

Chapitre 5: Calculs algébriques-résumé

♥ A savoir par cœur, ✎ A savoir faire

1. Calcul de sommes

1.1 le symbole $\sum$

Déf: Soit $(a_k)_{k \in E}$ une famille de nombres complexes indexée par un ensemble fini E

On note $\sum_{k \in E} a_k$ la somme de tous les éléments de la famille.

Remarque : l'indice k est muet, ainsi, $\sum_{k \in E} a_k = \sum_{i \in E} a_i = \sum_{j \in E} a_j = \dots$

Convention : Si $E = \emptyset$ alors $\sum_{k \in E} a_k = 0$

✎ Cas particuliers usuels:

★ Si $E = [0, n]$ où $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + \dots + a_n$

★ Si $E = [1, n]$ où $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

★ Si $E = [p, n]$ où n et $p \in \mathbb{Z}$, $p \leq n$, $\sum_{k=p}^n a_k = a_p + a_{p+1} + \dots + a_n$ et si $p > n$, $\sum_{k=p}^n a_k = 0$ par convention.

Propriétés immédiates: Soit $n, p \in \mathbb{Z}$ avec $p \leq n$,

$$\bullet \sum_{k=p}^{n+1} a_k = \sum_{k=p}^n a_k + a_{n+1} \quad \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^p a_k + \sum_{k=p+1}^n a_k, 1 \leq p \leq n \quad \sum_{k=p}^n a_k = \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^{p-1} a_k$$

$$\bullet \sum_{k=p}^n a_k + \sum_{k=p}^n b_k = \sum_{k=p}^n (a_k + b_k) \quad \text{et} \quad \sum_{k=p}^n \lambda a_k = \lambda \sum_{k=p}^n a_k \quad \text{linéarité de la somme}$$

1.2 Sommes à connaître:

① **Somme de termes constants:**

$$\forall a \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n a = (n+1)a \quad \text{et} \quad \forall a \in \mathbb{C}, \forall n, p \in \mathbb{Z}, p \leq n, \sum_{k=p}^n a = (n-p+1)a$$

② **Somme des entiers, des carrés des entiers, des cubes des entiers :**

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \heartsuit$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \heartsuit$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 \quad \heartsuit$$

③ **Sommes géométriques:**

$$\forall q \in \mathbb{C}, \sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \begin{cases} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} & \text{si } q \neq 1 \\ n + 1 & \text{si } q = 1 \end{cases} \quad \heartsuit$$

✎ A savoir faire: Soit x un réel et $n \in \mathbb{N}$, calcul de $\sum_{k=0}^n \cos(kx)$ et $\sum_{k=0}^n \sin(kx)$.

1.3 Techniques de calcul

① **Changement d'indice** : Soit $n, p \in \mathbb{Z}, n \leq p$

a. **Translation**: Soit $S = \sum_{k=p}^n a_k$, on pose $j = k - p$, on a $k = j + p$ et $S = \sum_{j=0}^{n-p} a_{j+p}$.

Comme l'indice est muet, on peut écrire $S = \sum_{k=0}^{n-p} a_{k+p}$ ($k \leftarrow k + p$).

Application : $\sum_{k=p}^n q^k = \sum_{k=0}^{n-p} q^{k+p} = q^p \sum_{k=0}^{n-p} q^k = \begin{cases} q^p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n-p+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$ si $q \neq 1, (n-p+1)$ sinon.

On en déduit : Soit u une suite géométrique de raison $q \neq 1$, $\sum_{k=p}^n u_k = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$

b. **Symétrie**: Soit $S = \sum_{k=0}^n a_{n-k}$, le changement d'indice $j = n - k$ donne $S = \sum_{j=0}^n a_j$ et comme

l'indice est muet on peut écrire que: $S = \sum_{k=0}^n a_k$ ($k \leftarrow n-k$).

Application : Soit u une suite arithmétique de raisons r , $\sum_{k=p}^n u_k = \frac{(n-p+1)(u_p + u_n)}{2}$

✎ Calcul de $\sum_{k=0}^{2n} \cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$.

② **Sommation par paquets** :

Dans certains calculs, regrouper les termes par paquets permet de faire des simplifications. On peut, en particulier, regrouper les termes d'indices pairs et d'indices impairs :

$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{\substack{k=m \\ k \text{ pair}}}^n a_k + \sum_{\substack{k=m \\ k \text{ impair}}}^n a_k = \sum_{\substack{m \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} a_k + \sum_{\substack{m \leq k \leq n \\ k \text{ impair}}} a_k = \sum_{m \leq 2k \leq n} a_{2k} + \sum_{m \leq 2k+1 \leq n} a_{2k+1}$$

③ **Somme télescopique** :

Une somme télescopique est une somme pouvant s'écrire sous la forme:

$$S_1 = \sum_{k=p}^n (a_{k+1} - a_k) \text{ ou } S_2 = \sum_{k=p}^n (a_k - a_{k+1}).$$

Dans ce cas on a les simplifications respectives :

$$S_1 = a_{n+1} - a_p \quad S_2 = a_p - a_{n+1}$$

✎ Calcul de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$

Egalité de Bernoulli :

$$\forall a, b \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}^*, a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k = \dots = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \quad \heartsuit$$

Applications :

$$\forall a, b \in \mathbb{C}, a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{C}, x^n - 1 = (x - 1) \sum_{k=0}^{n-1} x^k$$

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{C}, x^{2p+1} + 1 = x^{2p+1} - (-1)^{2p+1} = (x + 1) \sum_{k=0}^{2p} (-1)^{2p-k} x^k$$

2. Produits

2.1 le symbole $\prod$

Déf: Soit $(a_k)_{k \in E}$ une famille de nombres complexes indexée par un ensemble fini E .

On note $\prod_{k \in E} a_k$ le produit de tous les éléments de la famille.

Remarque : l'indice k est muet, ainsi, $\prod_{k \in E} a_k = \prod_{i \in E} a_i = \prod_{j \in E} a_j = \dots$

Convention : Si $E = \emptyset$ alors $\prod_{k \in E} a_k = 1$

Cas particuliers usuels:

★ Si $E = [0, n]$ où $n \in \mathbb{N}$, $\prod_{k=0}^n a_k = a_0 \times a_1 \times \dots \times a_n$

★ Si $E = [1, n]$ où $n \in \mathbb{N}$, $\prod_{k=1}^n a_k = a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n$

★ Si $E = [p, n]$ où n et $p \in \mathbb{Z}$, $p \leq n$, $\prod_{k=p}^n a_k = a_p \times a_{p+1} \times \dots \times a_n$ et si $p > n$, $\prod_{k \in E} a_k = 1$ par convention.

Propriétés immédiates: On donne n, p, m entiers, $p \leq m \leq n$ et α, λ des réels.

• $\exists k \in E, a_k = 0 \Rightarrow \prod_{k \in E} a_k = 0$

• $\prod_{k=p}^{n+1} a_k = a_{n+1} \prod_{k=p}^n a_k$

$\prod_{k=p}^n a_k = \prod_{k=p}^m a_k \prod_{k=m+1}^n a_k$

• $\prod_{k=p}^n a_k \cdot \prod_{k=p}^n b_k = \prod_{k=p}^n a_k b_k$

$(\prod_{k=p}^n a_k)^\alpha = \prod_{k=p}^n (a_k)^\alpha \quad \prod_{k=p}^n \lambda a_k = \lambda^{n-p+1} \prod_{k=p}^n a_k$

2.2 Produits à connaître:

① **Produit de facteurs constants.** Soit a un nombre complexe, $\prod_{k=p}^n a = a^{n-p+1}$

② **Factorielle (de) n** : Soit n un entier naturel, $n \geq 1$, la factorielle de n est l'entier :

$$n! = \prod_{k=1}^n k = 1 \times 2 \times \dots \times n$$

♥

Par convention, on pose $0! = \prod_{k=0}^0 k = 1$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)! = (n+1) \times n!$

☞ Calcul de $\prod_{k=1}^n (2k)$ et $\prod_{k=0}^n (2k+1)$

2.3 Techniques de calcul

① **Changement d'indice**: Même chose que pour les sommes.

② **Produit télescopique**: Un produit télescopique est un produit de facteurs pouvant s'écrire

sous la forme: $P = \prod_{k=p}^n \frac{a_{k+1}}{a_k}$ ou $P = \prod_{k=p}^n \frac{a_k}{a_{k+1}}$.

On a alors après simplification $P = \frac{a_{n+1}}{a_p}$ et $P = \frac{a_p}{a_{n+1}}$.

3. Formule du binôme et applications

3.1 Les coefficients binomiaux :

Def : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, le coefficient binomial « k parmi n » est l'entier naturel défini par

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ si } 0 \leq k \leq n \text{ et } \binom{n}{k} = 0 \text{ si } k < 0 \text{ ou } k > n$$

Exemples: Calculer $\binom{10}{3}$.

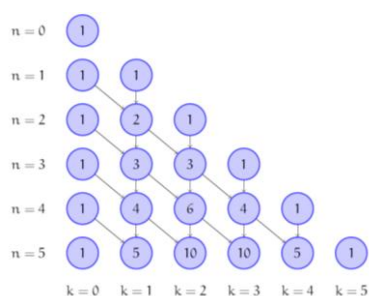
Propriétés: Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$,

① $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ en particulier: $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ et $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$ ♥

② $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ relation de Pascal ♥

③ Si $1 \leq k \leq n$, $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ formule du capitaine ♥

Application: triangle de Pascal: La valeur dans une case s'obtient en additionnant la valeur de la case au dessus et celle de la case au-dessus à gauche



Remarque: On peut montrer que lorsque

$k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, la formule définissant $\binom{n}{k}$ donne

bien un entier naturel, en raisonnant par récurrence sur n (numéro de la ligne dans le triangle).

3.2 Formule du binôme de Newton:

Théorème 5.1 : Soit a et $b \in \mathbb{C}$, et $n \in \mathbb{N}$, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ ♥

Démo par récurrence sur n A savoir refaire.

Dans la pratique: On utilise le triangle de Pascal pour obtenir les coefficients.

2.3 Des applications

① Calcul de sommes :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n \text{ et } \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

♥

② Transformation d'expressions trigonométriques

★ Linéarisation de $\cos^p \sin^q$: On utilise les formules d'Euler puis on développe en utilisant la formule du binôme, enfin on regroupe les termes pour faire apparaître des $\cos(ka)$ et $\sin(ka)$ grâce aux formules d'Euler.

$$\cos^3 a = \left(\frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2} \right)^3 = \frac{1}{4} \cos(3a) + \frac{3}{4} \cos a \text{ et } \sin^3 a = \left(\frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i} \right)^3 = -\frac{1}{4} \sin(3a) + \frac{3}{4} \sin a$$

★ Délinéarisation de $\cos(px)$ ou de $\sin(qx)$: On utilise la formule de Moivre puis on développe le membre de gauche en utilisant la formule du binôme puis on identifie les parties réelles et imaginaires.

$$\cos(3a) = 4\cos^3 a - 3\cos a \text{ et } \sin(3a) = 4\sin^3 a - 3\sin a$$

4. Sommes doubles

On considère une famille de nombres complexes $(a_{i,j})$ doublement indexées par des entiers i et j

4.1 Somme sur un rectangle:

On suppose que (i, j) vérifie de manière indépendante $p \leq i \leq n$ et $q \leq j \leq m$.

Définition et propriété : Soit $E = \llbracket p, n \rrbracket \times \llbracket q, m \rrbracket$, on note $\sum_{\substack{p \leq i \leq n \\ q \leq j \leq m}} a_{i,j}$ la somme des éléments de la

famille $(a_{i,j})_{(i,j) \in E}$. On a $\sum_{\substack{p \leq i \leq n \\ q \leq j \leq m}} a_{i,j} = \sum_{i=p}^n \sum_{j=q}^m a_{i,j} = \sum_{j=q}^m \sum_{i=p}^n a_{i,j}$

Remarques :

$$\text{Si } p = q = 1, \quad \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{i,j} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{i,j}$$

$$\text{Si } p = q = 1 \text{ et } m = n \quad \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{i,j}$$

Dans la pratique : On peut retenir le principe suivant :

Si les deux champs d'indices sont indépendants alors on peut inverser l'ordre de sommation sans modifier les bornes des sommes.

Cas particulier : Si les indices i et j sont « séparables », on a :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_i b_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j = \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^n b_j = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{j=1}^n b_j \right)$$

4.2 Somme triangulaire

On suppose que les indices i et j ne sont pas indépendants et vérifient des inégalités du type
 $p \leq i \leq j \leq n$ ou $p \leq i < j \leq n$ ou $p \leq j \leq i \leq n$ ou encore $p \leq i < j \leq n$

Définition et propriété :

① Soit $E = \{(i, j), p \leq i \leq j \leq n\}$, on note $\sum_{p \leq i \leq j \leq n} a_{i,j}$ la somme des éléments de la famille $(a_{i,j})_{(i,j) \in E}$.

$$\text{On a } \sum_{p \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} = \sum_{i=p}^n \sum_{j=i}^n a_{i,j} = \sum_{j=p}^n \sum_{i=p}^j a_{i,j}$$

② Soit $E = \{(i, j), p \leq i < j \leq n\}$, on note $\sum_{p \leq i < j \leq n} a_{i,j}$ la somme des éléments de la famille $(a_{i,j})_{(i,j) \in E}$.

$$\text{On a } \sum_{p \leq i < j \leq n} a_{i,j} = \sum_{i=p}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n a_{i,j} = \sum_{j=p+1}^n \sum_{i=p}^{j-1} a_{i,j}$$

Les autres cas s'en déduisent

Dans la pratique : On peut retenir que lorsque les champs d'indice sont liés, pour inverser l'ordre de sommation, il faut modifier les bornes pour respecter les contraintes sur les indices.

5. Résolution de systèmes linéaires en petite dimension, algorithme du pivot de Gauss

Def: Un système linéaire à n équations et p inconnues à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un ensemble de conditions de la forme :

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases} \quad \text{où } (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} \in \mathbb{K}^{np} \text{ et } (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n$$

☞ Exemples :

$$\begin{aligned} (S_1) : \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 = 4 \end{cases} & \quad (S_2) : \begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ x = 5y - 2 \end{cases} & \quad (S_3) : \begin{cases} -y - z = 1 \\ 4x + 3y + 11z = -2 \\ 2x - y + 4z = 1 \end{cases} \\ (S_4) : \begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \\ -x + 2y + 4z = 0 \end{cases} & \quad (S_5) : \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 7x - 3y - 2z = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

★ Interprétation géométrique pour les systèmes 2x2, 2x3 et 3x3 à coefficients réels :

Dans les cas particuliers de systèmes linéaires à deux ou trois inconnues, l'ensemble des solutions s'interprète géométriquement comme la recherche d'intersection de deux droites ou de deux ou trois plans. Ainsi, il peut y avoir une unique solution (un point), une infinité de solution (une droite ou un plan) ou bien aucune solution.

Def : Soit (S) un système de n équations ou lignes notées $L_1, L_2, \dots, L_n$. On appelle opération élémentaire sur les lignes (OEL) de (S) , l'une des transformations suivantes

- La permutation notée $L_i \leftrightarrow L_j$ est l'échange des lignes i et j .
- La dilation notée $L_i \leftarrow \lambda L_i$ est la multiplication de la ligne L_i par le scalaire λ non nul.
- La transvection notée $L_j \leftarrow L_j + \lambda L_i$ est l'ajout à la ligne L_j d'un multiple de la ligne L_i

Proposition: Si on applique à un système (S) une OEL alors on obtient un système (S') équivalent à (S), c'est à dire ayant les mêmes solutions.

★ **Algorithme du pivot de Gauss :** Cet algorithme consiste à appliquer des OEL à un système (S) dans le but d'obtenir un système (S') équivalent à (S) et facile à résoudre

- On choisit une ligne contenant x_1 . Le coefficient de x_1 s'appelle le pivot (on essaye de choisir comme pivot 1 ou -1).
- On permute cette ligne avec la première.
- On effectue des transvections pour éliminer x_1 des autres lignes
- On recommence en ignorant la première ligne.
- Si une inconnue n'est pas ou plus présente, on passe à la suivante.

A la fin de cet algorithme le système est dit triangulaire et sa résolution est immédiate en remontant les lignes du système.

