Exercices - Chapitre 7-Ensembles, applications.

♥ **A savoir refaire** - ♦ **Corrigé**

---

① Ensembles

♥ **7.1** Soit A et B deux parties de E, on note $\mathbb{I}_A$ et $\mathbb{I}_B$ les fonctions indicatrices respectives de A et de B. Déterminer les fonctions indicatrices de : E, ∅, A∩B, A∪B, $\overline{A}$.

7.2 Soit A et B deux parties de E, on définit la **différence symétrique** de A et de B comme suit: $A \Delta B = \{ x \in E, x \in A \cup B \text{ et } x \notin A \cap B \}$

a. Montrer que $\forall (A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2$, $A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$ et représenter A Δ B sur un diagramme.

b. Déterminer $\mathbb{R}^+ \Delta \mathbb{R}^-$, $]-\infty ; 2] \Delta [1 ; +\infty[$, A Δ E et A Δ ∅.

c. Déterminer A Δ A puis résoudre dans $\mathcal{P}(E)$, A Δ X = ∅

d. Démontrer que $\mathbb{I}_{A \Delta B} = \mathbb{I}_A + \mathbb{I}_B - 2 \times \mathbb{I}_A \times \mathbb{I}_B$ et en déduire que $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$

♦ **7.3** Discuter et résoudre dans $\mathcal{P}(E)$ les équations suivantes, où A et $B \in \mathcal{P}(E)$.

a. A∪X = B **b**. A∩X = B

Il est conseillé d'utiliser des diagrammes pour se représenter la situation.

7.4 ***Famille de parties***

a. Ecrire l'ensemble de définition des fonctions suivantes : $f(x) = \sqrt{\cos x + \frac{1}{2}}$ et g(x) = ln(tanx)

b. Montrer que $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n,n]$ et $\{0\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n+1}\right[$

---

② Applications

♥ **7.5** f désigne la fonction sinus, déterminer

$f(\mathbb{R})$ $f^{-1}(\mathbb{R})$ $f\left(\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\right)$ $f^{-1}(\{1\})$ $f^{-1}(\,]-1;2[\,)$ $f^{-1}(f([0;\pi])$ $f^{-1}(f([0;\pi/2])$ $f(f^{-1}(\mathbb{R}_+))$

♥ **7.6** Soit A et B deux parties de E et $f \in \mathcal{F}(E,F)$.

1. Dans cette question E = F = ℝ et $f(x) = x^2$, déterminer f([0, 2]), f([-3, 2]) et f([-2,1])

2. Montrer que :

a. $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$ **b**. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

c. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. A-t-on égalité ?

♥ **7.7** Soit A et B deux parties de F et $f \in \mathcal{F}(E,F)$.

1. Dans cette question E = F = ℝ et f(x) = cosx,

déterminer $f^{-1}([-4, 0])$, $f^{-1}([-1, -\frac{1}{2}])$ et $f^{-1}([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$.

2. Montrer que :

a. $A \subset B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$ **b**. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

c. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ **d**. $f^{-1}(\overline{A}) = \overline{f^{-1}(A)}$

♦ **7.8** Soit $f:E \to F$, $A \subset E$ et $B \subset F$.

a. Montrer que $f(f^{-1}(B)) \subset B$ et $A \subset f^{-1}(f(A))$

b Trouver une application f et des parties A et B de ℝ telles que : $f(f^{-1}(B)) \neq B$ et $f^{-1}(f(A)) \neq A$

On pourra utiliser l'exercice 7.5

c. Montrer que $\forall B \in \mathcal{P}(F)$, $f(f^{-1}(B)) = B$ ssi f est surjective

d. Montrer que $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $f^{-1}(f(A)) = A$ ssi f est injective

7.9 Soit f :$\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ définie par $\forall z\in\mathbb{C}$, $f(z) = z^2 + z + 1$.
a. Déterminer $f(\mathbb{C})$, $f(\mathbb{C}^*)$ et $f(\mathbb{R})$.
b. Déterminer $f^{-1}(\mathbb{C})$, $f^{-1}(\mathbb{C}^*)$ et $f^{-1}(\mathbb{R})$.
c. f est-elle injective ? Surjective ?

♥ **7.10** Pour les applications suivantes vérifier qu'elles sont bien définies puis dire si elles sont injectives, surjectives, bijectives.

a. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ **b.** $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $(x, y)\mapsto (2x + 3y,x + 2y)$

c. $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $(x, y)\mapsto (x - y,-2x + 2y)$ **d.** $u:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $n\mapsto 2n$

e. :$\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $v(n) = n/2$ si n est pair et $f(n) = 0$ si n est impair

f. $\varphi :\mathbb{C}\setminus\{i\}\to\mathbb{C}\setminus\{i\}$, $\varphi(z) = \dfrac{iz+i}{z-i}$ **g.** $\Phi :\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})\to\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\Phi(f) = f'$

h. Déterminer les applications $u\circ v$ et $v\circ u$. A quelle propriété du cours fait-on référence ?

7.11 Soit f :$[0,1]\to[0,1]$ définie par $f(x) = 1 - x$ si $s\in[0, \frac{1}{2}[$ et $f(x) = x-\frac{1}{2}$ si $x\in[\frac{1}{2}, 1]$.
Montrer que f est bijective et préciser f^{-1}.

♦ **7.12** On note D l'ensemble des nombres complexes de module supérieur à 1.
On considère $f :\begin{cases} D\to\mathbb{C} \\ z\mapsto \dfrac{z^2+1}{2z}\end{cases}$.
a. Démontrer que f est surjective. Est-elle injective ?
b. Déterminer l'image de $\mathbb{U}$ par f.

♦ **7.13** Soit E un ensemble et f :$E\to E$ une application telle que $f\circ f\circ f = f$.
Montrer que f injective $\Leftrightarrow$ f surjective.

♥ **7.14** Soit $f:E\to F$ une application. Montrer que: $\forall A, B\in\mathcal{P}(E)$, $f(A\cap B) = f(A)\cap f(B) \Leftrightarrow$ f injective

7.15 Soit $f : E\to F$ une application.
a. Soit Y une partie de F. Montrer que $f(f^{-1}(Y)) = Y\cap f(E)$.
Que se passe t'il si f est surjective ?
b. Soit A une partie de E et B une partie de F. Montrer que : $f(A\cap f^{-1}(B)) = f(A)\cap B$.

♦ **7.16** Soit A et B deux parties fixées d'un ensemble E.
On définit l'application f de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(B)$ par $\forall X\in\mathcal{P}(E)$, $f(X) = (X\cap A, X\cap B)$.
a. Prouver que f injective $\Leftrightarrow A\cup B = E$
b. Prouver que f est surjective $\Leftrightarrow A\cap B = \varnothing$

♥-♦ Quizz : Vrai ou faux ?

① Toute fonction strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ est injective.
② Si une application n'est pas injective alors elle est surjective.
③ Si une application est bijective alors elle est surjective.
④ L'application f :$\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ définie par $\forall z\in\mathbb{C}$, $f(z) = z^2$ est surjective.
⑤ Si f et g sont deux applications de E dans E telles que $f\circ g = Id_E$ alors f ou g est bijective.
⑥ La restriction d'une injection est une injection.
⑦ La restriction d'une surjection est une surjection.
⑧ Soit f :$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, on peut déterminer $f^{-1}([0,1]$ seulement si f est bijective.
⑨ Si f :$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une bijection alors f est continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}$.