

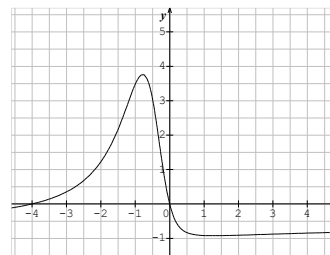
Exercices-Chapitre 2: Généralités sur les fonctions

♦ Exercice corrigé - ♥ A savoir refaire

Fonctions associées

♦ 2.1 a) Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont on donne la courbe représentative ci-contre.

Parmi les six courbes représentatives ci-dessous, identifier celle de :



$$f_1: x \mapsto f(-x)$$

$$f_2: x \mapsto f\left(\frac{x}{3}\right)$$

$$f_3: x \mapsto -f(x)$$

$$f_4: x \mapsto f(x-1)$$

$$f_5: x \mapsto f(2-x)$$

$$f_6: x \mapsto \frac{1}{2}f(x)$$

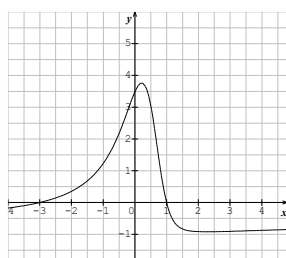


Figure 1

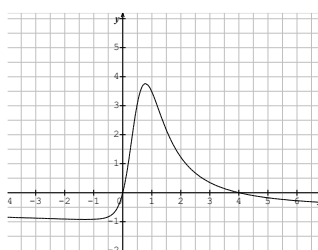


Figure 2

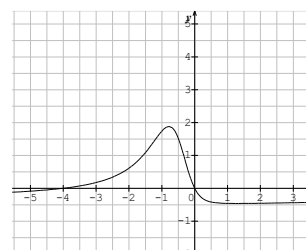


Figure 3

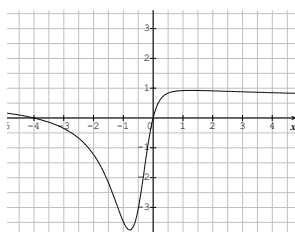


Figure 4

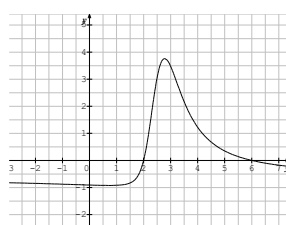


Figure 5

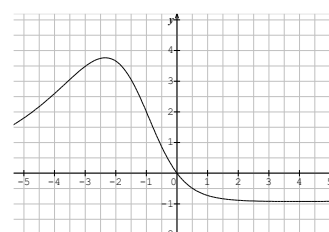


Figure 6

b) Représenter graphiquement sur $[-2, 2]$ les fonctions suivantes :

$$f_1: x \mapsto \lfloor 2x \rfloor$$

$$f_2: x \mapsto \lfloor x^2 \rfloor$$

$$f_3: x \mapsto \left\lfloor \frac{x}{2} + 1 \right\rfloor$$

Propriétés globales

♥ 2.2 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, écrire symboliquement les propositions suivantes ainsi que leur négation :

a) f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$

c) f admet un maximum en 2

e) f est 2π -périodique.

g) f est minorée

b) 2026 a un unique antécédent par f

d) f admet une parité

f) f est de signe constant.

h) $\sup f = 3$

2.3 Montrer que les fonctions suivantes sont bornées sur $\mathbb{R}$, sans utiliser leurs variations :

$$f : x \mapsto \frac{x - \lfloor x \rfloor}{1 + x^2} \quad g : x \mapsto \frac{\sin(x)}{3 + \cos(x)} \quad h : x \mapsto 2e^{-x^2} + 1$$

2.4 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, 2 - périodique et telle que $\forall x \in]0;1]$, $f(x) = 1 - x$.

a. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormal sachant que f est continue et paire.

b. Même question avec comme seule hypothèse : f est impaire.

♥ **2.5** Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$

Indication : Etudier la périodicité de $f : x \mapsto \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor$

♥ **2.6** On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

a. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$ et étudier sa parité.

b. Donner les variations de f sur $\mathbb{R}$ sans calcul de dérivée.

c. Justifier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$, calculer $f'(x)$ et retrouver le résultat précédent.

2.7 Trouver toutes les fonctions périodiques et monotones sur $\mathbb{R}$.

♥ **2.8** Déterminer, s'ils existent, $\sup_I f, \inf_I f, \max_I f, \min_I f$ dans les cas suivants:

- a. $f(x) = x^2$ sur $I =]-2, 1]$ b. $f(x) = \lfloor x \rfloor$ sur $I = [-1, 2[$ c. $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ sur $\mathbb{R}$
d. $f(x) = xe^{-x^2} - 1$ sur $I = \mathbb{R}_+$

2.9 Soit $n \in \mathbb{N}$, étudier l'existence et donner la valeur de $\sup_{x \in [0,1]} x^n(1-x)$

♦ **2.10 Parité et opérations**

- a. Que peut-on dire de la somme de deux fonctions, définies sur $\mathbb{R}$, paires ou impaires ?
b. Que peut-on dire du produit de deux fonctions, définies sur $\mathbb{R}$, paires ou impaires ?
c. Que peut-on dire de la composée de deux fonctions, définies sur $\mathbb{R}$, paires ou impaires ?

2.11 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction strictement croissante. Montrer l'équivalence entre les propositions $\mathcal{P} : \forall x \in \mathbb{R}, f \circ f(x) = x$ et $\mathcal{Q} : \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x$

♦ **2.12** Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f \circ f$ est croissante et $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante.

- a. Justifier que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x) \leq f(y) \Rightarrow y \leq x$.
b. En déduire le sens de variation de f .

Continuité et dérivabilité

♥ **2.13** Soit $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$

- a. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) = f(x) + 1$ et en déduire la représentation graphique de f .
b. Soit $n \in \mathbb{Z}$, montrer que f est continue en n . f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
c. Etudier la dérivabilité de f en n .

♥ **2.14** Soit f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$

- a. Démontrer que f est continue sur son ensemble de définition
b. Etudier la dérivabilité de f et calculer $f'(x)$

c. f est-elle de classe C^1 ?

Mêmes questions pour g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$

♥ 2.15 Montrer que f est dérivable sur D puis calculer la dérivée

a. $f(x) = 2\cos(3x + \frac{\pi}{4})$ et $D = \mathbb{R}$

b. $f(x) = \sin\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$ et $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

c. $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 4}$ et $D = \mathbb{R}$

d. $f(x) = \ln(x^2 - 2x - 3)$ et $D =]-\infty; -1[\cup]3; \infty[$

e. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ et $D = \mathbb{R}^*$

f. $f(x) = \ln|2x - 1|$ et $D = \mathbb{R} \setminus \{1/2\}$

♦ 2.16 Déterminer le domaine de dérivabilité et la dérivée des fonctions suivantes :

$f: x \mapsto \sqrt{\frac{2-x}{1+x^2}}$

$g: x \mapsto \ln(x - \sqrt{x^2 + 1})$

$h: x \mapsto \ln(\ln x)$

$u: t \mapsto \sin^2(2t + 1)$

$v: t \mapsto \frac{\sin 2t}{\cos 3t}$

$w: t \mapsto \sqrt{|\ln t|}$

$\varphi: x \mapsto \ln|x^2 - 6x + 5|$

$\phi: x \mapsto e^{\sin\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}$

$\psi: x \mapsto x^2 \ln(x^3 + x)$

♥ 2.17 Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

a. Que dire de f' si f est paire ?

b. Que dire de f' si f est impaire ?

♥ 2.18 Soit f une fonction dérivable sur $I =]-1, 1[$.

Donner le domaine de dérivabilité puis la dérivée des fonctions suivantes :

$g: t \mapsto f(2t + 1)$

$h: t \mapsto f(t^2)$

$\varphi: t \mapsto f\left(\frac{1}{t}\right)$

♥ 2.19 Soit f définie par $f(x) = \sqrt{x^3(2-x)}$. Déterminer le domaine de définition D de f et les tangentes à la courbe représentative de f aux bornes de D .

♥ 2.20 Soit f définie $I =]-1, +\infty[$ par $f(x) = \ln(x + 1)$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f est n fois dérivable sur I et expliciter $f^{(n)}(x)$.

2.21 Représenter graphiquement les fonctions suivantes en précisant la nature des branches infinies et les tangentes remarquables.

a) $f: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x^2 + x + 1} \end{cases}$

b) $g: \begin{cases}]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x + \ln(x) \end{cases}$

c) $h: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x^2 + 2x}{|x - 1| + x} \end{cases}$

Bijections

♥ 2.22 Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

a. Justifier que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser.

b. Expliciter la bijection réciproque.

♦ 2.23 Soit f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $\forall x \neq 2, f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$

- Justifier que f réalise une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ sur un intervalle J à préciser.
- Expliciter la bijection réciproque.

♥ 2.24. Soit $f : I \rightarrow J$ une bijection.

- f peut-elle être paire ?
- On suppose que f est impaire, montrer que f^{-1} est impaire.

2.25 f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\forall x > 0, f(x) = x^2 + \ln x$.

- Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur un ensemble J à déterminer.
- Montrer que f^{-1} est dérivable sur J et exprimer sa dérivée en fonction de f^{-1} .
On ne demande pas ici d'explicitier f^{-1} .
- Donner le tableau de variations de f^{-1} .
- Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f^{-1} au point d'abscisse 1.
- Donner l'allure des courbes représentatives des deux fonctions dans un RON.

Etude de fonctions

♦ 2.26 Etudier les fonctions $f(x) = x \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ et $g(x) = x + \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$

Chercher

2.27 Soit f une fonction croissante de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$.

On considère l'ensemble $\mathcal{E} = \{ x \in [0, 1], x \leq f(x) \}$.

- Justifier que $\mathcal{E}$ est non vide puis que $\mathcal{E}$ admet une borne supérieure $x_0 \in [0, 1]$.
- Démontrer que $f(x_0) = x_0$.

Ind. on raisonnera deux fois par l'absurde en supposant $f(x_0) < x_0$ puis $f(x_0) > x_0$.

2.28 a. Soit t fixé dans $\mathbb{R}$, justifier l'existence de $\inf_{x \in \mathbb{R}} |x^2 + tx + 1|$ puis la calculer en fonction des valeurs de t . On pourra s'appuyer sur une représentation graphique de $f_t : x \mapsto x^2 + tx + 1$

b. Justifier l'existence et donner la valeur de $\sup_{t \in \mathbb{R}} \left(\inf_{x \in \mathbb{R}} |x^2 + tx + 1| \right)$.

c. Etudier l'existence de $\inf_{x \in \mathbb{R}} \left(\sup_{t \in \mathbb{R}} |x^2 + tx + 1| \right)$.

