Correction Exercice 1a : Bielle manivelle

1. Correction analyse cinématique

Question 1 : Fermeture de chaîne géométrique : $e\overrightarrow{x_1}+L\overrightarrow{x_2}=X\vec{x}$

$e\sin\alpha+L\sin\beta=0\rightarrow$ **(1)** $\boxed{\beta=\text{Arc}\sin\left(-\frac{e}{L}\sin\alpha\right)}$ et **(2)** $\boxed{X=e\cos\alpha+L\cos\beta}$

Question 2 : En dérivant la première relation et en injectant dans (1) et (2), on obtient :

$L\dot{\beta}\cos\beta=-e\dot{\alpha}\cos\alpha\rightarrow$ **(3)** $\boxed{\dot{\beta}=-\frac{e}{L\cos\beta}\dot{\alpha}\cos\alpha}$ et **(4)** $\boxed{\dot{X}=-e\dot{\alpha}\sin\alpha-L\dot{\beta}\sin\beta}$

En dérivant (3) et (4) avec une vitesse d'entrée $\dot{\alpha}$ constante.

$$L\ddot{\beta}\cos\beta-L\dot{\beta}^2\sin\beta=-e\ddot{\alpha}\sin\alpha-e\dot{\alpha}^2\cos\alpha=-e\dot{\alpha}^2\cos\alpha$$

$\rightarrow$ **(5)** $\boxed{\ddot{\beta}=\frac{1}{L\cos\beta}\left(L\dot{\beta}^2\sin\beta-e\dot{\alpha}^2\cos\alpha\right)}$

$$\ddot{X}=-e\ddot{\alpha}\sin\alpha-e\dot{\alpha}^2\cos\alpha-L\ddot{\beta}\sin\beta-L\dot{\beta}^2\cos\beta$$

$\rightarrow$ **(6)** $\boxed{\ddot{X}=-e\dot{\alpha}^2\cos\alpha-L\ddot{\beta}\sin\beta-L\dot{\beta}^2\cos\beta}$

Question 3 :

Approximations classiques : la première relation donne alors un angle β petit, donc $\sin\beta\approx\beta$ et $\cos\beta\approx 1$

$e\sin\alpha+L\sin\beta=0\rightarrow$ **(1')** $\boxed{\beta\approx-\frac{e}{L}\sin\alpha}$

la deuxième relation permet d'écrire **(2')** $\boxed{X\approx e\cos\alpha+L}$

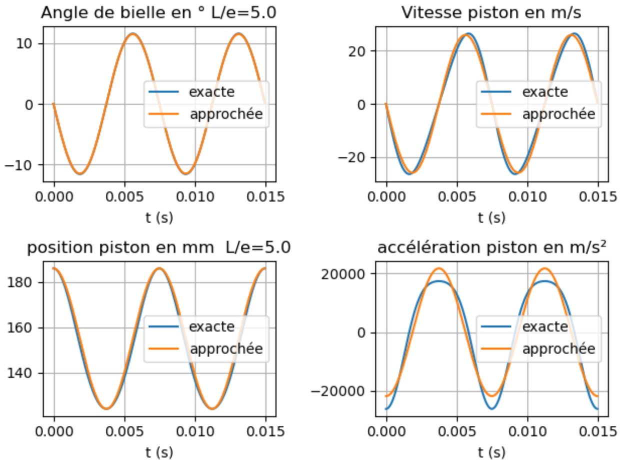
Puis pas dérivation (toujours avec $\dot{\alpha}$ = constante) :

$\rightarrow$ **(4')** $\boxed{\dot{X}\approx-e\dot{\alpha}\sin\alpha}\rightarrow$ **(6')** $\boxed{\ddot{X}\approx-e\dot{\alpha}^2\cos\alpha}$

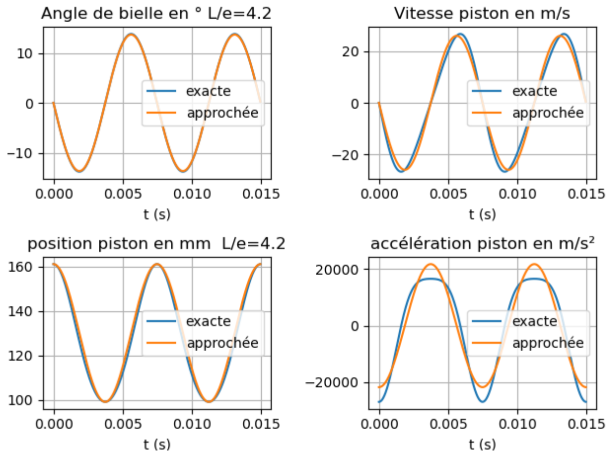
2. Correction code python

```
import numpy as np ; import matplotlib.pyplot as plt

# saisie des parametres
N=float(input("vitesse de rotation en tr/mn : "));w=N*np.pi/30
e=float(input("valeur de l'excentrique en mm : "));em=e/1000
L=float(input("longueur de la bielle en mm : "));Lm=L/1000
rapport=str(round(L/e,1)) # pour afficher le rapport à 1 décimale dans le titre
# pour 1 tour avec un pas de calcul de 1°"
t=np.arange(0,120/N,120/N/720) # plage temps pour 2 tour
alpha=np.arange(0,4*np.pi,4*np.pi/720) # plage alpha de 2 tours

beta=np.arcsin(-e/L*np.sin(alpha)) # angle de bielle beta fonction de alpha
dep=e*np.cos(alpha)+L*np.cos(beta) # calcul de X fonction de alpha et beta
betaprim=-em*w/Lm*(np.cos(alpha)/np.cos(beta)) # calcul de dérivée beta fonction de alpha
betasec=(betaprim**2*np.sin(beta)+e/L*w**2*np.sin(alpha))/np.cos(beta) # calcul de beta seconde
depprim=-em*w*np.sin(alpha)-Lm*betaprim*np.sin(beta) # calcul de X' fonction de alpha et beta
depsec=-em*w**2*np.cos(alpha)-Lm*betasec*np.sin(beta)-Lm*betaprim**2*np.cos(beta) # calcul de X"

# affichage des courbes exactes et approchées
plt.subplot(221) # Graphique matrice 2x2 - haut gauche
plt.title("Angle de bielle en ° L/e="+rapport) # titre
plt.plot(t, 180/np.pi*beta,label="exacte") ; plt.xlabel("t (s)") #nom de l'axe
plt.plot(t,-180/np.pi*e/L*np.sin(alpha),label="approchée") # beta=-e/L sin(alpha)
plt.legend() ;plt.grid(True) # affichage labels et grille
plt.subplot(223) # haut droite
plt.title("Position du piston en mm L/e="+rapport) # titre
plt.plot(t, dep,label="exacte"); plt.xlabel("t (s)")
plt.plot(t,L+e*np.cos(alpha),label="approchée") # X=L+e cos(alpha)
plt.legend(); plt.grid(True)
plt.subplot(222) # bas gauche
plt.title("Vitesse piston en m/s") ; plt.plot(t, depprim,label="exacte")
plt.xlabel("t (s)") ; plt.plot(t,-em*w*np.sin(alpha),label="approchée") # X' approché
plt.legend(); plt.grid(True)
plt.subplot(224) # bas droite
plt.title("accélération piston en m/s²")
plt.plot(t, depsec,label="exacte")
plt.xlabel("t (s)") ; plt.plot(t,-em*w**2*np.cos(alpha),label="approchée") # X" approché
plt.legend() ; plt.grid(True) # affichage des légendes et de la grille
plt.tight_layout(); plt.show() # Adaptation de l'Affichage
```

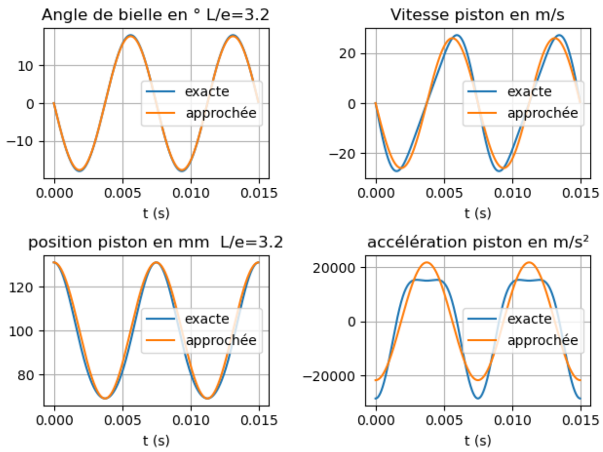
1 - Bielle ultra longue – Cas d'école : L = 5e



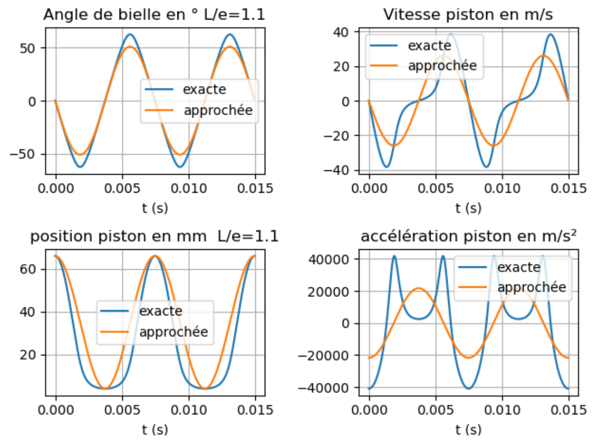
2 - Bielle longue – cas réel : L = 4.2 e



3 - Bielle courte – cas réel : L = 3.2 e



4 - Bielle ultra courte – Cas d'école : L = 1.1 e



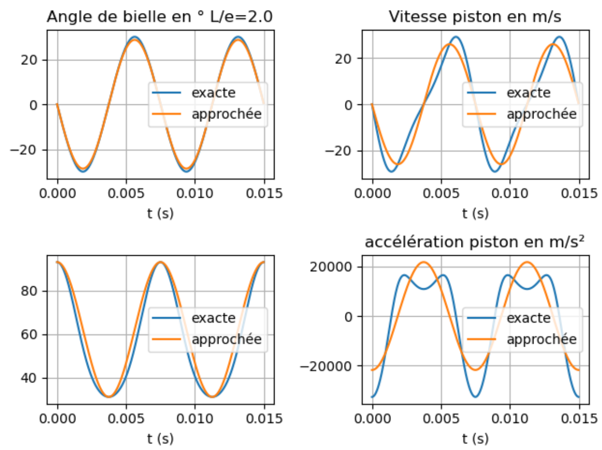
Dans le cas 1, l'approximation de petit angle pour β est très valable (on est nettement au dessous de 15°). L'approximation pour X est elle aussi parfaitement justifiée.

Dans les cas 2 et 3, correspondant à des moteurs existant, les approximations sur β et X restent bonnes, et pourtant β sort du domaine classique des petits angles (15°) dans le cas 3.

Dans ces trois cas, l'approximation pour la vitesse est acceptable, les extrema sont du même ordre. C'est clairement plus douteux pour l'accélération et les extrema exacts et approchés diffèrent.

Notez les valeurs impressionnantes de l'accélération dans tous les cas > 2000 g !

5 - Bielle très courte – Cas d'école : L = 2 e



Dans le 4ème cas l'approximation n'est clairement plus valable, il y a plus de 30% d'erreur sur la vitesse, et pratiquement 100% sur l'accélération. Aucune des courbes ne ressemble à une sinusoïde.

Dans tous les cas les extrema de la position sont les mêmes : L-e et L+e, ce qui donne une course = 2e

Dans le cas 5 : jusqu'à L = 62 mm (L = 2e), assez étonnamment la valeur approchée et la valeur théoriques sont encore très proches pour β et X alors que l'on est clairement sorti du domaine des petites angles.