Chapitre 9: Equations différentielles-poly de cours

Dans ce chapitre I désigne un intervalle non trivial et $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Introduction : Notion d'équations différentielles :

Une équation différentielle (E) est une équation dont l'inconnue est une fonction le plus souvent notée y ou z, dérivable au moins une fois sur I. Cette équation doit nécessairement faire apparaître au moins une dérivée de la fonction inconnue.

Résoudre ou intégrer (E) sur I c'est trouver toutes les fonctions f solutions de (E) sur I.

Exemples : $(E_1) : y' = \dfrac{1}{x\ln x}$ $(E_2) : y' + y = e^t$ $(E_3) : y' + 2y = 3$ et $y(1) = 2$

$(E_4) : 2y'' + 3y' + y = 0$ $(E_5) : xz' + z = 1$ $(E_6) : t^2x'' + (1+t)x - 2 = 0$

$(E_9) : \dfrac{dC_A}{dt} = -kC_A$

Vocabulaire :

★ Le terme ne contenant ni y, ni ses dérivées est appelé **second membre** de l'équation.

★ On dit que (E) est **homogène** (ou **sans second membre**) lorsque le second membre est nul.

★ On dit que (E) est **linéaire** lorsque son équation homogène associée (H) vérifie la propriété : Si et g sont solution de (H) alors pour tous réels α et β, la fonction $h = \alpha f + \beta g$ est aussi solution de (H).

★ Les représentations graphiques des solutions de (E) sont appelées **courbes intégrales** de (E).

★ Une solution f de (E) est une **solution particulière** de (E).

★ On peut de plus imposer à y ou à une de ses dérivées de prendre une valeur donnée en un point donné : ce sont **les conditions initiales**.

Exemple fondamental: Déterminer les primitives de f sur I revient à résoudre l'équation différentielle $y' = f$

1. Equations différentielles linéaires du 1er ordre

1.1 Généralités

Def : On appelle équation différentielle linéaire du 1er ordre, toute équation pouvant s'écrire sous la forme: $y' + a(x)y = b(x)$ (E) *forme normalisée*
où a et b désignent des fonctions continues d'un intervalle I dans $\mathbb{K}$.

Exemples : (E_1) (E_2), (E_5) et (E_9)

Vocabulaire :

★ b(x) est le **second membre** de l'équation.

★ L'équation homogène associée à (E) est (H) : $y' + a(x)y = 0$

★ f est **solution** de (E) sur I ssi $\begin{cases} f \text{ est dérivable sur } I \\ \forall x \in I,\ f'(x) + a(x)f(x) = b(x) \end{cases}$

1.2 Structure de l'ensemble des solutions de (E)

Proposition 9.1: Les solutions de (E) s'obtiennent en faisant la somme des solutions de l'équation homogène associée (H) et d'une solution particulière.
Ainsi si f est une solution de (E), S = { f + h, h solution de (H) }

Conséquence : Pour résoudre (E) il suffit de résoudre (H) et de déterminer une solution particulière de (E).

✍ Preuve:

1.3 Résolution de l'équation homogène

Théorème 9.1: Soit a une fonction continue de I dans $\mathbb{K}$.

Les solutions de $y' + a(x)y = 0$ (H) sont les fonctions définies sur I par $\forall x \in I$, $f_\lambda(x) = \lambda e^{-A(x)}$ où A est une primitive de a sur I et λ décrit $\mathbb{K}$.

✍ Application: Résoudre dans $\mathbb{R}$: $(x^2+1)y' + xy = 0$ *Annexe 1*

✍ Preuve :

Remarques:

★ A est une primitive choisie arbitrairement donc elle peut s'écrire:

$A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)dt$ où x_0 est un réel quelconque de I.

★ La fonction nulle est toujours solution de l'équation homogène.

★ Si f est une solution de (H) différente de la fonction nulle alors f ne s'annule pas sur I.

★ On appelle solution générale de (H) la fonction $f_\lambda : x \to \lambda e^{-A(x)}$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

Cas particulier où la fonction a est constante sur I

Corollaire 9.2 : Soit a fixé dans $\mathbb{K}$. Les solutions de l'équation différentielle y' = ay sont toutes les fonctions $f_\lambda : x \mapsto \lambda e^{ax}$ où λ décrit $\mathbb{K}$.

Preuve : $y' = ay \Leftrightarrow y' - ay = 0$ et une primitive de $x \mapsto -a$ est $x \mapsto -ax$.

Exemple: Les solutions de l'équation différentielle y' = y sont les fonctions $f_\lambda : x \mapsto \lambda e^{x}$ où λ décrit $\mathbb{K}$.

1.4 Résolution de l'équation avec second membre

Par application de la proposition 9.1, le problème se ramène à trouver une solution particulière de (E).

★ Solution évidente : Il faut toujours regarder si on peut trouver facilement une solution particulière, en particulier une solution constante.

✍ Exercice: Résoudre dans $\mathbb{R}$: $(x^2+1)y' + xy = 2x$

★ Recherche directe d'une solution lorsque **a est constante sur I**.

① $b(x) = P(x)e^{mx}$ où P est un polynôme et m un complexe, on cherche une solution particulière de la même forme.

✍ Exercice: Résoudre dans $\mathbb{R}$: $y'-2y = (t^2 + 1)e^t$

② Si a est une constante réelle et b(x) = Re(P(x)e^{mx}) ou b(x) = Im(P(x)e^{mx}).
On détermine une solution particulière à valeurs complexes y_0 de y' + a(x)y = P(x)e^{mx} à l'aide du point précédent et on prend Re(y_0) ou Im(y_0).

✍ Exercice: Résoudre dans $\mathbb{R}$: y' - y = xcosx

Remarque : Si b(x) = $\alpha\cos(\omega x)$ ou b(x) = $\beta\sin(\omega x)$, on pourra directement chercher une solution particulière de la forme $x \mapsto \lambda\cos(\omega x) + \mu\sin(\omega x)$ *cf équation suivante*

★ Principe de superposition des solutions

Proposition 9.3: Si f_1 est solution de $y' + a(x)y = b_1(x)$ sur I et f_2 solution de $y' + a(x)y = b_2(x)$ sur I alors $f_0 = f_1 + f_2$ est solution de $y' + a(x)y = b_1(x) + b_2(x)$ sur I.

✍ Exercice: Résoudre dans $\mathbb{R}$: $y' + y = 2\sin^2 x$

★ Méthode de variation de la constante:

La solution générale de l'équation homogène étant $x \mapsto \lambda e^{-A(x)}$ on va chercher une solution de la forme $f: x \mapsto \varphi(x) e^{-A(x)}$ *la constante devient une fonction.*

f est solution de (E) $\Leftrightarrow \forall x \in I,\ \varphi'(x)e^{-A(x)} - a(x)\varphi(x)e^{-A(x)} + a(x)\varphi(x)e^{-A(x)} = b(x)$
$\Leftrightarrow \forall x \in I,\ \varphi'(x) = b(x)e^{A(x)}$

φ est donc une primitive de $x \mapsto b(x)e^{A(x)}$, sur I que l'on choisit arbitrairement.

On peut écrire $\varphi(x) = \int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}dt$ avec x_0 arbitrairement choisi dans I

↗ Attention: Cette méthode est générale mais elle peut mener à une recherche de primitive difficile à expliciter, ce n'est donc pas la méthode à privilégier à priori. Retenir l'égalité ci-dessous n'est pas utile, il suffit de remplacer y dans l'équation pour aboutir à $\varphi'(x)$ = ……

✍ Exercice : Résoudre dans $\mathbb{R}$: $y' + 2ty = e^{t-t^2}$

Remarque: Notons que nous avons trouvé une expression générale des solutions de (E) :

$f_\lambda : x \mapsto \lambda e^{-A(x)} + B(x)e^{-A(x)}$ où B est une primitive de de $x \mapsto b(x)e^{A(x)}$ sur I et k une constante quelconque de $\mathbb{K}$.

Ou encore $f_\lambda(x) = \left(\lambda + \int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}dt \right) e^{-A(x)}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et x_0 arbitrairement fixé dans I

1.4 Problème de Cauchy du 1er ordre

Proposition 9.4: Soit a et b deux fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$ et $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$,

$y(x_0) = y_0$ est une condition initiale et

Le problème de Cauchy $\begin{cases} y' + a(x)y = b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$, admet une unique solution sur I

✍ Preuve :

✍ Exercice: Résoudre dans $\mathbb{R}$, $(x^2 + 1)y' + xy = 2x$ et $y(0) = -1$.

Annexe 1 : Quelques courbes intégrales de $(x^2+1)y' + xy = 0$ avec Python

• Script pour tracer une famille de courbes:

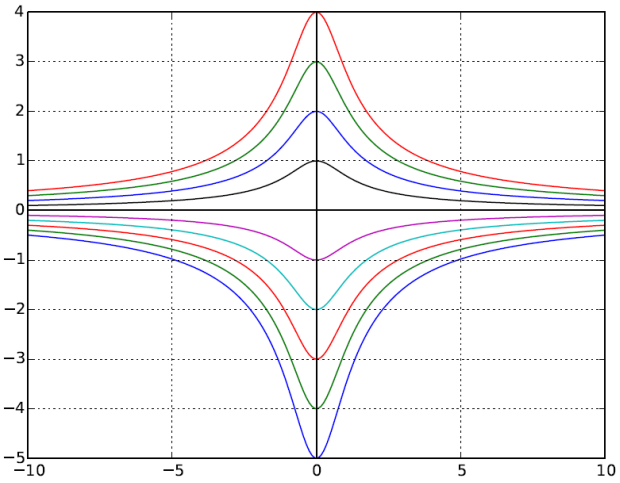
```
def f(t,k):
      return k/sqrt(t**2+1) # on définit fk
```

```
import numpy as np #on charge la bibliothèque numpy et on la nomme np
import matplotlib.pyplot as pl #on charge la bibliothèque graphique et on la nomme
pl
x=np.linspace(-10,10,200)#on crée une liste de valeurs pour x

for k in range(-5,5):
      y=f(x,k) #on calcule 200 valeurs de fk(x), on obtient ainsi 10 listes.
      pl.plot(x,y) #pour chaque valeur entière de k de -5 à 5, on trace le
                   graphe de fk

pl.grid() #on fait une grille, c'est plus joli
pl.axhline(color='black') #trace l'axe des abscisses
pl.axvline(color='black') #trace l'axe des ordonnées
pl.savefig('courbe-intégrale-1.pdf') #on sauve le graphique au format pdf
pl.show() #on demande à Python de nous montrer le résultat
```

• On admire le résultat



Annexe 2 : Quelques courbes intégrales de $y' + 2ty = e^{t-t^2}$ avec Python

On modifie le script (à vous...) et on obtient :

