

Chapitre 4: Nombres complexes et applications – Partie 1

1. L'ensemble des nombres complexes

1.1 Présentation:

On admet qu'il existe un ensemble possédant les propriétés suivantes:

★ Cet ensemble contient $\mathbb{R}$ et on peut y prolonger les opérations usuelles en conservant leurs propriétés.

★ Cet ensemble contient un élément noté i vérifiant $i^2 = -1$.

Déf: Cet ensemble est $\mathbb{C} = \{x + iy, x \text{ et } y \text{ réels}\}$. et ces éléments sont appelés nombres complexes. Soit $z \in \mathbb{C}$, z s'écrit de manière unique sous la forme $z = x + iy$, avec x et y réels. cette écriture est la **forme algébrique** de z .

Vocabulaire: Soit $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

★ x est la partie réelle de z , on note $x = \operatorname{Re}(z)$

★ y est la partie imaginaire de z , on note $y = \operatorname{Im}(z)$

Propriétés immédiates: Pour tous réels a et b et tout complexe z :

$$\textcircled{1} \quad x + iy = x' + iy' \Leftrightarrow x = x' \text{ et } y = y'$$

$$\textcircled{2} \quad z = z' \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z') \text{ et } \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z')$$

$$\textcircled{3} \quad z = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0 \text{ et } \operatorname{Im}(z) = 0.$$

Interprétation géométrique: On se place dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, qu'on qualifie alors de plan complexe.

A tout nombre complexe $z = x + iy$ on peut associer:

★ le point M de coordonnées (x, y)

★ le vecteur $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$

z est appelé affixe de M ou de $\vec{w}$ selon le cas.

Déf: Un imaginaire pur est un nombre complexe dont la partie réelle est nulle.

L'ensemble des imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$.

$$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0 \text{ ou encore } i\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) = 0\}$$

Interprétation géométrique: Soit $M(z)$ le point d'affixe z dans le plan complexe.

$$\star \quad z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow M(z) \in (Ox)$$

$$\star \quad z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow M(z) \in (Oy)$$

0 est à la fois réel et imaginaire pur et c'est le seul. Ainsi, $\mathbb{R} \cap i\mathbb{R} = \{0\}$

1.2 Addition et multiplication dans $\mathbb{C}$

Déf: Soit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux nombres complexes.

La somme de z et de z' est $z + z' = (x + x') + i(y + y')$

Propriétés de l'addition dans $\mathbb{C}$:

$\textcircled{1}$ L'addition dans $\mathbb{C}$ a les mêmes propriétés que l'addition dans $\mathbb{R}$

$$\textcircled{2} \quad \forall z, z' \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z + z') = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(z') \text{ et } \operatorname{Im}(z + z') = \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(z')$$

$\textcircled{3}$ Tout nombre complexe $z = x + iy$ possède un opposé noté $-z$ et $-z = -x - iy$

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(-z) = -\operatorname{Re}(z) \text{ et } \operatorname{Im}(-z) = -\operatorname{Im}(z)$$

Déf: la différence $z - z'$ est la somme $z + (-z')$.

Déf: Soit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux nombres complexes.

Le produit de z et de z' est $zz' = (x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$

Propriétés de la multiplication dans $\mathbb{C}$

- ① La multiplication dans $\mathbb{C}$ a les mêmes propriétés que la multiplication dans $\mathbb{R}$.
- ② Tout nombre complexe non nul possède un inverse.
- ③ $\times$ est distributive sur $+$: Pour tout z, z' et z'' dans $\mathbb{C}$, $z(z' + z'') = zz' + zz''$.
- ④ $zz' = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $z' = 0$

Déf: Soit z et z' deux nombres complexes et n un entier naturel:

- Si $z' \neq 0$, le quotient $\frac{z}{z'}$ est défini par $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$
- $z^0 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, z^{n+1} = z \times z^n$ et si $z \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}, z^{-n} = \frac{1}{z^n}$

A retenir: $i^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 4k \\ i & \text{si } n = 4k+1 \\ -1 & \text{si } n = 4k+2 \\ -i & \text{si } n = 4k+3 \end{cases} \text{ où } k \in \mathbb{N}.$

Proposition 4.1:

- ① **Egalité de Bernoulli** : $\forall a, b \in \mathbb{C}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^{n-2}b^{n-2} + b^{n-1}) = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$$

- ② **Somme géométrique :** $\forall z \in \mathbb{C}, z \neq 1, (1 + z + z^2 + \dots + z^n) = \sum_{k=0}^n z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$

⚡ Attention: Il n'est pas possible de définir dans $\mathbb{C}$ une relation d'ordre qui soit compatible avec les opérations usuelles. Dans la suite **on considère $\mathbb{C}$ comme non ordonné** et on utilise le signe $\leq$ uniquement entre deux réels.

2. Conjugaison

Déf: Soit z un nombre complexe, le conjugué de z est le nombre complexe $\bar{z} = \text{Re}(z) - i\text{Im}(z)$

Interprétation géométrique: $M'(\bar{z})$ est le symétrique de $M(z)$ par rapport à (Ox) .

Propriétés de la conjugaison: Pour tout z et z' dans $\mathbb{C}$,

- ① $\overline{\bar{z}} = z$
- ② $\overline{\bar{z} + \bar{z}'} = \overline{z + z'}$
- ③ $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$ et par récurrence immédiate: $\overline{z^n} = \bar{z}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- ④ Avec $z \neq 0$, $zz^{-1} = 1$ donne $\frac{\bar{1}}{\bar{z}} = \frac{1}{z}$, puis $\overline{z^{-n}} = \bar{z}^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
- ⑤ $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$
 $z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$
- ⑥ $z\bar{z} = \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2 = x^2 + y^2$ si $z = x + iy$
- ⑦ $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$
 $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\bar{z}$

Dans la pratique:

- ★ Le point ⑥ permet de calculer les quotients : on multiplie et on divise par le conjugué du dénominateur.
- ★ Le point ⑦ permet de caractériser les réels et les imaginaires purs.

3. Module

3.1 Module d'un nombre complexe.

Déf: Soit $z \in \mathbb{C}$, on appelle module de $z = x + iy$ où x et $y \in \mathbb{R}$, le réel positif défini par:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Remarque: Lorsque z est réel son module est sa valeur absolue. Le module est donc une extension à $\mathbb{C}$ de la valeur absolue.

Interprétation géométrique: Soit $M(z)$, $|z| = OM$. On a $|-z| = |\bar{z}| = |z|$ par argument de symétrie.

Propriétés du module: Pour tous z et z' de $\mathbb{C}$

① $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

② $|z|^2 = z\bar{z}$ et donc si $z \neq 0$, $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

③ $|zz'| = |z||z'|$ et par récurrence immédiate $|z^n| = |z|^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

④ si $z \neq 0$, $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ et si $z' \neq 0$, $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

⑤ $\operatorname{Re}(z) \leq |z|$ et $\operatorname{Im}(z) \leq |z|$

Proposition 4.2-Double inégalité triangulaire: Pour tous z et z' de $\mathbb{C}$,

① $\left||z| - |z'|\right| \leq \underbrace{|z + z'|}_{\text{inégalité triangulaire}} \leq |z| + |z'|$

② Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire : $|z + z'| = |z| + |z'| \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}_+, z' = \lambda z$ ou $z = 0$

③ Extension de l'inégalité triangulaire à n complexes :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|$$

Remarque : $\forall z, z' \in \mathbb{C}$, on a aussi : $\left||z| - |z'|\right| \leq |z - z'| \leq |z| + |z'|$

3.2 Nombres complexes de module 1

Déf: $\mathbb{U}$ désigne l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Interprétation géométrique: $\mathbb{U}$ est représenté dans le plan complexe par le cercle de centre O et de rayon 1.

Propriétés des complexes de module 1:

① $\mathbb{U} \subset \mathbb{C}^*$ car $|z| = 1 \Rightarrow z \neq 0$

② $1 \in \mathbb{U}$

③ Si z et $z' \in \mathbb{U}$ alors $zz' \in \mathbb{U}$ car $|zz'| = |z||z'| = 1$

④ Si $z \in \mathbb{U}$ alors $z^{-1} \in \mathbb{U}$ car $|z^{-1}| = |z|^{-1} = 1$ de plus $z^{-1} = \bar{z}$

Proposition 4.3: $\mathbb{U} = \{\cos\theta + i\sin\theta, \theta \in \mathbb{R}\}$

Remarque: Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur 2π alors $\mathbb{U} = \{e^{i\theta}, \theta \in I\}$ car $\cos$ et $\sin$ sont 2π -périodiques.

Déf : Pour tout réel θ , $e^{i\theta}$ est le nombre complexe $\cos\theta + i\sin\theta$.
On a donc $\operatorname{Re}(e^{i\theta}) = \cos\theta$, $\operatorname{Im}(e^{i\theta}) = \sin\theta$ et $|e^{i\theta}| = 1$

Propriétés: Pour tous réels θ et θ' :

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad e^{i0} &= 1 & e^{i\pi/2} &= i & e^{i\pi} &= -1 & |e^{i\theta}| &= 1 \\ \textcircled{2} \quad e^{i\theta} e^{i\theta'} &= e^{i(\theta+\theta')} & e^{i\theta} e^{-i\theta} &= 1 & \frac{1}{e^{i\theta}} &= e^{-i\theta} & \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} &= e^{i(\theta-\theta')} \\ \textcircled{3} \quad \overline{e^{i\theta}} &= e^{-i\theta} \end{aligned}$$

④ Formules d'Euler:

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta \Leftrightarrow \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

⑤ Formule de Moivre: $\forall n \in \mathbb{N}, (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ cad $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

⑥ Utilisation de l'angle moitié : $1 + e^{i\theta} = 2\cos\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}$ $1 - e^{i\theta} = -2i\sin\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}$

Application à la trigonométrie : transformation de somme en produit (voir fiche trigo 2)

4 Arguments, forme exponentielle d'une nombre complexe non nul

Déf: Soit $z \in \mathbb{C}^*$, on appelle argument de z et on note $\arg(z)$ tout nombre réel θ tel que $z/|z| = e^{i\theta}$.
L'argument principal de z est l'unique réel convenant dans $]-\pi; \pi]$.

Remarques:

- ★ Si $\alpha \in \mathbb{R}$ est un argument de z alors tous les arguments de z sont de la forme $\alpha + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
On écrit $\arg(z) = \alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ou encore $\arg(z) \equiv \alpha [2\pi]$.
- ★ 0 n'a pas d'argument.

Interprétation géométrique: $\arg(z) = (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) + 2k\pi$.

Conséquences: Soit $z \in \mathbb{C}^*$,

$$z \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \arg(z) = k\pi \quad \text{et} \quad z \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \arg(z) = 2k\pi$$

$$z \in i\mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Proposition 4.4: Tout nombre complexe non nul s'écrit sous la forme $z = re^{i\alpha}$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, cette écriture est la forme exponentielle ou polaire de z . On a $r = |z|$ et α est un argument de z .

Conséquence: Deux nombres complexes sont égaux ssi ils ont même module et mêmes arguments modulo 2π ou encore: $z = z' \Leftrightarrow re^{i\alpha} = r'e^{i\alpha'} \Leftrightarrow r = r' \text{ et } \alpha = \alpha' + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow r = r' \text{ et } \alpha \equiv \alpha' [2\pi]$.

Attention: Il n'y a pas unicité de la forme exponentielle.

Propriété des arguments: Soit z et $z' \in \mathbb{C}^*$

- | | |
|---|------------------|
| ① $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$ | calculer zz' |
| ② $\arg(z^n) \equiv n\arg(z) [2\pi]$ | réurrence avec ① |
| ③ $\arg(1/z) \equiv -\arg(z) [2\pi]$ | utiliser ① |
| ④ $\arg(z/z') \equiv \arg(z) - \arg(z') [2\pi]$ | utiliser ① et ③ |
| ⑤ $\arg(-z) \equiv \arg(z) + \pi [2\pi]$ | graphiquement |
| ⑥ $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z) [2\pi]$ | graphiquement |

Dans la pratique: la forme exponentielle est particulièrement adaptée pour les calculs de produit, de quotient et de puissances.

➤ Application à la trigonométrie : transformation de $a \cos x + b \sin x$.

On pose $Z = a + ib = R e^{i\theta}$ avec $R = \sqrt{a^2 + b^2}$.

On a alors en mettant R en facteur : $a \cos x + b \sin x = R \cos \theta \cos x + R \sin \theta \sin x = R \cos(x - \theta)$
(voir fiche trigo 2)

5. Exponentielle d'un nombre complexe:

Soit $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$, on appelle exponentielle de z et on note e^z le complexe:

$$e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

Proposition 4.5 : Soit z et $z' \in \mathbb{C}$,

① $e^0 = 1$

② $e^z \cdot e^{z'} = e^{z+z'}$

Conséquences:

★ Les propriétés de calcul s'étendent aux exponentielles complexes.

★ On a $|e^z| = e^x$ et $\arg(e^z) \equiv y \pmod{2\pi}$

★ $e^z = e^{z'} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z') \\ \exists k \in \mathbb{Z}, \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z') + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, z = z' + 2ik\pi$

6. Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$

6.1 Racines carrées complexes

Def : Soit $a \in \mathbb{C}$, les racines carrées complexes de a sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = a$.

Proposition 4.6: Tout nombre complexe non nul admet deux racines carrées complexes distinctes et opposées.

Dans la pratique: Si z se met facilement sous forme trigonométrique, on cherche ses racines carrées sous cette forme sinon on résout $(a + ib)^2 = z$ et $a^2 + b^2 = |z|^2$.

⚠ **Attention** la notation $\sqrt{a}$ est réservée aux réels, n'a de sens que pour $a \geq 0$ et définit LE réel positif dont le carré est a . Si a est un réel strictement positif, ses racines carrées complexes sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

6.2 Résolution de l'équation $az^2 + bz + c = 0$

Théorème de résolution d'une équation du second degré à coefficients complexes:

Soit à résoudre l'équation $az^2 + bz + c = 0$ (E) avec $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$.

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$, Δ est le discriminant de (E).

• Si $\Delta = 0$ alors (E) admet une unique solution dans $\mathbb{C}$ ou solution double : $z_0 = -b/2a$, on a de plus $az^2 + bz + c = a(z - z_0)^2$.

• Si $\Delta \neq 0$ alors (E) admet deux solutions dans $\mathbb{C}$: $z_1 = (-b + \delta)/2a$ et $z_2 = (-b - \delta)/2a$ avec $\delta^2 = \Delta$, on a de plus $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.

Conséquence: Tout polynôme de degré 2 a donc au moins une racine complexe.

⚠ **Attention**: Lorsque les coefficients sont complexes, les racines ne sont pas forcément conjuguées!!

Proposition 4.7: Somme et produit des racines: Notons z_1 et z_2 les solutions, éventuellement confondues de $az^2 + bz + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$.

$$\text{On a: } S = z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \text{ et } P = z_1 z_2 = \frac{c}{a}$$

Corollaire: Soit S et P deux nombres complexes., on a l'équivalence:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = S \\ z_1 z_2 = P \end{cases} \Leftrightarrow z_1 \text{ et } z_2 \text{ solutions de } z^2 - Sz + P = 0$$

(voir fiche second degré)

6.3 Racines nièmes de 1

Def : Soit n un entier $n \geq 2$. Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ sont appelées racines nième de 1 et leur ensemble est noté $\mathbb{U}_n$.

Proposition 4.8: $\mathbb{U}_n$ comporte exactement n éléments:

$$\mathbb{U}_n = \{ 1, e^{i2\pi/n}, \dots, e^{i2(n-1)\pi/n} \} \text{ ou encore } \mathbb{U}_n = \{ 1, w, w^2, \dots, w^{n-1} \} \text{ avec } w = e^{i2\pi/n}.$$

Exemples à connaître.

$$\star n = 2: \mathbb{U}_2 = \{ 1; -1 \}$$

$$\star n = 3: \mathbb{U}_3 = \{ 1, e^{i2\pi/3}, e^{i4\pi/3} \} = \{ 1, j, j^2 \} \text{ avec } j = e^{i2\pi/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\star n = 4: z^4 = 1 \Leftrightarrow (z^2 - 1)(z^2 + 1) = 0 \text{ donc } \mathbb{U}_4 = \{ 1, i, -1, -i \}$$

Proposition 4.9 : Les images des racines nièmes de l'unité dans le plan complexe sont les sommets d'un polygone régulier à n sommets inscrit dans le cercle trigonométrique ayant (Ox) comme axe de symétrie.

Proposition 4.10: Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

① La somme des éléments de $\mathbb{U}_n$ est nulle.

② Le produit des éléments de $\mathbb{U}_n$ est égal à $(-1)^{n-1}$.

Conséquence : Reprenons $j = e^{i2\pi/3}$, $1 + j + j^2 = 0$

6.4 Racines nième d'un nombre complexe:

Def : Soit $a \in \mathbb{C}$, les racines nièmes de a sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = a$.

Proposition 4.11: Tout nombre complexe non nul $a = \rho e^{i\alpha}$ possède exactement n racines nièmes

$$\text{qui s'écrivent: } \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\alpha}{n}} \times e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\alpha+2k\pi}{n}} \text{ avec } k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket.$$

Dans la pratique: Les racines nièmes de a s'obtiennent en multipliant l'une d'elle par les racines nième de 1. (voir fiche racine nième)

6.5 Autres équations :

a. Equation polynômiale de degré n

Proposition 4.12 : Soit $(E_n) : a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$ où $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ sont des complexes avec $a_n \neq 0$. Si z_0 est racine de (E_n) alors il existe $b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_1, b_0 \in \mathbb{C}$ tels que :

$$(E_n) \Leftrightarrow (z - z_0)(b_{n-1} z^{n-1} + b_{n-2} z^{n-2} + \dots + b_1 z + b_0) = 0$$

b. Equation avec $\bar{z}$ et $|z|$

Le plus souvent on cherchera les solutions sous forme algébrique en posant $z = x + iy$ où $x, y \in \mathbb{R}$. En présence de puissance, produit et quotient, on cherchera plutôt les solutions sous forme exponentielle

7. Fonctions à valeurs complexes

7.1 Généralités

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, on note $\mathcal{F}(I, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions définies sur I à valeurs complexes. Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$, on peut lui associer les fonctions suivantes:

• $\text{Re}(f) : \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \text{Re}(f(t)) \end{cases}$ qui est la partie réelle de f .

• $\text{Im}(f) : \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \text{Im}(f(t)) \end{cases}$ qui est la partie imaginaire de f .

• $|f| : \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ t \mapsto |f(t)| \end{cases}$ qui est le module de f . Toutes ces fonctions sont à valeurs réelles.

• $\bar{f} : \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto \overline{f(t)} \end{cases}$ qui est la fonction conjuguée de f .

Déf: Soit $a \in I$ et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$.

• On dit que f est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée.

C'est à dire: $\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall x \in I, |f(x)| \leq M$

• f est continue en a ssi $\text{Re}(f)$ et $\text{Im}(f)$ le sont.

• f est dérivable en a ssi $\text{Re}(f)$ et $\text{Im}(f)$ le sont. et dans ce cas on a $f'(a) = (\text{Re} f)'(a) + i(\text{Im} f)'(a)$

Attention: Il n'y a pas de relation d'ordre dans $\mathbb{C}$ donc pas de sens de variations, comparaison de fonctions, TVI.... On se ramène aux fonctions $\text{Re}(f)$ et $\text{Im}(f)$ dès que l'on veut utiliser un résultat utilisant la relation d'ordre.

7.2 Fonction exponentielle complexe:

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, on définit la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto e^{\alpha t} \end{cases}$.

Proposition 4.13 :

① La fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto e^{\alpha t} \end{cases}$, où $\alpha \in \mathbb{C}$, est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = \alpha e^{\alpha t}$

② Si $u \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$ est dérivable sur I alors $f : t \mapsto e^{u(t)}$ est dérivable sur I et $f'(t) = u'(t) \cdot e^{u(t)}$.

🔗 Exercice résolu : Etude de $f : t \mapsto 1 + e^{it}$