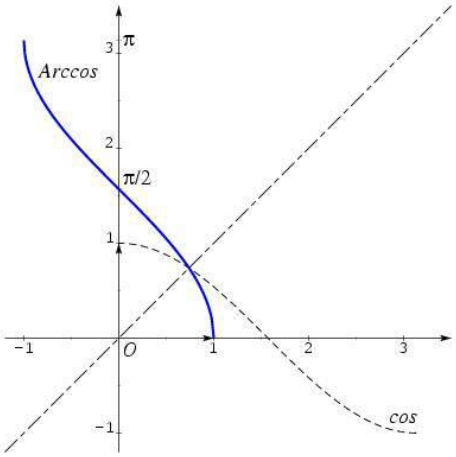
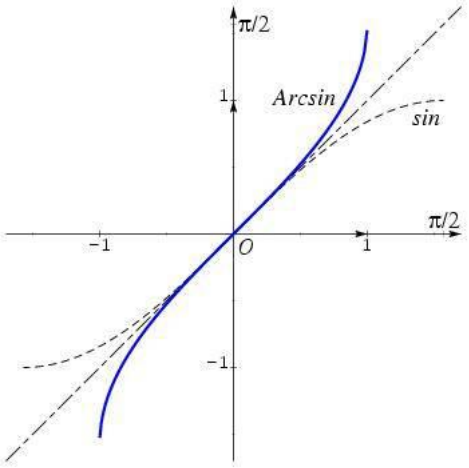
Fonctions usuelles 2

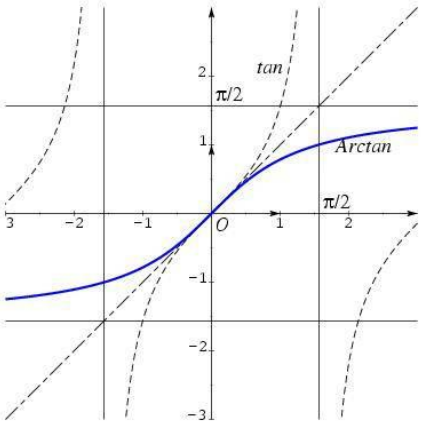
arccosinus



arcsinus



arctangente



<u>Formules à savoir démontrer:</u>

- $\forall x \in [-1, 1]$,
$\sin(\arccos x) = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$
- $\forall x \in [-1, 1]$, $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$
- $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x>0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x<0 \end{cases}$

<u>Limites à connaître:</u>

$\lim\limits_{x \mapsto 0} \frac{\arcsin(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \mapsto 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1$

Nom	**arccosinus**	**arcsinus**	**arctangente**
Notation	arccos	arcsin	arctan
Bijection de $I \to J$	$[-1, 1] \to [0;\pi]$	$[-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$	$\mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$
Parité	×	Impaire	Impaire
Période	×	×	×
$D_{f'}$	]-1, 1[	]-1, 1[	$\mathbb{R}$
f'(x)	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$
Monotonie	↘	↗	↗

Formulaire: Toutes les primitives usuelles

f(x)	F(x)	Conditions d'application
x^α, $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	valable sur $\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}$ valable sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ si $\alpha \in \mathbb{Z}$ - valable sur $]0, +\infty[$ si $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.
$\frac{1}{x-a}$	$\ln\lvert x-a\rvert$	valable sur $]-\infty, a[$ et $]a, +\infty[$
e^{ax} $a \in \mathbb{C}^*$	$\frac{1}{a}e^{ax}$	valable sur $\mathbb{R}$.
lnx	xlnx - x	valable sur $]0 ;+\infty[$
chx shx thx $\frac{1}{ch^2x}$	shx chx ln(chx) thx	} valables sur $\mathbb{R}$.
cosx sinx	sinx -cosx	valable sur $\mathbb{R}$
cos(ωt+φ) sin(ωt+φ)	$\frac{1}{\omega}\sin(\omega t+\varphi)$ $-\frac{1}{\omega}\cos(\omega t+\varphi)$	valable sur $\mathbb{R}$.
tanx cotanx $\frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$	-lnlcosxl lnlsinx| tanx	valable sur I où $\cos x \neq 0$ valable sur I où $\sin x \neq 0$ valable sur I où $\cos x \neq 0$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	arcsinx ou - arccosx	valable sur $]-1 ; 1[$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin\frac{x}{a}$	valable sur $]-a ; a[$, $a > 0$
$\frac{1}{1+x^2}$	arctanx	valable sur $\mathbb{R}$
$\frac{1}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$	valable sur $\mathbb{R}$, $a > 0$

Soit u une fonction dérivable sur I, sous réserve d'existence

- Une primitive de $u'u^{\alpha}$ est $\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ avec α réel

Avec $\alpha=\dfrac{1}{2}$, on obtient : une primitive de $u'\sqrt{u}$ est $\dfrac{2}{3}u\sqrt{u}$

- Une primitive de $\dfrac{u'}{u^{\beta}}=u'u^{-\beta}$ est $\dfrac{u^{-\beta+1}}{-\beta+1}=\dfrac{-1}{\beta-1}.\dfrac{1}{u^{\beta-1}}$ avec β réel, $\beta\neq1$

Avec $\beta=\dfrac{1}{2}$, on obtient : une primitive de $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ est $2\sqrt{u}$

- Une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ est $\ln|u|$
- Une primitive de $u'e^{u}$ est e^{u}
- Une primitive de $u'\cos(u)$ est $\sin(u)$
- Une primitive de $u'\sin(u)$ est $-\cos(u)$
- Une primitive de $\dfrac{u'}{1+u^2}$ est $\arctan(u)$
- Une primitive de $\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ est $\arcsin(u)$

Comment obtenir une primitive de f : $x\mapsto\dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ avec a, b et c réels, a ≠ 0.

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$

<u>1er cas : $\Delta > 0$</u> : On note x_1 et x_2 les racines de $ax^2 + bx + c$.

$\exists(A,B)\in\mathbb{R}^2$, $f(x) = \dfrac{A}{x-x_1}+\dfrac{B}{x-x_2}$ et donc une primitive de f est $F(x) = A\ln|x - x_1| + B\ln|x - x_2|$

<u>2ème cas : $\Delta = 0$</u> : On note x_0 la racine double de $ax^2 + bx + c$.

$f(x) = \dfrac{1}{(x-x_0)^2}$ et donc une primitive de f est $F(x) = \dfrac{-1}{x-x_0}$

<u>3ème cas : $\Delta < 0$</u> : $ax^2 + bx + c$ n'admet pas de racine réelle, on l'écrit sous forme canonique

$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{|\Delta|}{4a^2}\right]$ car $\Delta = -|\Delta|$.

On effectue alors le changement de variable $u = x+\dfrac{b}{2a}$ et on utilise $\displaystyle\int\frac{dt}{u^2+\alpha^2}=\frac{1}{\alpha}\arctan\left(\frac{u}{\alpha}\right)$

<u>Exemple</u> : Soit f : $x\mapsto\dfrac{1}{2x^2+2x+1}$. Le dénominateur n'a pas de racines réelles donc f est continue sur $\mathbb{R}$. Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

$$F(x) = \int^{x}\frac{dt}{2t^2+2t+1}=\frac{1}{2}\int^{x}\frac{dt}{t^2+t+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\int^{x}\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}\overset{u=t+\frac{1}{2}}{=}\frac{1}{2}\int^{x+\frac{1}{2}}\frac{dt}{u^2+\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}\Big[2\arctan(2u)\Big]^{x+\frac{1}{2}}$$

CCl : $F(x) = \arctan(2x+1)$