

Chapitre 5: Calculs algébriques-polycopié de cours

1. Calcul de sommes1.1 le symbole $\sum$

Déf: Soit $(a_k)_{k \in E}$ une famille de nombres complexes indexée par un ensemble fini E
 On note $\sum_{k \in E} a_k$ la somme de tous les éléments de la famille.

Remarque : l'indice k est muet, ainsi, $\sum_{k \in E} a_k = \sum_{i \in E} a_i = \sum_{j \in E} a_j = \dots$

Convention : Si $E = \emptyset$ alors $\sum_{k \in E} a_k = 0$

✎ Cas particuliers usuels:

★ Si $E = [0, n]$ où $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n a_k = \dots\dots\dots$

★ Si $E = [1, n]$ où $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n a_k = \dots\dots\dots$

★ Si $E = [p, n]$ où n et $p \in \mathbb{Z}$, $p \leq n$, $\sum_{k=p}^n a_k = \dots\dots\dots$

✎ Exercices résolus:

①. Ecrire les sommes suivantes avec le symbole $\sum$:

$$S_1 = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + 2023a_{2023} = \dots\dots\dots$$

$$S_2 = a_{10} + a_{20} + a_{30} + \dots + a_{2020} = \dots\dots\dots$$

$$S_3 = a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2023} = \dots\dots\dots$$

$$S_4 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots - a_{2023} = \dots\dots\dots$$

$$S_4 = a_n + a_{n+1} + \dots + a_{2n} = \dots\dots\dots;$$

$$S_6 = a_0 - a_2 + a_4 + \dots + (-1)^n a_{2n} = \dots\dots\dots$$

② Ecrire en extension:

$$S_1 = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k^2} = \dots\dots\dots$$

$$S_2 = \sum_{k=n}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{k}} = \dots\dots\dots$$

③ On donne $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1}$

Calculer S_4 puis $S_{n+1} - S_n$. Ecrire en extension S_{2n}

Propriétés immédiates: Soit $n, p \in \mathbb{Z}$ avec $p \leq n$,

$$\begin{aligned}
 & \bullet \sum_{k=p}^{n+1} a_k = \sum_{k=p}^n a_k + a_{n+1} \qquad \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^p a_k + \sum_{k=p+1}^n a_k, \quad 1 \leq p \leq n \qquad \sum_{k=p}^n a_k = \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^{p-1} a_k \\
 & \bullet \sum_{k=p}^n a_k + \sum_{k=p}^n b_k = \sum_{k=p}^n (a_k + b_k) \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=p}^n \lambda a_k = \lambda \sum_{k=p}^n a_k \qquad \text{linéarité de la somme}
 \end{aligned}$$

✎ Preuve :

1.2 Sommes à connaître:

① **Somme de termes constants:**

$$\forall a \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n a = (n+1)a \qquad \text{et} \qquad \forall a \in \mathbb{C}, \forall n, p \in \mathbb{Z}, p \leq n, \sum_{k=p}^n a = (n-p+1)a$$

② **Somme des entiers, des carrés des entiers, des cubes des entiers :**

$$\begin{aligned}
 \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k &= 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \\
 \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k^2 &= 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
 \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k^3 &= 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2
 \end{aligned}$$

✎ Exercice résolu : On note $S_n = \sum_{k=0}^n (2k+1)^2$. Expliciter S_n en fonction de n puis écrire une fonction Python calculant permettant le calcul de S_n .

③ Sommes géométriques:

On a déjà vu : $\forall q \in \mathbb{C}, \sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$ si $q \neq 1$, $(n + 1)$ sinon

✎ Exercice résolu: Soit x un réel et $n \in \mathbb{N}$, calcul de $\sum_{k=0}^n \cos(kx)$ et $\sum_{k=0}^n \sin(kx)$.

1.3 Techniques de calcul

① **Changement d'indice** : Soit $n, p \in \mathbb{Z}$, $n \leq p$

a. **Translation**: Soit $S = \sum_{k=p}^n a_k$, on pose $j = k - p$, on a $k = j + p$ et $S = \sum_{j=0}^{n-p} a_{j+p}$.

Comme l'indice est muet, on peut écrire $S = \sum_{k=0}^{n-p} a_{k+p}$. On dit qu'on a changé k en $k + p$ ($k \leftarrow k + p$).

Application: $\sum_{k=p}^n q^k = q^p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$ si $q \neq 1$, $(n - p + 1)$ sinon.

✎ **Preuve** :

On en déduit : Soit u une suite géométrique de raison $q \neq 1$, $\sum_{k=p}^n u_k = u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$

✎ Exercice résolu: Calcul de $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{2^{k-1}}$.

b. Symétrie: Soit $S = \sum_{k=0}^n a_{n-k}$, le changement d'indice $j = n - k$ donne $S = \sum_{j=0}^n a_j$ et comme

l'indice est muet on peut écrire que: $S = \sum_{k=0}^n a_k$. On a changé $n-k$ en k ($k \leftarrow n-k$).

Application : Soit u une suite arithmétique de raison r , $\sum_{k=p}^n u_k = \frac{(n-p+1)(u_p + u_n)}{2}$

✎ Preuve :

✎ Exercice résolu: Calcul de $\sum_{k=0}^{2n} \cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$.

② Sommation par paquets :

Dans certains calculs, regrouper les termes par paquets permet de faire des simplifications. On peut, en particulier, regrouper les termes d'indices pairs et d'indices impairs :

$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{\substack{k=m \\ k \text{ pair}}}^n a_k + \sum_{\substack{k=m \\ k \text{ impair}}}^n a_k = \sum_{\substack{m \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} a_k + \sum_{\substack{m \leq k \leq n \\ k \text{ impair}}} a_k = \sum_{m \leq 2k \leq n} a_{2k} + \sum_{m \leq 2k+1 \leq n} a_{2k+1}$$

✎ Exercice résolu: Calcul de $\sum_{k=1}^{2n} k(-1)^k$ de deux manières différentes.

③ Somme télescopique :

Une somme télescopique est une somme pouvant s'écrire sous la forme:

$$S_1 = \sum_{k=p}^n (a_{k+1} - a_k) \text{ ou } S_2 = \sum_{k=p}^n (a_k - a_{k+1}).$$

Dans ce cas on a les simplifications respectives :

$$S_1 = \dots\dots\dots$$

$$S_2 = \dots\dots\dots$$

✎ Exercice résolu: Calcul de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$

Application : Formule de Bernoulli :

$$\forall a, b \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}^*, a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k = \dots = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

✎ Preuve :

✎ Exemples :

2. Produits

2.1 le symbole $\prod$

Déf: Soit $(a_k)_{k \in E}$ une famille de nombres complexes indexée par un ensemble fini E .

On note $\prod_{k \in E} a_k$ le produit de tous les éléments de la famille.

Remarque : l'indice k est muet, ainsi, $\prod_{k \in E} a_k = \prod_{i \in E} a_i = \prod_{j \in E} a_j = \dots$

Convention : Si $E = \emptyset$ alors $\prod_{k \in E} a_k = 1$

Cas particuliers usuels:

★ Si $E = \llbracket 0, n \rrbracket$ où $n \in \mathbb{N}$, $\prod_{k=0}^n a_k = a_0 \times a_1 \times \dots \times a_n$

★ Si $E = \llbracket 1, n \rrbracket$ où $n \in \mathbb{N}$, $\prod_{k=1}^n a_k = a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n$

★ Si $E = \llbracket p, n \rrbracket$ où n et $p \in \mathbb{Z}$, $p \leq n$, $\prod_{k=p}^n a_k = a_p \times a_{p+1} \times \dots \times a_n$ et si $p > n$, $\prod_{k \in E} a_k = 1$ par convention.

Propriétés immédiates: On donne n, p, m entiers, $p \leq m \leq n$ et α, λ des réels.

• $\exists k \in E, a_k = 0 \Rightarrow \prod_{k \in E} a_k = 0$

• $\prod_{k=p}^{n+1} a_k = a_{n+1} \prod_{k=p}^n a_k$

$\prod_{k=p}^n a_k = \prod_{k=p}^m a_k \prod_{k=m+1}^n a_k$

• $\prod_{k=p}^n a_k \cdot \prod_{k=p}^n b_k = \prod_{k=p}^n a_k b_k$

$(\prod_{k=p}^n a_k)^\alpha = \prod_{k=p}^n (a_k)^\alpha \prod_{k=p}^n \lambda a_k = \lambda^{n-p+1} \prod_{k=p}^n a_k$

✎ Preuve :

2.2 Produits à connaître:

① **Produit de facteurs constants.** Soit a un nombre complexe, $\prod_{k=p}^n a = a^{n-p+1}$

② **Factorielle (de) n** : Soit n un entier naturel, $n \geq 1$, la factorielle de n est l'entier :

$$n! = \prod_{k=1}^n k = 1 \times 2 \times \dots \times n$$

Par convention, on pose $0! = \prod_{k=0}^0 k = 1$. On a $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)! = (n+1) \times n!$

✂ Exercice résolu: Calcul de $\prod_{k=1}^n (2k)$ et $\prod_{k=0}^n (2k+1)$

2.3 Techniques de calcul

① **Changement d'indice**: Même chose que pour les sommes.

② **Produit télescopique**: Un produit télescopique est un produit de facteurs pouvant s'écrire

sous la forme: $P_1 = \prod_{k=p}^n \frac{a_{k+1}}{a_k}$ ou $P_2 = \prod_{k=p}^n \frac{a_k}{a_{k+1}}$.

On a alors après simplification $P_1 = \frac{a_{n+1}}{a_p}$ et $P_2 = \frac{a_p}{a_{n+1}}$.

✂ Exercice résolu: Calcul de $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right)$

3. Formule du binôme et applications

3.1 Les coefficients binomiaux :

Def : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, le coefficient binomial « k parmi n » est l'entier naturel défini par

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ si } 0 \leq k \leq n \text{ et } \binom{n}{k} = 0 \text{ si } k < 0 \text{ ou } k > n$$

✎ Exemples: Calculer $\binom{10}{3}$.

Propriétés: Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$,

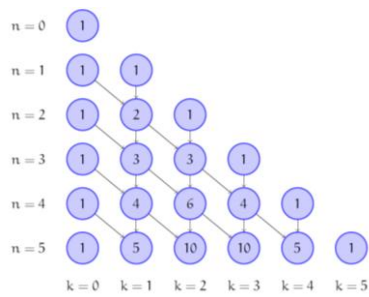
① $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ en particulier: $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ et $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

② $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ *relation de Pascal*

③ Si $1 \leq k \leq n$, $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ *formule du capitaine*

✎ Preuve :

Application: triangle de Pascal : La valeur dans une case s'obtient en additionnant la valeur de la case au dessus et celle de la case au-dessus à gauche



Remarque : On peut montrer que lorsque $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, la formule définissant $\binom{n}{k}$ donne bien un entier naturel, en raisonnant par récurrence sur n (numéro de la ligne dans le triangle).

3.2 Formule du binôme de Newton:

Théorème 5.1 : Soit a et $b \in \mathbb{C}$, et $n \in \mathbb{N}$, $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

🔗 Démonstration par récurrence sur n

A savoir refaire.

Dans la pratique: On utilise le triangle de Pascal pour obtenir les coefficients.

✎ Exercice résolu : Développer $(1 + 2i)^4$, $(1 - i)^3$, $(a + b)^5$, $(a - b)^6$, $(1 + x)^n$ et $(1 - x)^n$.

3.3 Des applications à connaître :

① Calcul de sommes :

✎ Calcul de $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k$, $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$, puis de $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$

② Transformation d'expressions trigonométriques

★ Linéarisation de $\cos^p \sin^q$

★ Délinéarisation de $\cos(px)$ ou de $\sin(qx)$

4. Sommes doubles

On considère une famille de nombres complexes $(a_{i,j})$ doublement indexées par des entiers i et j

4.1 Somme sur un rectangle:

Définition et propriété :

Soit $E = \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, m \rrbracket$, on note $\sum_{\substack{p \leq i \leq n \\ m \leq j \leq l}} a_{i,j}$ la somme des éléments de la famille $(a_{i,j})_{(i,j) \in E}$.

$$\text{On a } \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{i,j} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{i,j}$$

$i \backslash j$	1	2	...	m
1	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	...	$a_{1,m}$
2	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	...	$a_{2,m}$
...	...	...	...	...
n	$a_{n,1}$	$a_{n,2}$	...	$a_{n,m}$

✎ Somme de la ième ligne :

✎ Somme de la jème colonne :

✎ Somme des éléments du tableau :

Dans la pratique : On peut retenir le principe suivant :

Si les deux champs d'indices sont indépendants alors on peut inverser l'ordre de sommation sans modifier les bornes des sommes.

✎ Exercice résolu: Calculer $\sum_{1 \leq i, j \leq n} (2i + j)$ et $\sum_{1 \leq i, j \leq n} ij$

4.2 Somme triangulaire

On suppose que les indices i et j ne sont pas indépendants et vérifient des inégalités du type $1 \leq i \leq j \leq n$ (ou $1 \leq i < j \leq n$)

$i \backslash j$	1	2	...	n
1			...	
2			...	
...	...	...	...	...
n			...	

✎ Somme de la i ème ligne :

✎ Somme de la j ème colonne :

✎ Somme des éléments du tableau :

Définition et propriété :

① Soit $E = \{ (i, j), 1 \leq i \leq j \leq n \}$, on note $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j}$ la somme des éléments de la famille $(a_{i,j})_{(i,j) \in E}$.

$$\text{On a } \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j a_{i,j}$$

② Soit $E = \{ (i, j), 1 \leq i < j \leq n \}$, on note $\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j}$ la somme des éléments de la famille $(a_{i,j})_{(i,j) \in E}$.

$$\text{On a } \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n a_{i,j} = \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j}$$

Dans la pratique : On peut retenir que lorsque les champs d'indice sont liés, on peut inverser l'ordre de sommation mais il faut modifier les bornes pour respecter les contraintes sur les indices.

✎ Exercice résolu: Calculer $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (i+j)$ et $\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{i}{j}$

5. Résolution de systèmes linéaires en petite dimension, algorithme du pivot de Gauss

Def: Un système linéaire à n équations et p inconnues à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un ensemble de conditions de la forme :

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases} \quad \text{où } (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} \in \mathbb{K}^{np} \text{ et } (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n$$

★ Exemples :

$$(S_1): \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 = 4 \end{cases} \quad (S_2): \begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ x = 5y - 2 \end{cases} \quad (S_3): \begin{cases} -y - z = 1 \\ 4x + 3y + 11z = -2 \\ 2x - y + 4z = 1 \end{cases}$$

$$(S_4): \begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \\ -x + 2y + 4z = 0 \end{cases} \quad (S_5): \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 7x - 3y - 2z = 2 \end{cases}$$

★ Interprétation géométrique pour les systèmes 2×2 , 2×3 et 3×3 à coefficients réels :

Dans les cas particuliers de systèmes linéaires à deux ou trois inconnues, l'ensemble des solutions s'interprète géométriquement comme la recherche d'intersection de deux droites ou de deux ou trois plans. Ainsi, il peut y avoir une unique solution (un point), une infinité de solution (une droite ou un plan) ou bien aucune solution.

Def : Soit (S) un système de n équations ou lignes notées $L_1, L_2, \dots, L_n$. On appelle opération élémentaire sur les lignes (OEL) de (S) , l'une des transformations suivantes

- La permutation notée $L_i \leftrightarrow L_j$ est l'échange des lignes i et j .
- La dilation notée $L_i \leftarrow \lambda L_i$ est la multiplication de la ligne L_i par le scalaire λ non nul.
- La transvection notée $L_j \leftarrow L_j + \lambda L_i$ est l'ajout à la ligne L_j d'un multiple de la ligne L_i

Proposition: Si on applique à un système (S) une OEL alors on obtient un système (S') équivalent à (S) , c'est à dire ayant les mêmes solutions.

★ **Algorithme du pivot de Gauss :** Cet algorithme consiste à appliquer des OEL à un système (S) dans le but d'obtenir un système (S') équivalent à (S) et facile à résoudre

- On choisit une ligne contenant x_1 . Le coefficient de x_1 s'appelle le pivot (on essaye de choisir comme pivot 1 ou -1).
- On permute cette ligne avec la première.
- On effectue des transvections pour éliminer x_1 des autres lignes
- On recommence en ignorant la première ligne.
- Si une inconnue n'est pas ou plus présente, on passe à la suivante.

A la fin de cet algorithme le système est dit triangulaire et sa résolution est immédiate en remontant les lignes du système.

Applications: Résoudre les systèmes donnés en exemple

Fiche de calcul n°14