv f|_{D'}$.

• On dit que f est un prolongement de g lorsque g est une restriction de f

Exemples :

1.2 Représentation graphique

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Def : La représentation graphique d'une fonction f définie sur D dans le plan repéré est l'ensemble de points défini par: $C_f = \{ M(x, f(x)) \mid x \in D \}$.

L'équation cartésienne de C_f est $y = f(x)$ et $x \in D$

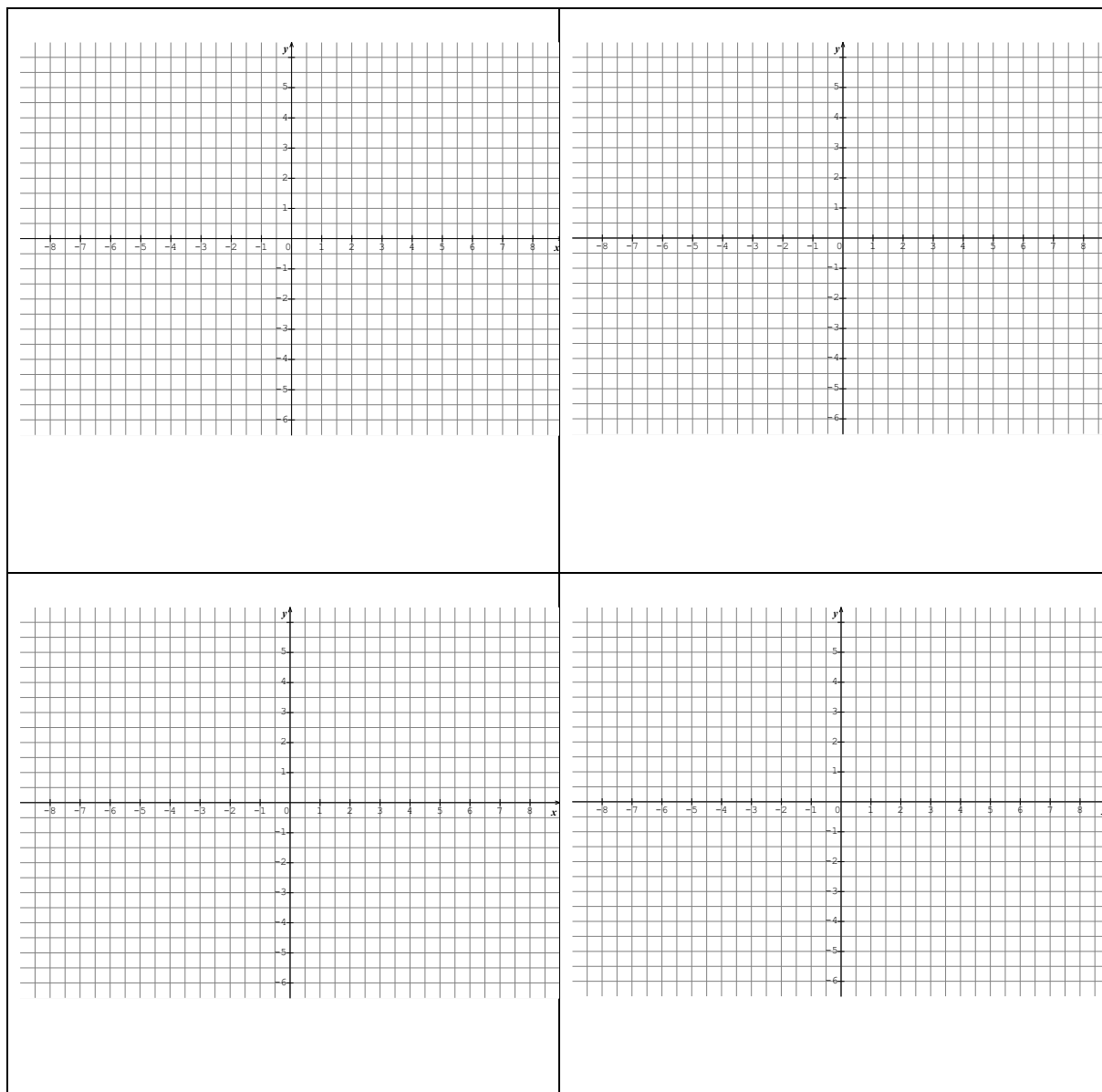
Def : Soit f une fonction définie sur D et a un réel non nul. Les fonctions suivantes sont dites associées à f .

$$f_1 : x \mapsto f(x) + a \quad f_2 : x \mapsto f(x + a) \quad f_3 : x \mapsto af(x) \quad f_4 : x \mapsto f(ax)$$

Propriété 2.2. On note C_f la représentation graphique de f dans le repère

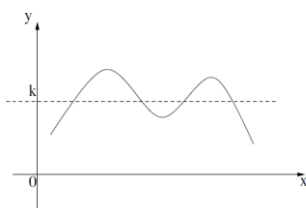
- ① La représentation graphique de f_1 est l'image de C_f par la translation de vecteur $a\vec{j}$
- ② La représentation graphique de f_2 est l'image de C_f par la translation de vecteur $-a\vec{i}$
- ③ La représentation graphique de f_3 s'obtient en multipliant par a les ordonnées des points de C_f .
- ④ La représentation graphique de f_4 s'obtient en divisant par a les abscisses des points de C_f .

Exemples :



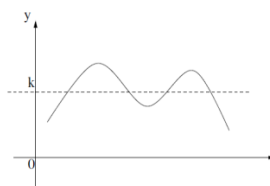
Dans la pratique : Résolution graphique d'équations et d'inéquations

• $f(x) = k$



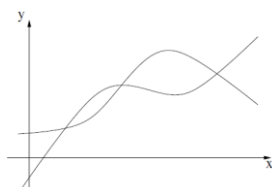
Les solutions sont les abscisses des points de C_f d'ordonnées k .

• $f(x) \leq k$



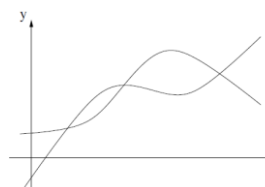
Les solutions sont les abscisses points de C_f situés en dessous de $y = k$.

• $f(x) = g(x)$



Les solutions sont les abscisses des points d'intersection de C_f et de C_g .

• $f(x) \leq g(x)$



Les solutions sont les abscisses des points de C_f situés en dessous de C_g .

Exercice : Donner, suivant la valeur du réel m , le nombre de solution de l'équation $x \ln(x) = m$

1.3 Propriétés globales

Def : Soit f une fonction définie sur D .

• f est paire si $\begin{cases} \forall x \in D, -x \in D \\ \forall x \in D, f(-x) = f(x) \end{cases}$

• f est impaire si $\begin{cases} \forall x \in D, -x \in D \\ \forall x \in D, f(-x) = -f(x) \end{cases}$

Interprétation graphique : Dans un repère orthogonal, on a :

- ★ La courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe (Oy)
- ★ La courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.

Dans la pratique : On pourra limiter l'étude de f à $D \cap \mathbb{R}^+$ et compléter par symétrie.

Exemples au dos

Def : Soit T un réel, $T \neq 0$, on dit que $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est T -périodique si et seulement si pour tout $x \in D$, on a $(x + T) \in D$ et $f(x + T) = f(x)$.

Interprétation graphique : La courbe représentative d'une fonction f T -périodique est invariante par les translations de vecteurs $kT \vec{i}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Dans la pratique : T désigne en général la plus petite période strictement positive et on pourra limiter l'étude de f à un intervalle de D de longueur T , le reste se déduisant par des translations de vecteurs $kT \vec{i}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exemples à connaître :

★ $\cos$ et $\sin$ sont 2π -périodiques et plus généralement, $t \mapsto A \cos(\omega t + \varphi)$ et $t \mapsto A \sin(\omega t + \varphi)$ sont périodiques de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$

★ $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ est périodique de période 1.

☞ Démonstrations :

Def : Soit f une fonction définie sur D , m et M deux réels.

- f est majorée par M ou M est un majorant de f lorsque toutes les valeurs de $f(x)$ sont inférieures à M .

☞ Symboliquement $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est majorée $\Leftrightarrow$

.

- f est minorée par m ou m est un minorant de f lorsque toutes les valeurs de $f(x)$ sont supérieures à m .

☞ Symboliquement $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est minorée $\Leftrightarrow$

- f est bornée lorsqu'elle est majorée et minorée.

☞ Symboliquement $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est bornée $\Leftrightarrow$

- f admet un maximum en $a \in D$ ssi $\forall x \in D, f(x) \leq f(a)$

☞ Symboliquement $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ admet un maximum $\Leftrightarrow$

- f admet un minimum en $a \in D$ ssi $\forall x \in D, f(x) \geq f(a)$

☞ Symboliquement $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ admet un minimum $\Leftrightarrow$

- Un extremum de f est un minimum ou un maximum de f .

Proposition 2.3 : Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

① f est bornée si et seulement si $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+, \forall x \in D, |f(x)| \leq \alpha$

② f est majorée (resp minorée) si et seulement si $f(D)$ est majorée.

Dans ce cas $f(D)$ admet une borne sup (respectivement une borne inf) qui n'est pas nécessairement atteinte par f . On la note $\sup_D f$ (resp. $\inf_D f$)

③ f admet un maximum, (resp. un minimum) si et seulement si $f(D)$ admet un plus grand élément (resp. plus petit élément). Dans ce cas on note $\max_D f$ le maximum de f (resp $\min_D f$ le minimum)

☞ Preuve de ①:

Def : Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ où D est un intervalle de $\mathbb{R}$.

- f est croissante sur D lorsque f conserve l'ordre.

Symboliquement : **f est croissante sur $D \Leftrightarrow$**

- f est décroissante sur D lorsque f renverse l'ordre.

Symboliquement : **f est décroissante sur $D \Leftrightarrow$**

- Lorsque les implications précédentes restent vraies avec des inégalités strictes on dit que f est strictement croissante ou strictement décroissante sur D .
- f est (strictement) monotone lorsque f est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante sur D .

1.4 Opérations sur les fonctions

a. Opération algébriques

Def : Soit f et g deux fonctions définies sur la même partie D de $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

- La fonction λf est définie sur D par $\forall x \in D, (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.
- la fonction $|f|$ est définie sur D par $\forall x \in D, |f|(x) = |f(x)|$
- La somme $f + g$ est définie sur D par $\forall x \in D, (f + g)(x) = f(x) + g(x)$.
- Le produit $f \times g$ est défini sur D par $\forall x \in D, (f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$.
- Lorsque $\forall x \in D, g(x) \neq 0$, le quotient f/g est défini sur D par $\forall x \in D, (f/g)(x) = f(x)/g(x)$

Proposition 2.4 : Soit f et g monotones sur I et $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

- ① λf est monotone sur I de même monotonie que f si $\lambda > 0$, de monotonie contraire si $\lambda < 0$.
- ② Si f et g sont croissantes (resp. décroissantes) sur I alors $(f + g)$ est croissante (resp. décroissante) sur I .
- ③ f est bornée sur D si et seulement si $|f|$ est majorée sur D .

✎ Démonstration :

b. Composition

Def : Soit f et g sont deux fonctions définies respectivement sur des domaines D et D' .

Si $f(D) \subset D'$ (on dit que f est à valeurs dans D'), alors on peut définir la **composée** $h = g \circ f$ sur D par

$$\forall x \in D, h(x) = g(f(x)).$$

On a donc $g \circ f : x \mapsto g(f(x))$ ou encore $g \circ f : x \mapsto f(x) \mapsto g(f(x))$

⚠ Dans la pratique : Pour déterminer l'ensemble de définition de $g \circ f$, il faut déterminer les réels x de D tels que $f(x)$ appartiennent à D' , c'est à dire $\{ x \in D \mid f(x) \in D' \}$

⚠ Exemples :

Propriétés 2.5 Composition de deux fonctions monotones:

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}, g : J \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$

- ① Si f et g sont monotones de même sens alors $g \circ f$ est croissante sur I .
- ② Si f et g sont monotones de sens contraires alors $g \circ f$ est décroissante sur I .

✎ Démonstration et exercice 2.6:

1.5 Propriétés asymptotiques

Def : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

• Si a est une borne de I et si $\lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) = \pm\infty$ alors la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}_f$.

• Si $+\infty$ est une borne de I et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ alors la droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$. (Idem en $-\infty$)

• Si $+\infty$ est une borne de I , la droite d'équation $y = mx + p$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + p)] = 0$. (Idem en $-\infty$)

• Plus généralement, si $+\infty$ est une borne de I et g est une fonction définie sur I , de courbe représentative $\mathcal{C}_g$, on dit que $\mathcal{C}_g$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ lorsque

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = 0. \text{ (Idem en } -\infty \text{)}$$

Vocabulaire : Si $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont asymptotes quand x tend vers $+\infty$, la position relative des deux courbes est donnée par le signe de $f(x) - g(x)$ au voisinage de $+\infty$. (Idem en $-\infty$)

Dans la pratique : Lorsque $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, on dit que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une branche infinie

pour la déterminer on étudie la limite de $\frac{f(x)}{x}$ en $\pm\infty$ et on applique l'algorithme de recherche suivant :

★ Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ on conclut que $\mathcal{C}_f$ possède une branche parabolique de direction (Oy).

★ Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, on conclut que $\mathcal{C}_f$ possède une branche parabolique de direction (Ox).

★ Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m, m \in \mathbb{R}^*$, on étudie la limite de $f(x) - mx$ en $\pm\infty$.

* Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] = p, p \in \mathbb{R}$, alors on conclut que la droite d'équation $y = mx + p$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$.

* Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] = \pm\infty$ alors on conclut que $\mathcal{C}_f$ possède une branche parabolique de direction asymptotique $y = mx$.

* Si $f(x) - mx$ n'admet pas de limite en $\pm\infty$, on conclut qu'il n'y a ni branche parabolique, ni asymptote.

★ Si $\frac{f(x)}{x}$ n'admet pas de limite en $\pm\infty$, on conclut qu'il n'y a ni branche parabolique, ni asymptote.

🔗 Exercice 2.21

Chapitre 2: Fonctions de la variable réelle - Partie 2

2. Régularité d'une fonction

Les propositions et théorèmes de ce paragraphe sont admis provisoirement

2.1 Continuité:

Déf: Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a un réel appartenant à I .

- On dit que f est continue en a , lorsque $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
- On dit que f est continue sur I lorsque f est continue en tout point de I .

Interprétation graphique : On peut tracer la représentation d'une fonction continue sur I sans lever son crayon.

Exemples: $x \mapsto x^n$, $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $\cos$, $\sin$, $\exp$ et $\ln$ sont continues sur tout intervalle où elles sont définies.

Contre-exemple: La fonction partie entière.

✎ Dans la pratique: **Comment démontrer la continuité sur un intervalle?**

- ★ **SI** f est dérivable sur I **ALORS** f est continue sur I (voir plus loin)
- ★ Dans les cas plus complexes, on revient à la définition.

✎ Exemple : On considère la fonction $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.

Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$, calculer $f(x + 1)$, donner la représentation graphique de f et enfin montrer que f est continue en tout entier n , puis sur $\mathbb{R}$.

Théorème 2.1 : Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f continue sur un intervalle I , et a et $b \in I$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c , compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

ou encore

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution.

ou encore

Tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, admet, au moins, un antécédent par f .

Illustration:

Applications: Justifier les affirmations suivantes :

- ★ Toute fonction continue sur $\mathbb{R}$ qui change de signe s'annule au moins une fois..
- ★ Toute fonction continue sur $\mathbb{R}$, qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, garde un signe constant.
- ★ L'équation $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, admet au moins une solution réelle.

Preuve :

2.2. Dérivabilité

a. Dérivabilité et interprétation géométrique

Déf: Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a un réel appartenant à I .

- On appelle taux d'accroissement, ou taux de variation, de f en a le quotient :

$$\tau_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

- On dit que f est dérivable en a , lorsque $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe et est finie.

Cette limite est appelée nombre dérivé de f en a et est notée $f'(a)$.

Illustration graphique :

Exercices:

- Soit a un réel fixé, en utilisant la définition, montrer que la dérivée de $f : x \mapsto x^2$ en a est $2a$
- Déterminer la limite en 0 de la fonction $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$

Proposition 2.6 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a un réel de I .
 Si f est dérivable en a , alors C_f admet au point d'abscisse a une tangente de coefficient directeur (ou pente) $f'(a)$. L'équation réduite de la tangente au point $A(a, f(a))$ à la courbe C_f est:
 $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Remarques :

- ★ Lorsque $f'(a) = 0$, la courbe C_f admet une tangente horizontale au point d'abscisse a .
- ★ Si f n'est pas dérivable en a mais continue en a avec $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$ alors C_f admet une tangente verticale au point d'abscisse a .
- ★ Si le taux d'accroissement admet une limite ℓ à droite ou à gauche de a alors on dit que f est dérivable à droite ou à gauche de a et C_f admet une demi-tangente de pente ℓ au point d'abscisse a . Si une courbe admet deux demi-tangentes différentes au point d'abscisse a , on dit que le point $A(a, f(a))$ est un point anguleux.

Exercices

- a) Etudier la dérivabilité en 0 de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$. Interprétation graphique.
- b) Etudier la dérivabilité en 0 de la fonction $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$. Interprétation graphique.

b. Dérivabilité et interprétation numérique

Soit f dérivable en a , pour x proche de a , on a :

$$f(x) \approx f'(a)(x-a) + f(a)$$

approximation affine de f en a

Applications en physique/chimie/SI: Pour x proche de 0

$$\sin x \approx x \quad (1+x)^n \approx 1+nx \quad \sqrt{1+x} \approx 1+\frac{1}{2}x$$

Preuve :

Proposition 2.7 : Si une fonction est dérivable en a , alors elle est continue en a .

⚡ Attention: La réciproque est fausse.

Contre-exemples:

c. Dérivabilité sur un intervalle et fonction dérivée

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I

- On dit que f est dérivable sur I , ssi f est dérivable en tout point de I .
- Si f est dérivable sur I alors la fonction f' qui à tout réel a de I associe $f'(a)$ est la fonction dérivée de f notée f' .

Corollaire de la proposition 2.7: Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I

Exercice : Montrer que la fonction racine carrée est dérivable sur $]0, +\infty[$ et donner sa dérivée.

Proposition 2.8 : Dérivabilité et opérations algébriques

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I et λ un réel

- ① (λf) est dérivable sur I de dérivée $(\lambda f)'$.
- ② $(f + g)$ est dérivable sur I de dérivée $(f' + g')$.
- ③ $(f \times g)$ est dérivable sur I de dérivée $f' \times g + f \times g'$
- ④ Si g ne s'annule pas sur I , $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I de dérivée $\frac{f'g - g'f}{g^2}$

Théorème 2.2 : Dérivabilité et composition

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I intervalle de $\mathbb{R}$ et $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur J intervalle de $\mathbb{R}$ avec $f(I) \subseteq J$, la fonction $\text{gof}: I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur l'intervalle I et $(\text{gof})' = f' \times (g' \circ f)$.
ou encore $\forall x \in I, (\text{gof})'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$

Application : On retrouve les formules vues en Terminale et on montre que si u est dérivable sur I et ne s'annule pas sur I alors $\ln|u|$ est dérivable sur I avec $(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$.

Voir Formulaire de révision

Exercice 2.15

Dans la pratique: **Comment démontrer la dérivabilité sur un intervalle?**

★ On pourra écrire: f est dérivable sur I comme somme, produit, quotient, composée de...en précisant les intervalles en jeu ou dans les cas les plus simples : f est dérivable sur I d'après les théorèmes généraux

★ Dans les cas plus complexes, on revient à la définition, en particulier si l'ensemble de définition comporte des singularités.

Def : Soit f définie sur I , on dit que **f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I** si f est dérivable sur I et si f' est continue sur I .

Exercice 2.14**d. Variations et signe de la dérivée:**

Théorème 2.3 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- ① f est constante sur I si et seulement si pour tout x de I , $f'(x) = 0$.
- ② f est croissante sur I si et seulement si pour tout x de I , $f'(x) \geq 0$.
- ③ f est décroissante sur I si et seulement si pour tout x de I , $f'(x) \leq 0$
- ④ f est strictement croissante sur I si et seulement si pour tout x de I , $f'(x) \geq 0$ et ne s'annule éventuellement qu'en des points isolés.
- ⑤ f est strictement décroissante sur I si et seulement si pour tout x de I , $f'(x) \leq 0$ et ne s'annule éventuellement qu'en des points isolés.

Exemples : Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x + \sin x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

e. Extremum et dérivée

Proposition 2.9 : Soit I un intervalle ouvert, f dérivable sur I et $a \in I$.

Si f admet un maximum ou un minimum en a alors $f'(a) = 0$.

Le cas de $f : x \mapsto x^3$ dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(0) = 0$ montre que la réciproque est fausse.

Dans la pratique : Les extrema éventuels de f sont à chercher là où la dérivée de f s'annule, là où f n'est pas dérivable et aux bornes de I .

f. Dérivées successives

Si f est dérivable sur I avec f' dérivable sur I , alors f est deux fois dérivable sur I et on note f'' la dérivée de f' . Tant que les dérivées obtenues sont dérivables, on peut ainsi dériver successivement. On obtient ainsi $f'', f^{(3)}, \dots, f^{(n)}$ dérivée nième de f sur I .

Lorsqu'elle existe, $f^{(n+1)}$ est la dérivée de $f^{(n)}$.

Dans la pratique :

- Si le signe de $f'(x)$ est difficile à étudier et si f' est dérivable alors on peut calculer f'' . Le signe de $f''(x)$ donne les variations de f' et éventuellement le signe de $f'(x)$.
- Si f est deux fois dérivable sur I alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .

Exercice : Comparer $f(x) = e^x$ et $g(x) = \frac{x^2}{2} + x + 1$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Chapitre 2: Fonctions de la variable réelle - Partie 3

3. Convexité

Def : Soit f une fonction définie sur I un intervalle de $\mathbb{R}$ et C_f sa courbe représentative.

- On dit que f est convexe sur I lorsque la courbe C_f est située en dessous de chacune de ses cordes.
- On dit que f est concave sur I lorsque la courbe C_f est située au-dessus de chacune de ses cordes.

 Illustration graphique:

Proposition 2.10 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I

① Si f est dérivable sur I , on a les équivalences suivantes :

f est convexe sur $I \Leftrightarrow C_f$ est située au-dessus de chacune de ses tangentes

f est concave sur $I \Leftrightarrow C_f$ est située en-dessous de chacune de ses tangentes

② Si f est deux fois dérivable sur I , on a les équivalences suivantes :

f est convexe sur $I \Leftrightarrow \forall x \in I, f''(x) \geq 0$

f est concave sur $I \Leftrightarrow \forall x \in I, f''(x) \leq 0$

 Exemples :

4. Fonction bijective, bijection réciproque :

Déf: On appelle identité de I et on note Id_I la fonction définie sur I par : $\forall x \in I, f(x) = x$

4.1 Notion de bijection:

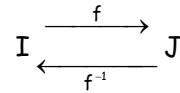
Déf: Soit I et J deux parties de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow J$

- On dit que f est (ou réalise) une bijection de I sur J lorsque tout réel y de J admet un unique antécédent x dans I ou encore lorsque $\forall y \in J, \exists ! x \in I, y = f(x)$.
- On définit alors la bijection réciproque de f notée $f^{-1} : J \rightarrow I$ qui à tout élément y de J associe son unique antécédent par f .

Remarques et vocabulaire:

★ On dit aussi que $f : I \rightarrow J$ est une fonction bijective.

★ f^{-1} est une bijection de J sur I et sa bijection réciproque est f .



Exemples :

Propriétés immédiates: Soit f une bijection de I sur J et f^{-1} sa bijection réciproque.

① $\forall x \in I, f^{-1}(f(x)) = x$ ou encore $f^{-1} \circ f = \text{Id}_I$

② $\forall y \in J, f(f^{-1}(y)) = y$ ou encore $f \circ f^{-1} = \text{Id}_J$

③ $\forall x \in I, \forall y \in J, y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

④ Dans un repère orthonormal, les courbes représentatives de f et de f^{-1} sont images l'une de l'autre par la symétrie orthogonale par rapport à la première bissectrice $y = x$.

Théorème 2.4 : Théorème de la bijection.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si f est continue et strictement monotone sur I alors $f(I)$ est un intervalle et f réalise une bijection de I dans $f(I)$.

Dans la pratique: l'intervalle $f(I)$ s'obtient en calculant les limites aux bornes de I , on s'appuie le plus souvent sur le tableau de variations de f .

Exercice : Montrer que la fonction f définie par $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = xe^x$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans un intervalle à déterminer.

Théorème 2.5 : Continuité et monotonie de f^{-1}

Si f est continue et strictement monotone sur I alors f est bijective de I sur $f(I)$ et f^{-1} est continue, strictement monotone de même monotonie que f sur $f(I)$.

Théorème 2.6 : Théorème de dérivation de f^{-1} (admis provisoirement)

Soit f une bijection de I sur J , $a \in I$ et $b = f(a)$

Si f est dérivable en a avec $f'(a) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en b et $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$

Interprétation géométrique: Soit f bijective et dérivable en a . On note C sa courbe représentative et Γ celle de sa bijection réciproque.

On a deux cas possibles.

- $f'(a) \neq 0$. C admet au point a une tangente non horizontale de pente $f'(a)$ et Γ admet au point $b = f(a)$ une tangente de pente $\frac{1}{f'(a)}$. Ces droites sont symétriques par rapport à $(y = x)$

- $f'(a) = 0$, C admet au point a une tangente horizontale de pente nulle et, par symétrie d'axe $y = x$, Γ admet au point $b = f(a)$ une tangente verticale. f^{-1} n'est donc pas dérivable en $b = f(a)$.

Illustration graphique

Corollaire : Si f une bijection de I sur J telle que f est dérivable sur I avec $\forall x \in I, f'(x) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable sur J et

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Justification de la formule de dérivation et exemple