

Exercices - Chapitre 5: Calculs algébriques

♦ Eléments de correction en ligne

5.1 Ecritures d'une somme et d'un produit.

a. Dire si les égalités suivantes sont vraies ou fausses.

$$(1) \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i \quad (2) \sum_{i=1}^n (\lambda + a_i) = \lambda + \sum_{i=1}^n a_i \quad (3) \sum_{i=1}^n (\lambda a_i) = \lambda \sum_{i=1}^n a_i$$

$$(4) \sum_{i=1}^n (a_i b_i) = \sum_{i=1}^n a_i \sum_{i=1}^n b_i \quad (5) \sum_{i=1}^n a_i^p = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^p$$

b. Même question.

$$(1) \prod_{k=0}^n 2 = 2^n \quad (2) \prod_{k=1}^n a_k b_k = \prod_{k=1}^n a_k \prod_{k=1}^n b_k \quad (3) \prod_{k=1}^n (a_k + b_k) = \prod_{k=1}^n a_k + \prod_{k=1}^n b_k$$

$$(4) \prod_{k=1}^n \lambda a_k = \lambda \prod_{k=1}^n a_k \quad (5) \prod_{k=1}^n 2a_k = 2^n \prod_{j=0}^{n-1} a_{j+1} \quad (6) \prod_{k=1}^n a_{n+1-k} = \prod_{k=1}^n a_k$$

♥ 5.2 Changement d'indices

a. Recopier et remplacer le symbole $\square$ dans les écritures suivantes:

$$\sum_{k=3}^{n+2} a_{k+1} = \sum_{j=\square}^{\square} a_j \quad \sum_{k=1}^{n-1} a_{k-1} = \sum_{j=0}^{\square} a_{\square} \quad \sum_{p=0}^n p a_{p+1} = \sum_{q=\square}^{\square} \square a_q$$

$$\sum_{k=2}^{2n} (k-2) a_k = \sum_{k=\square}^{\square} k a_{\square} \quad \sum_{k=1}^p a_k + \sum_{k=p+1}^{2p} a_k = \sum_{k=\square}^{\square} a_k \quad \sum_{k=1}^n a_{2k} + \sum_{k=0}^n a_{2k+1} = \sum_{k=\square}^{\square} a_k$$

b. Donner directement la valeur des sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^i k, \quad \sum_{i=1}^{n-1} i^2, \quad \sum_{k=0}^{2n} k^3, \quad \sum_{i=0}^{n-1} 2^i, \quad \sum_{j=1}^n 3^j, \quad \sum_{k=2}^i \left(\frac{1}{2} \right)^k$$

♥ 5.3 On donne l'égalité $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n a_k = 2n(n+3)$.Calculer $\sum_{k=0}^{10} a_k, \sum_{k=5}^{20} a_k, \sum_{k=0}^{n+1} a_k, \sum_{k=1}^n a_k, \sum_{k=n}^{2n} a_k$ puis déterminer a_k en fonction de $k \in \mathbb{N}$.

♥ 5.4 Calculer les sommes et les produits suivants :

$$S_1 = \sum_{k=1}^n k(n+1-k) \quad S_2 = \sum_{k=0}^n \frac{2^{k-1}}{3^k} \quad S_3 = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^k}{3^{k-1}} \quad S_4 = \sum_{k=3}^{n+1} \left(\frac{1}{2} \right)^k$$

$$S_5 = \sum_{k=1}^n k \times k! \quad S_6 = \sum_{k=0}^n \frac{k}{(k+1)!} \quad S_7 = \sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} \quad S_8 = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2} \right)$$

$$S_9 = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) \quad S_{10} = \sum_{k=2}^n \ln \left(\frac{k^2-1}{k^2} \right) \quad S_{11} = \sum_{p+q=n} pq$$

$$S_{12} = \sum_{k=0}^n \sin^2 \left(\frac{k\pi}{3} \right) \quad S_{13} = \sum_{k=0}^n \frac{\cos kx}{\cos^k x} \text{ où } x \neq \frac{\pi}{2} [\pi] \quad S_{14} = \sum_{k=1}^{2n} \tan \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right)$$

$$P_1 = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) \quad P_2 = \prod_{k=0}^n 2^k 3^{-k} \quad P_3 = \prod_{k=1}^n \frac{2k+3}{2k-1}$$

5.5 Démontrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \sqrt{k+1} - \sqrt{k} < \frac{1}{2\sqrt{k}} < \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$.En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la partie entière de : $S_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{2\sqrt{k}}$

♥ 5.6 Calculer les sommes doubles suivantes

$$A = \sum_{1 \leq i, j \leq n} (i+j)^2 \quad B = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j) \quad C = \sum_{1 \leq i, j \leq n} |i-j|$$

$$D = \sum_{i=0}^n \sum_{k=i}^n \frac{i}{k+1} \quad E = \sum_{1 \leq i < j \leq n} i \quad F = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} 2^i$$

♥ 5.7 Soit $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on propose de calculer de deux manières différentes $S = \sum_{k=1}^n ka^k$

a. Calculer S en remarquant que $S = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k a^k$.

b. Retrouver la valeur de S en calculant de deux manières différentes la dérivée de $f(x) = \sum_{k=0}^n x^k$

5.8 Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{x+k}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$

♦ 5.9 Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose, $P(x) = \prod_{k=0}^n \cos(2^k x)$

Calculer $P(x)$ lorsque $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, puis pour $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, simplifier $\sin(x)P(x)$ et déterminer $P(x)$.

♦ 5.10 Montrer l'égalité $\sum_{n=0}^{p-1} \sum_{k=n+1}^p \frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^p \frac{(-1)^k}{k}$

Autour de la formule du binôme

♥ 5.11 Calculer les sommes suivantes :

$$A = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k, \quad B = \sum_{k=1}^n \frac{\binom{n}{k}}{2^k}, \quad C = \sum_{k=1}^n 2^{k-1} 3^{n-k+1} \binom{n}{k}, \quad D = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1}, \quad E = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k}$$

$$F = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(k\theta) \quad G = \sum_{k=p}^n \binom{k}{p} \quad H = \sum_{k=0}^n \sum_{i=k}^n \binom{n-k}{n-i} \binom{n}{k}$$

♥ 5.12 Des sommes classiques

a. Soit $A = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k}$ et $B = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1}$, calculer $A+B$, $A-B$ puis A et B

b. En utilisant la relation : $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$, calculer $S_1 = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$ et $S_2 = \sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k}$

c. Soit $n \in \mathbb{N}$, on définit f sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (x+1)^n$.

Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ de deux manières différentes et retrouver les égalités du b.

♦ 5.13. Calculer $(1+i)^n$ puis $C = \sum_{0 \leq 2k \leq n} (-1)^k \binom{n}{2k}$ et $D = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} (-1)^k \binom{n}{2k+1}$

♦ 5.14

a. Linéariser: $\cos^3(\theta), \sin^3(\theta)\cos^2(\theta), \sin^4(\theta)\cos(\theta), \sin(\theta)\cos^3(\theta)$

b. Délinéariser: $\cos(4x), \sin(5x), \sin(2x)\cos(3x)$

5.15 Déterminer une fonction polynôme P telle que $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(5x) = P(\cos x)$.

En déduire les lignes trigonométriques de $\frac{\pi}{10}$.

Fiches de calculs n°17 et n°18