Chapitre 6: Calcul d'intégrales et de primitives-polycopié de cours

---

Dans ce chapitre I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non trivial et $\mathbb{K}$ l'ensemble des réels ou des complexes.

1. Des rappels

1.1 Primitive

Déf: Soit f et F des fonctions de I dans $\mathbb{K}$, F est une primitive de f sur I lorsque F est dérivable sur I et $\forall x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

✍ Exercice : Déterminer des réels a, b et c tel que $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-2x}$ soit une primitive de $f(x) = (x^2 - x + 2)e^{-2x}$

Proposition 6.1 : Si f admet une primitive sur I alors elle en admet une infinité toutes égales à une constante près.

Proposition 6.2: Soit f et g $\in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$, F une primitive de f sur I et G une primitive de g sur I.

① $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $(\alpha F + \beta G)$ est une primitive de $(\alpha f + \beta g)$ sur I.

② Re(F) (resp. Im(F)) est une primitive sur I de Re(f) (resp. Im(f)).

✍ Preuve :

★ Primitives usuelles : cf fiche primitive 1

✍ Exercice : Donner une primitive de f et un intervalle de validité

$f : x \mapsto x^3 + 3x + \frac{1}{x^2}$

$f : x \mapsto 2\sqrt{x} + \frac{1}{x}$

$f : x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$

$f : x \mapsto (2x+1)^2$

$f : x \mapsto \frac{1}{(2x+1)^3}$

$f : x \mapsto xe^{-x^2}$

$f : x \mapsto \mathrm{ch}(2x+1)$

$f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$

$f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$

★ Recherche d'une primitive de f par transformation d'expressions

✍ Exemple 1 : $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^2 - 1}$ *on décompose en élément simples*

✍ Exemple 2: $f : x \mapsto \tan^2 x$ *on fait apparaître une primitive usuelle*

✍ Exemple 3: $f : t \mapsto \sin^4 t$ *on linéarise*

✍ Exemple 4: $f : t \mapsto \cos^2 t \sin^3 t$ *on fait apparaître u'u^n*

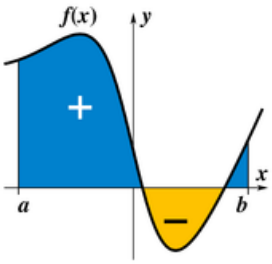
Cette méthode peut remplacer la linéarisation pour les produits du type $\cos^p x \sin^q x$ avec p ou q impairs.

✍ Exemple 5: $f : x \mapsto \cos(\omega x) e^{\alpha x}$ ou $f : x \mapsto \cos(\omega x) e^{\alpha x}$ avec ω et α réels

on utilise f(x) = Re ($e^{(\alpha+i\omega)x}$) ou Im ($e^{(\alpha+i\omega)x}$)

1.2 Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Rappel: Soit a, b∈ℝ, a ≤ b et f :[a, b]→ℝ, une fonction continue. Comme en Terminale, nous considérons pour l'instant que l'intégrale de a à b de f est le réel noté $\int_a^b f(t)dt$ qui est égal à l'aire algébrique du domaine délimité par la courbe représentative de f, l'axe (Ox) et les droites x = a et x = b, exprimée en unité d'aire



- **Extension à deux réels a et b quelconque** : Si b < a, on pose $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$
- **Extension aux fonctions à valeurs complexes** : Soit $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{C})$ est continue, pour tout réel a et b de I, on pose $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b Re(f)(t)dt + i\int_a^b Im(f)(t)dt$

L'intégrale de Riemann sera définie formellement et étudiée dans une chapitre ultérieur

★ Remarque : La variable d'intégration est muette i.e. $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = \ldots$

Proposition 6.3 : Propriétés de l'intégrale:
Soit f et g continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ et a, b et c trois réels de I.

① $\int_a^a f(t)dt = 0$ et $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$ *Convention*

② Relation de Chasles: $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$ *admis ici*

③ Linéarité: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \int_a^b [\alpha f(t) + \beta g(t)]dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt$ *admis ici*

④ Positivité: Si a ≤ b et f ≥ 0 sur [a, b] alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$ *admis ici*

⑤ Croissance de l'intégrale: Si a ≤ b et f ≤ g sur [a, b] alors $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$

⑥ Inégalité triangulaire: Si a ≤ b alors $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$

✍ Preuves de ⑤ et ⑥ :

1.3 Lien entre intégrales et primitives d'une fonction

Théorème fondamental de l'analyse : Soit f une fonction continue sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$,

$F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

Admis dans ce chapitre

★ *Conséquences* :

- Toute fonction continue sur I admet une infinité de primitives sur I.

Soit a fixé dans I, l'ensemble des primitives de f sur I est { $x \mapsto \int_a^x f(t)dt + k$, k décrit $\mathbb{K}$ }.

Soit G une primitive quelconque de f sur I et $a \in I$, on a : $\forall x \in I$, $G(x) = G(a) + \int_a^x f(t)dt$

- Si f est continue sur I, la notation : $\int^x f = \int^x f(t)dt$ désigne une primitive quelconque de f sur I. Par exemple, $\int^x e^{-t}dt = -e^{-x}$

- Voici quelques exemples de fonctions dont il ne faudra pas chercher à calculer une primitive. En effet, il est impossible d'expliciter leurs primitives à l'aide des fonctions usuelles :

$x \mapsto e^{\pm x^2}$ $\quad x \mapsto \frac{1}{\ln x}$ $\quad x \mapsto \frac{\sin x}{x}$.

On utilisera la notation $x \mapsto \int^x e^{t^2}dt$ pour exprimer une primitive de $x \mapsto e^{x^2}$

✍ Exercice : On définit la fonction $f : x \mapsto x\int_2^x e^{-t^2}dt$.

a. Justifier que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

b. Etudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$.

Corollaire 6.1 : Soit f une fonction continue sur I,

$\forall$ a, b$\in$I, $\int_a^b f(t)dt = \left[F(t)\right]_a^b = F(b)-F(a)$ où F est une primitive quelconque de f sur I.

✍ Preuves:

✍ Exercice : calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \int_0^1 (x^2-7x+3)dx$ $\quad$ $I_2 = \int_{-1}^0 \sqrt{t+2}dt$ $\quad$ $I_3 = \int_1^2 \frac{x}{(x^2+1)^3}dx$

$I_4 = \int_1^2 \frac{e^x}{e^x-1}dx$ $\quad$ $I_5 = \int_0^{\pi} \sin(2t)e^{\sin^2 t}dt$ $\quad$ $I_6 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \tan x.dx$

$I_7 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt$ $\quad$ $I_8 = \int_0^{\pi} \cos^2 t \sin^3 t dt$ $\quad$ $I_9 = \int_e^{e^2} \frac{du}{u\ln(u)}$

2. Formule d'intégration par parties.

Théorème 6.1: Si u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I alors

$\forall\, x\in I,\ \int^{x} u(t)v'(t)dt = u(x)v(x) - \int^{x} u'(t)v(t)dt$

✍Preuve :

Remarque : L'application de cette formule au calcul d'intégrale donne

Si u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I alors

$\forall\, a, b\in I,\ \int_a^b u(t)v'(t)dt = \left[u(t)v(t)\right]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$

✍ Exemples classiques d'utilisation

- **Où on dérive la puissance et on intégre exp** : Calculer $\int_0^1 xe^x dx$

- **Où on intègre la puissance et on dérive ln** : Calculer pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\int_1^x t^2 \ln t \, dt$

- **Où on fait apparaître la formule** : Expliciter $\int^x \ln t \, dt$ pour tout réel $x > 0$

3. Formule de changement de variable

3.1 La formule

Théorème 6.2: Soit f continue sur I et φ :[a, b] → I, de classe $\mathcal{C}^1$ sur [a, b].

On a $\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx \underset{t=\varphi(x)}{=} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt$

Preuve :

Dans la pratique, la formule du théorème 6.2 n'est pas utile, il faut retenir comment l'appliquer

3.2 Application au calcul d'intégrales et de primitives:

Méthode :
- On choisit le changement de variable
- On échange t et $\varphi(x)$
- On échange dt et $\varphi'(x)dx$.
- On modifie les bornes de l'intégrale.

Exemple 1 : Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx$ en posant cosx = t

✍ Exemple 2: $\int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt$ en posant t = sinx

✍ Exemple 3: Déterminer les primitives de $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}+$

♥ Un changement de variable à connaître

Lorsqu'on cherche les primitives d'un quotient de fonctions trigonométriques, on peut utiliser le changement de variable u = tan(t/2)

✍ Exemple : Expliciter $\int^{x} \dfrac{dt}{1+\sin t}$ sur I =]-π ;π[.