

Les différents type de raisonnements_Fiche_TD

① Le raisonnement direct:

On part des hypothèses de l'exercice, on applique des règles connues, et on aboutit à la propriété demandée. La règle élémentaire qui autorise chaque pas s'appelle le modus ponens: si $\mathcal{P}$ est vraie et si $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est vraie (règle connue), alors $\mathcal{Q}$ est vraie.

C'est le raisonnement le plus fréquemment utilisé, en particulier pour montrer une implication.

② Le raisonnement par l'absurde.

Pour démontrer qu'une proposition $\mathcal{P}$ est vraie par l'absurde, on suppose que $\mathcal{P}$ est fausse, puis on raisonne jusqu'à obtenir une contradiction : une proposition et sa négation, ou un résultat connu comme faux. L'hypothèse de départ ne pouvant pas être vraie, $\mathcal{P}$ est vraie.

Exercice 1: Il n'existe pas de plus petit rationnel positif

③ Le raisonnement pas disjonction des cas

Pour démontrer une proposition, on répartit les situations possibles en un nombre fini de cas qui couvrent **toutes les éventualités**, puis on démontre la proposition séparément pour chacun des cas. La conclusion étant obtenue dans tous les cas, elle est vraie.

Exercice 2: Montrer pour tout réel x , $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor$

④ Le raisonnement par récurrence

Il permet de montrer qu'un prédicat $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout **entier naturel** n , $n \geq n_0$.

On montre les deux étapes suivantes

- Initialisation : $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie
- Hérédité : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, (\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1))$

On conclut que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$.

Exercice 3: Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$, a-t-on, $n^2 \leq 2^n$

⑤ Le raisonnement pas analyse synthèse

Le raisonnement par analyse-synthèse sert à déterminer tous les éléments d'un ensemble E vérifiant une propriété $\mathcal{P}$. Il se mène en deux temps :

- Analyse. On suppose que le problème admet une solution : on écrit soit $x \in E$ vérifiant $\mathcal{P}$. On en tire des conditions nécessaires, jusqu'à obtenir une liste réduite de candidats pour x . On a montré que si $x \in E$ vérifie $\mathcal{P}$ alors x appartient à un ensemble de solutions POSSIBLES.
- Synthèse. On reprend chaque candidat de l'analyse et on vérifie s'il satisfait effectivement la propriété $\mathcal{P}$. On cherche donc si les candidats obtenus dans l'analyse sont EFFECTIVEMENT solutions du problème.

Les solutions possibles de l'analyse qui sont validées dans la synthèse sont les solutions du problème

Exercice 4 : Le but de cet exercice est de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\lfloor 2x + 3 \rfloor = \lfloor x + 2 \rfloor$ ($\mathcal{E}$)

a. **Analyse** : On suppose que x est une solution de ($\mathcal{E}$). Montrer que $x \in]-2 ; 0[$

b. **Synthèse** : Soit $x \in]-2 ; 0[$, x est-il une solution de ($\mathcal{E}$) ?