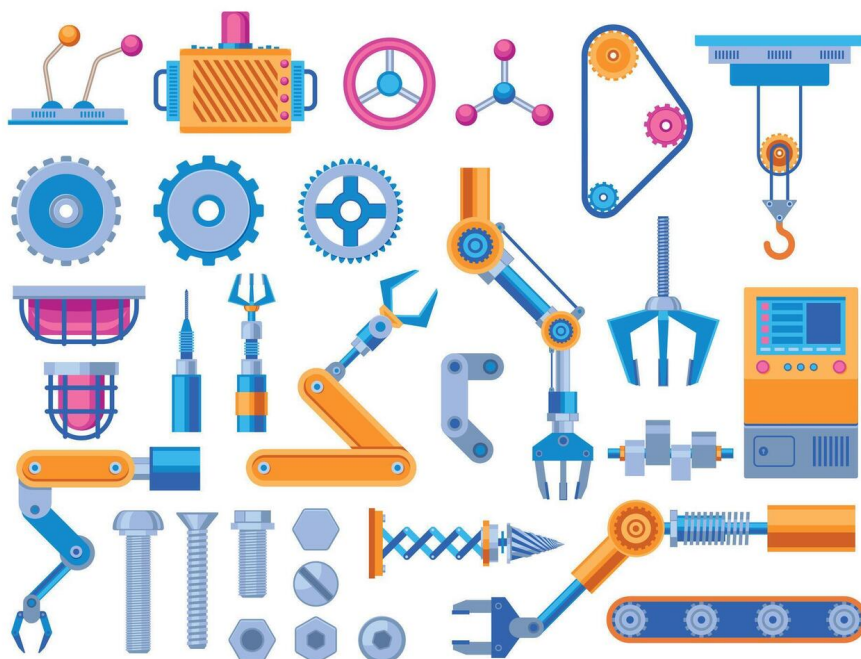




MODÉLISATION DES MÉCANISMES

Cours

v2.0

Lycée Michelet – 5 Rue Jullien – 92170 Vanves – Académie de Versailles

Compétences visées:

- | | |
|--------------|---|
| B1-04 | Identifier et justifier les hypothèses nécessaires à la modélisation. |
| B2-13 | Modéliser la cinématique d'un ensemble de solides. |
| C1-04 | Proposer une démarche permettant d'obtenir une loi entrée-sortie géométrique. |
| C2-05 | Caractériser le mouvement d'un repère par rapport à un autre repère. |
| C2-06 | Déterminer les relations entre les grandeurs géométriques ou cinématiques. |
| E1-05 | Lire et décoder un document technique. |
| E2-05 | Produire des documents techniques adaptés à l'objectif de la communication. |
| F1 | Concevoir l'architecture d'un système innovant |

Table des matières

1	Préambule	3
2	Hypothèses – Définitions	3
2.1	Les solides	3
2.2	Les contacts	3
2.3	Degrés de liberté autorisés par un contact	5
2.4	Liaisons normalisées	7
3	Modélisation cinématique d'un mécanisme	10
3.1	Classes d'équivalence	10
3.2	Graphes de liaisons	11
4	Représentation d'un modèle : le schéma cinématique	13
4.1	Description	13
4.2	Méthode de construction	13
5	Modélisation plane	14
5.1	Définition du mouvement plan	14
6	Analyse géométrique d'un mécanisme	14
6.1	Construction géométrique	14
6.2	Paramétrage	14
6.3	Loi entrée-sortie	15
7	Annexe : vecteurs, projections et produit scalaire	15
7.1	Définitions	15
7.2	Repérage des vecteurs	16
7.3	Produit scalaire	16
7.4	Changement de bases	17

1 Préambule

De nombreuses performances d'un système sont liées à ses mouvements, à la manière dont ceux-ci sont obtenus. L'objectif du chapitre est de montrer les outils permettant de modéliser des systèmes mécaniques pour ensuite pouvoir mener différentes études à partir de ce modèle.

2 Hypothèses – Définitions

2.1 Les solides

Dans tout ce cours, on fait l'hypothèse que les éléments étudiés ne se déforment pas.



Définition *Solide indéformable*

On définit donc un **solide indéformable** par un ensemble de points dont la distance entre eux ne varie pas au cours du temps :

$$\forall A \in S, \forall B \in S, \|\vec{AB}\| = \text{cste} \quad \forall t$$

2.2 Les contacts

Lorsqu'un système est constitué de plusieurs solides indéformables, certains sont en contact ; on dit alors qu'ils sont en liaison les uns avec les autres.



Définition *Liaison entre solides*

Une liaison entre deux solides est une relation de contact entre ces deux solides.

Ce contact est caractérisé par sa géométrie (point, droite, arc de cercle, plan...) et par les mouvements relatifs qu'il autorise. L'analyse des liaisons se fait toujours en considérant **la nature des surfaces de contact**. Si un contact change de nature, la liaison change et le modèle défini n'est alors plus valable.



Remarque

D'un point de vue physique, les zones de contact réelles entre deux solides sont surfaciques. Par contre, la modélisation par solides rigides des pièces réelles introduit la notion de zone de contact ponctuelle et linéique.

2.2.1 Contact ponctuel



Définition *Contact ponctuel*

Deux solides S_1 et S_2 sont en contact ponctuel si l'intersection de leur représentation géométrique est un point.

Exemples : contact sphère/sphère, sphère/plan, cône/plan, cylindre/cylindre...



FIGURE 1 – Exemples de contacts ponctuels

2.2.2 Contact linéique



Définition *Contact linéique*

Deux solides S_1 et S_2 sont en contact linéique si l'intersection de leur représentation géométrique est une ligne (droite ou cercle).

Exemples : contact cylindre/plan, sphère/cylindre, dentures d'engrenages ...

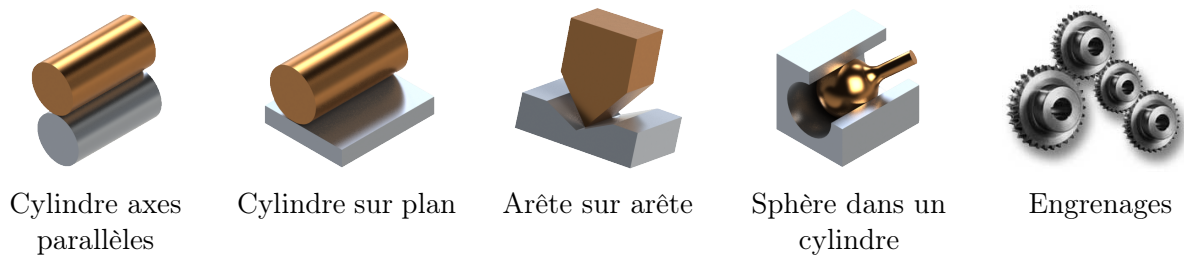


FIGURE 2 – Exemples de contacts linéiques

2.2.3 Contact surfacique



Définition *Contact surfacique*

Le cas général est d'avoir autour d'un point A , pour deux solides S_1 et S_2 , deux surfaces (plane ou cylindrique) qui ont la même forme géométrique en contact.

Exemples : contact plan/plan, arbre/alésage de même diamètre, sphère dans sphère...

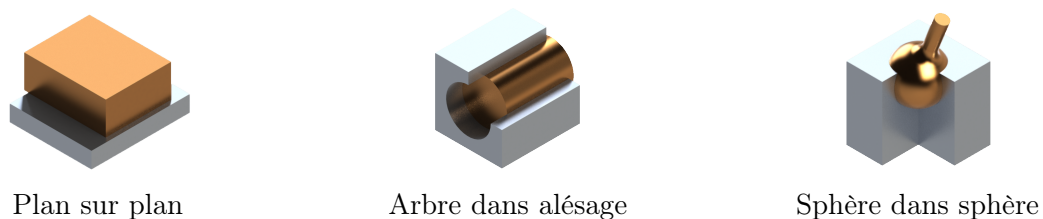


FIGURE 3 – Exemples de contacts surfaciques

2.3 Degrés de liberté autorisés par un contact

2.3.1 Repères

Pour caractériser la taille et la position des éléments d'un système, il est nécessaire de définir un (ou plusieurs) repère qui sera attaché à un référentiel donné.



Définition Repère

Un repère est constitué d'une origine et d'une base orthonormée b constituée de 3 axes. Ainsi, $R_0 = (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) = (O_0, b_0)$ est le repère d'origine O_0 et de base b_0 .

Étudier le mouvement d'un solide S_1 par rapport à un solide S_0 muni d'un repère R_0 revient à l'étudier par rapport à ce repère :

$$\text{Mvt}_{S_1/S_0} = \text{Mvt}_{S_1/R_0}$$

On distingue plusieurs types de repères pour exprimer la position d'un point dans l'espace (FIGURE 4). Le repère cartésien est le plus utilisé car le plus simple à mettre en œuvre. Le repère cylindrique est utile quand on veut mettre en évidence une rotation. Le repère sphérique est surtout utilisé lorsque l'on a trois rotations.

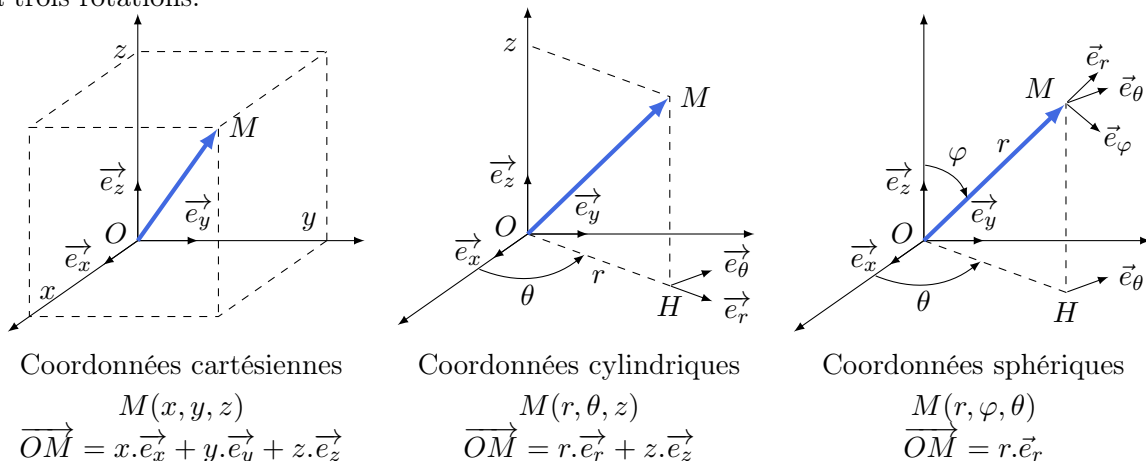


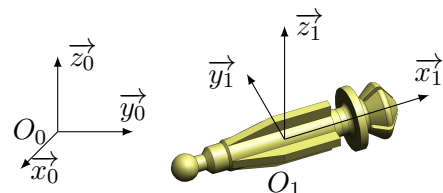
FIGURE 4 – Coordonnées d'un point M dans les 3 systèmes de coordonnées

2.3.2 Paramètres de position d'un solide dans l'espace

Afin de positionner un solide dans l'espace, il est nécessaire de connaître le nombre de paramètres nécessaires au positionnement d'un solide S_1 par rapport à un référentiel S_0 muni d'un repère $R_1(O_0, b_0)$. Le solide S_1 est muni d'un repère $R_1(O_1, b_1)$.

Il est usuel en mécanique de considérer :

- les trois coordonnées du point origine du repère R_1 dans le repère R_0 définissant 3 translations ;
- les trois angles qui définissent la position de la base du repère R_1 par rapport à celle du repère R_0 , définissant 3 rotations.



2.3.3 Degrés de liberté



Définition Degrés de liberté

6 paramètres sont donc nécessaires pour repérer un solide par rapport à un autre solide. On parle de **degrés de liberté**.

3 Rotations	3 Translations
R_x , rotation d'axe $(A, \vec{x})$	T_x , translation d'axe $\vec{x}$
R_y , rotation d'axe $(A, \vec{y})$	T_y , translation d'axe $\vec{y}$
R_z , rotation d'axe $(A, \vec{z})$	T_z , translation d'axe $\vec{z}$

TABLE 1 – Possibilités de mouvement d'un solide dans l'espace

Ces possibilités de mouvement sont notées généralement dans un tableau à deux colonnes appelé tableau des degrés de liberté :

$$\begin{vmatrix} R_x & T_x \\ R_y & T_y \\ R_z & T_z \end{vmatrix}$$



Définition

Une liaison entre deux solides supprime des degrés de liberté.

Pour caractériser ces liaisons, on définit un repère local $R(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ à partir des caractéristiques géométriques des contacts (point, droite, centre, axe, normale...).

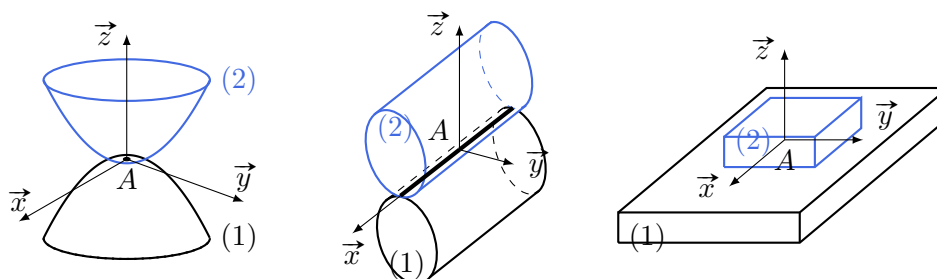


FIGURE 5 – Nature du contact et repère local associé

Un repère est ensuite associé à chaque solide. On détermine alors les **possibilités de mouvements** autorisés entre les solides (d'un repère par rapport à l'autre), **sans changer la nature du contact**.

Le nombre de degrés de liberté d'une liaison entre deux solides est le nombre de **mouvements relatifs indépendants** que la liaison autorise entre ces deux solides **sans changer la nature du contact**. Ce nombre est égal au plus à 6. S'il est égal à 0, la liaison est appelée **liaison encastrement**. S'il est égal à 6 la liaison est dite **libre**.

2.4 Liaisons normalisées

2.4.1 Hypothèses de modélisation des liaisons

Les liaisons courantes rencontrées en mécanique sont normalisées. Un nom et une schématisation sont associés à chaque liaison. Ces liaisons sont considérées comme géométriquement parfaites, c'est à dire qu'elles vérifient les hypothèses suivantes :

- les pièces mécaniques sont des solides indéformables ;
- les surfaces sont géométriquement parfaites (FIGURE 6) ;
- les jeux sont nuls (FIGURE 7) ;
- le type de contact reste le même au cours du mouvement.

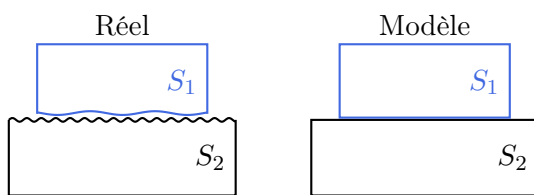


FIGURE 6 – Surface réelle (avec des défauts amplifiés) et modèle associé

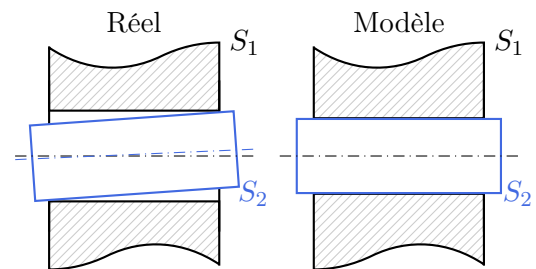


FIGURE 7 – Guidage réel avec jeu (avec des défauts amplifiés) et modèle associé

La liaison parfaite est donc une liaison théorique tant d'un point de vue géométrique que d'un point de vue de la nature physique du contact.

2.4.2 Liaisons élémentaires

Une liaison élémentaire entre deux solides S_1 et S_2 est obtenue à partir du contact d'une surface géométrique élémentaire liée à S_1 sur une surface géométrique élémentaire liée à S_2 . Les surfaces géométriques élémentaires obtenues à partir des principaux procédés d'usinage sont :

- le plan ;
- le cylindre ;
- et la sphère.

Le TABLEAU 2 donne les différentes combinaisons de surfaces et les noms de 6 liaisons normalisées :

- contact plan/sphère : liaison ponctuelle ou liaison sphère-plan ;
- contact plan/cylindre : liaison linéaire rectiligne ou liaison cylindre-plan ;
- contact plan/plan : liaison appui plan ;
- contact cylindre/sphère : liaison linéaire annulaire ou liaison sphère-cylindre ;
- contact cylindre/cylindre : liaison pivot glissant ;
- contact sphère/sphère : liaison rotule ou liaison sphérique.

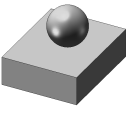
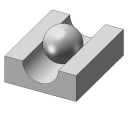
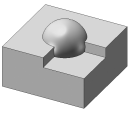
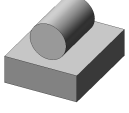
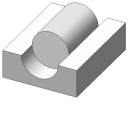
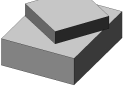
	Plan	Cylindre	Sphère
Sphère			
Cylindre			
Plan			

TABLE 2 – Association de surfaces élémentaires

2.4.3 Liaisons composées

Une liaison composée est obtenue par association cohérente de liaisons élémentaires. Le TABLEAU 3 donne quelques associations possibles.

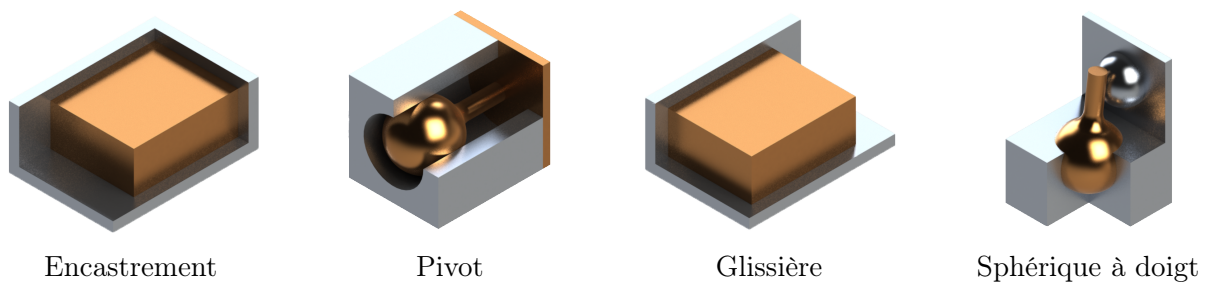
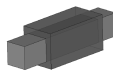
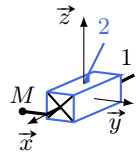
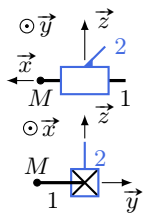
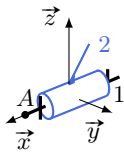
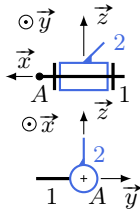
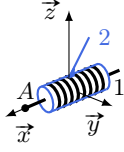
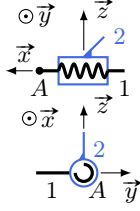
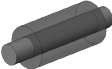
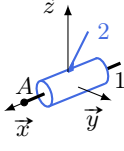
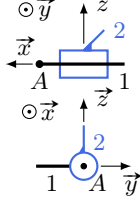
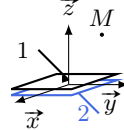
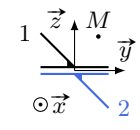
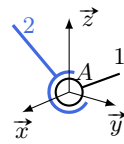
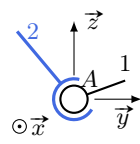
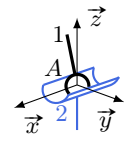
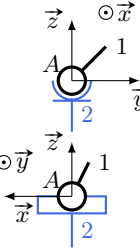
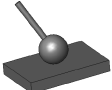
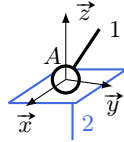
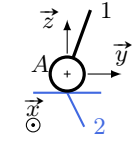


TABLE 3 – Liaisons composées

2.4.4 Tableau des liaisons normalisées

Les liaisons sont définies par leurs éléments géométriques. Il est alors aisé d'en déduire les degrés de liberté. L'ensemble est résumé dans le TABLEAU 4 à **connaître par cœur**.

Nom	Caractéristique	Degrés de liberté	Schéma spatial (3D)	Schéma(s) plan(s) (2D)	Mobilités
Glissière 	Direction $\vec{x}$				

Nom	Caractéristique	Degrés de liberté	Schéma spatial (3D)	Schéma(s) plan(s) (2D)	Mobilités
Pivot 	Axe $(A, \vec{x})$				
Hélicoïdale 	Axe $(A, \vec{x})$				
Pivot glissant 	Axe $(A, \vec{x})$				
Appui plan 	Normale au plan $\vec{z}$				
Sphérique 	Centre de la sphère A				
Sphère cylindre 	Centre de la sphère A Direction $\vec{x}$				
Sphère plan 	Point de contact A Normale au plan $\vec{z}$				

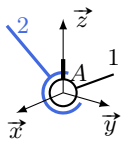
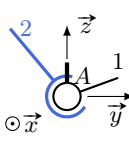
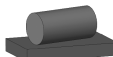
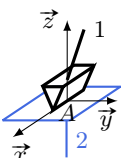
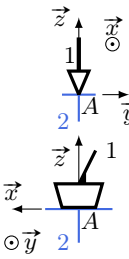
Nom	Caractéristique	Degrés de liberté	Schéma spatial (3D)	Schéma(s) plan(s) (2D)	Mobilités
Sphérique à doigt 	Centre de la sphère A Rotation bloquée $\vec{y}$, direction du doigt $\vec{z}$				
Linéaire rectiligne (ou cylindre plan) 	Droite de contact $(A, \vec{x})$ Normale au plan $\vec{z}$				

TABLE 4 – Tableau des liaisons normalisées

3 Modélisation cinématique d'un mécanisme



Définition Mécanisme

Un mécanisme ou système mécanique est un ensemble de solides reliés entre eux par des liaisons.

La définition d'un modèle du mécanisme nécessite la mise en place :

- des classes d'équivalence ou groupes de pièces sans mouvement relatif ;
- des liaisons entre ces classes d'équivalence.

3.1 Classes d'équivalence

3.1.1 Définition



Définition Classes d'équivalence

Une **classe d'équivalence cinématique** est un ensemble de pièces **qui n'ont aucun mouvement relatif** entre elles. Elles sont liées complètement entre elles (par des liaisons encastrement) et ont donc le même mouvement.

Afin d'identifier les classes d'équivalence, il faut rechercher les éléments assurant la suppression totale des degrés de liberté entre les pièces. Il peut s'agir par exemple de l'utilisation d'éléments filetés, d'un montage collé ou d'un assemblage monté serré. Dans la suite de cours, seuls les mouvements entre classes d'équivalence seront étudiés.



Remarque

Si les dessins techniques ou des représentations volumiques sont à disposition, il peut être pertinent de colorier chaque classe d'équivalence d'une couleur différente.

3.1.2 Règles à respecter pour la détermination des classes d'équivalence

- les pièces qui se déforment (ressorts, amortisseurs...) ne sont pas prises en compte dans la modélisation des liaisons (FIGURE 8a) ;
- les éléments roulants des roulements (qui constituent chacun un groupe cinématique) ne sont pas pris en compte. On ne s'intéresse qu'aux bagues intérieure et extérieure (voir FIGURE 8b) ;

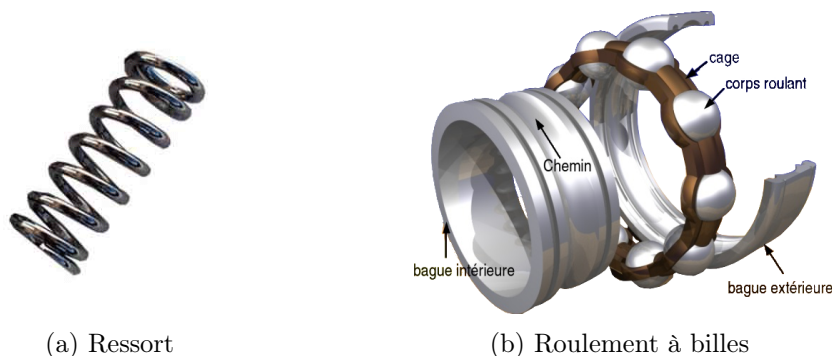


FIGURE 8 – Exemples de composants à ne pas prendre en compte

3.2 Graphe de liaisons

3.2.1 Définition



Définition *Graphe de liaisons*

Le graphe de liaisons est une représentation graphique qui répertorie les classes d'équivalence et les modèles de liaisons entre celles-ci (exemple FIGURE 9). Dans ce graphe :

- chaque classe d'équivalence cinématique est représentée par un cercle dans lequel le nom de la classe est indiqué ;
- chaque liaison est indiquée par un arc tracé entre deux classes d'équivalence. Pour chaque liaison, son nom et ses caractéristiques géométriques sont indiqués.

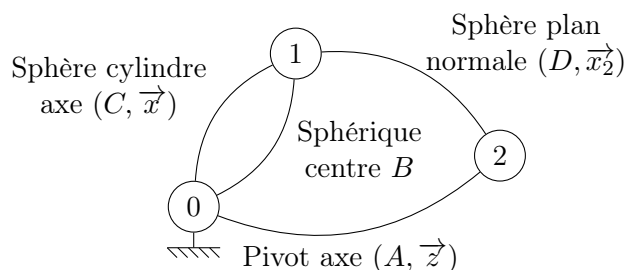


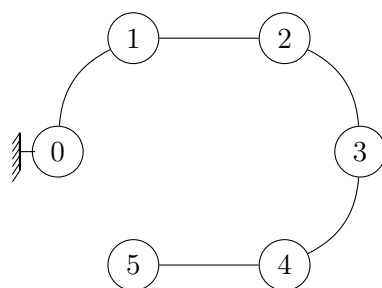
FIGURE 9 – Exemple de graphe de liaisons d'un mécanisme

3.2.2 Méthode de construction

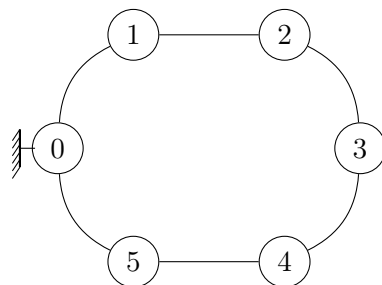
La construction du graphe de liaisons peut conduire à deux cas particuliers classiques :

- une **chaîne ouverte** (voir FIGURE 10a) est constituée d'une association en série de solides (ou classes d'équivalence) et de liaisons ;
- une **chaîne fermée** (voir FIGURE 10b) est constituée d'un ensemble de solides (ou classes d'équivalence) reliés par de multiples liaisons. Dans le cas d'une chaîne fermée simple, une unique boucle apparaît dans le graphe de liaisons et les paramètres ne sont plus indépendants.

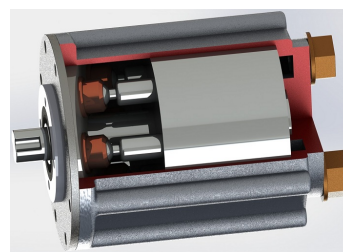
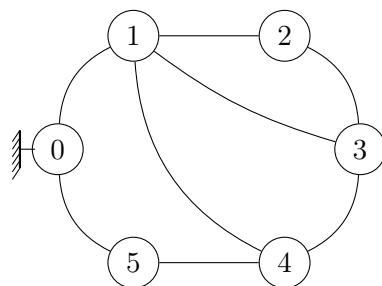
Lorsque le modèle du mécanisme comporte plusieurs boucles, le modèle (ou même le mécanisme par extension) est dit à **chaînes complexes** (voir FIGURE 10c).



(a) Chaîne ouverte - exemple d'un robot



(b) Chaîne fermée simple - exemple de la ponceuse



(c) Chaînes complexes - exemple d'une pompe à pistons axiaux

FIGURE 10 – Graphe de liaisons et structure de mécanismes

4 Représentation d'un modèle : le schéma cinématique

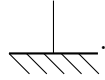
4.1 Description

Le schéma cinématique d'un mécanisme est une figure plane ou spatiale qui permet :

- d'aider à la compréhension du fonctionnement du mécanisme ;
- de mener des études théoriques (géométriques, cinématiques, dynamiques...).

Le schéma cinématique est une représentation du graphe des liaisons au moyen des symboles des liaisons normalisés. Il doit être représentatif du mécanisme réel.

4.2 Méthode de construction

- choisir une représentation adaptée en utilisant les figures ou les vues données (2D : choix d'axes représentatifs ou 3D perspective isométrique en général) ;
- choisir une couleur par classe d'équivalence et mettre ces couleurs sur le graphe des liaisons ;
- mettre en place les symboles normalisés des liaisons autour de ces points, de ces axes en utilisant les caractéristiques des liaisons pour les déplacer si nécessaire (utiliser obligatoirement les deux couleurs des classes d'équivalence identifiées) ;
- relier les sorties des symboles pour reconstituer les classes d'équivalence (relier les couleurs entre elles) en respectant le parallélisme. Reporter les numéros des classes d'équivalence si besoin sur le schéma. Utiliser le symbole du bâti (pièce fixe) à plusieurs endroits si nécessaire .

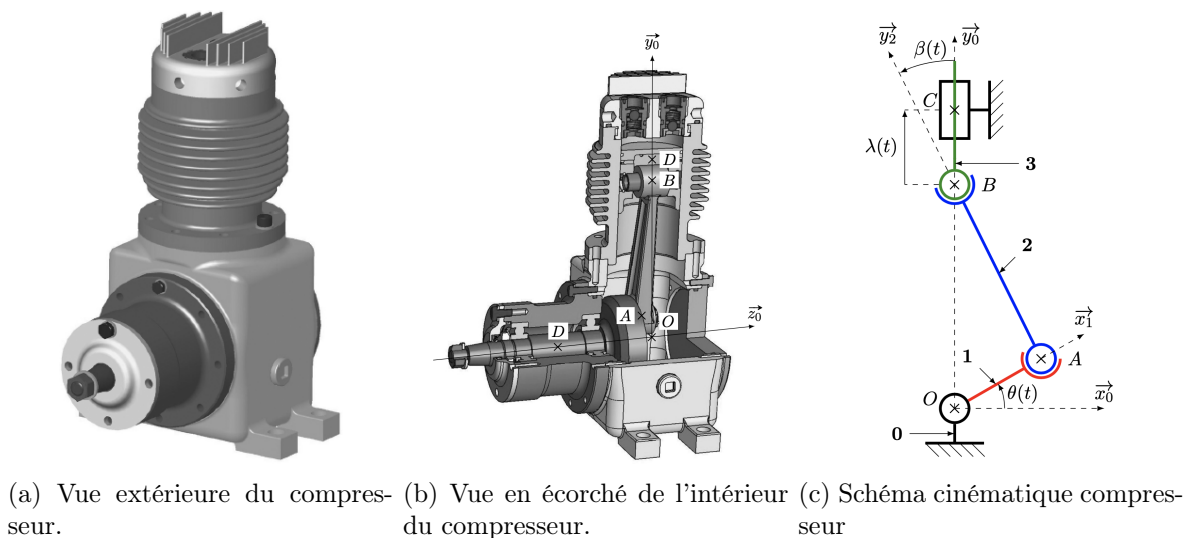


FIGURE 11 – Exemple schéma cinématique

5 Modélisation plane

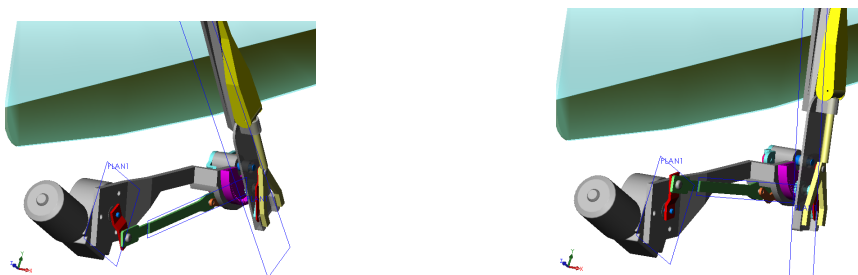
5.1 Définition du mouvement plan



Définition *Mouvement plan*

Le mouvement d'un solide S_2 par rapport à un solide S_1 est dit plan si il existe un plan Π_2 lié à S_2 qui reste coïncident avec un plan Π_1 lié à S_1 au cours du mouvement.

Exemple : essuie-glace



Les plans représentés par des cadres sur la figure ci-dessus coïncident entre eux au cours du mouvement.

Conséquences : le paramétrage du solide S_2 par rapport au solide S_1 ne nécessite que **3 paramètres** (positionnement d'un point dans un plan ou dans l'espace) :

- 2 translations dans le plan ;
- 1 rotation d'axe perpendiculaire au plan (on parle d'articulation en un point donné dans ces conditions).

6 Analyse géométrique d'un mécanisme

6.1 Construction géométrique

En utilisant l'hypothèse de solides indéformables et les degrés de liberté des liaisons, le modèle établi permet de construire le mécanisme dans différentes configurations, ce qui permet de déterminer le débattement angulaire d'une pièce, la course d'un solide en translation, etc.

6.2 Paramétrage

Pour pouvoir déterminer le mouvement du mécanisme de manière systématique, il est nécessaire de définir un paramétrage qui permettra de mener différentes études.

Paramétrage des solides : à chaque solide, on associe un repère. Il est construit en prenant en compte les caractéristiques géométriques du solide et de ses liaisons avec les autres solides. On définit ensuite les distances entre les points particuliers de chaque solide.

Paramétrage des liaisons : on associe à chaque liaison autant de paramètres que de degrés de liberté. Pour chaque angle introduit, on réalise une figure plane (ou géométrale) qui permettra de mener des calculs justes et précis (cf. Annexe).

6.3 Loi entrée-sortie

L'objectif est de déterminer des relations entre les paramètres géométriques des solides et les paramètres des liaisons de manière à comprendre le fonctionnement du mécanisme. On choisit un paramètre de liaison particulier appelé entrée (c'est généralement le mouvement piloté par un moteur ou un vérin linéaire) et on s'intéresse à un paramètre de liaison donné appelé sortie.



Définition Loi entrée-sortie

La loi entrée-sortie est une relation (souvent non linéaire) qui relie le paramètre de sortie aux paramètres d'entrée en ne faisant intervenir que les paramètres géométriques de définition des solides (longueur fixe, angle fixe).

Elle est généralement obtenue à partir de la fermeture géométrique (relation de Chasles obtenue en passant par les points caractéristiques des différents solides et en parcourant la chaîne fermée).

On projette ensuite la relation vectorielle obtenue dans une base judicieusement choisie de manière à faire apparaître tous les paramètres (on choisit en général une base intermédiaire entre toutes les bases définies pour limiter les projections).

6.3.1 Méthodologie : obtenir une loi entrée-sortie

- à partir des équations projetées, si on souhaite déterminer une distance variable, on isole les cosinus et sinus des angles qui ne nous intéressent pas, on élève au carré et on utilise la relation de trigo. $\cos^2 + \sin^2 = 1$ ou bien on utilise les relations $\sin(\arccos(\theta)) = \cos(\arcsin(\theta)) = \sqrt{1 - \theta^2}$;
- si on désire une relation entre les angles, on effectue le rapport des équations pour faire apparaître des tangentes ;
- on ne garde que les solutions mathématiques ayant un **sens physique**.

7 Annexe : vecteurs, projections et produit scalaire

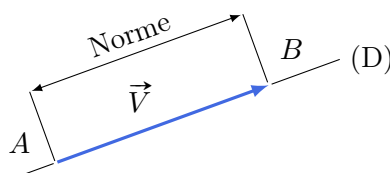
Les théories de la mécanique utilisent des grandeurs qui peuvent mathématiquement être représentées par des vecteurs (vitesse, position, accélération, force...). Ces vecteurs sont des éléments d'espaces vectoriels euclidiens sur $\mathbb{R}$ de dimension 3 noté (E) . Les grandeurs vecteurs sont intrinsèques, elles sont indépendantes de la base dans laquelle elles sont représentées. Ces espaces sont munis d'opérations définies ci-dessous.

7.1 Définitions

Soient deux points A et B . (A, B) est appelé un bipoint. Un bipoint est défini par son origine A , son sens (de A vers B), sa direction (droite (AB)) et sa norme (distance de A à B). Un vecteur est l'ensemble des bipoints équipollents (parallèles, même sens, même norme) au bipoint (A, B) .

Pour le vecteur, on définit :

- son support : la droite $(D) = (AB)$
- le sens : de A vers B
- sa norme : la distance de A vers B , notée $\|\vec{V}\|$.



7.2 Repérage des vecteurs

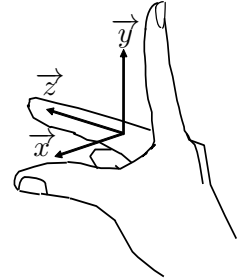
7.2.1 Base

L'association de trois vecteurs indépendants forme une base b de (E) , noté $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Tout vecteur $\vec{V}$ se décompose de manière unique sur cette base :

$$\vec{V} = v_x \cdot \vec{x} + v_y \cdot \vec{y} + v_z \cdot \vec{z}$$

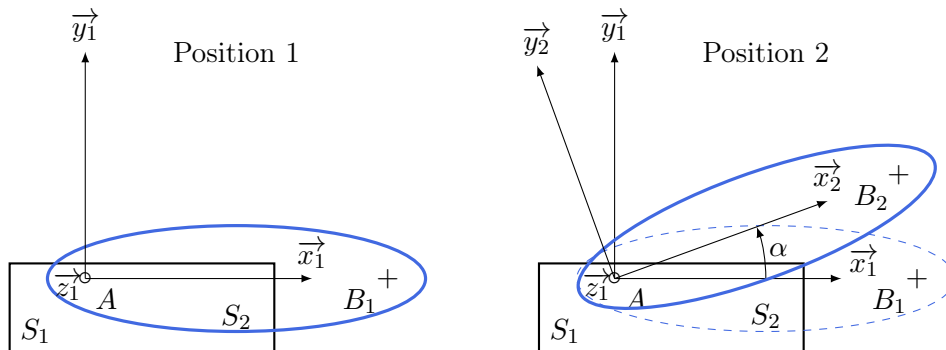
7.2.2 Base orthonormée directe

On utilisera en Sciences de l'Ingénieur des bases orthonormées directes $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, c'est-à-dire des vecteurs orthogonaux, de même norme égale à 1. La base est directe si elle vérifie la « règle de la main droite ».



7.2.3 Expression d'un vecteur dans différents repères

Considérons un système de solides S_1 et S_2 liés par une articulation (pivot) de centre A et d'axe perpendiculaire au plan de la feuille. Considérons le point B appartenant au solide S_2 à une distance L de A . Le solide S_1 est fixe par rapport à la feuille. À l'instant t_1 le système est en position 1, considérons le vecteur $\overrightarrow{AB_1}$, puis à l'instant t_2 le système est en position 2, considérons le vecteur $\overrightarrow{AB_2}$. Pour caractériser ces deux vecteurs nous pouvons les exprimer dans une base (un repère). Le choix de la base est arbitraire, soit $R_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ base orthonormée définie sur la figure en position 1 ou $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ base orthonormée définie sur la figure en position 2.



Notons L la longueur du segment $[AB]$.

Dans la position 1, on a $\overrightarrow{AB_1} = L \cdot \vec{x}_1$ dans le repère R_1 .

Dans la position 2, on a $\overrightarrow{AB_2} = L \cdot \vec{x}_2$ dans le repère R_2 . Mais aussi $\overrightarrow{AB_2} = L \cos \alpha \cdot \vec{x}_1 + L \sin \alpha \cdot \vec{y}_1$ dans le repère R_1 .

7.3 Produit scalaire

7.3.1 Définition

Le **produit scalaire** de deux vecteurs est **nombre**, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ tel que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$ avec la norme du vecteur $\vec{u}$: $\|\vec{u}\| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$ (idem pour $\vec{v}$).

7.3.2 Propriétés

Commutativité : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

Distributivité : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

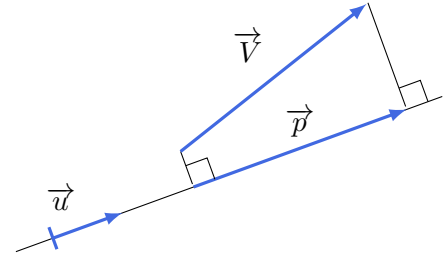
Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ alors $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Si $\vec{u} \parallel \vec{v}$ alors on a $\vec{u} \cdot \vec{v} = \varepsilon \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ avec $\varepsilon = \pm 1$ suivant l'orientation de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

7.3.3 Expression analytique

Dans une base orthonormée $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, on peut montrer que le produit scalaire entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est défini par la relation entre les coordonnées :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$



7.3.4 Interprétation géométrique

Soit $\vec{p}$ la projection vectorielle d'un vecteur $\vec{V}$ sur une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ (unitaire) alors :

$$\vec{p} = (\vec{V} \cdot \vec{u}) \cdot \vec{u}$$

7.4 Changement de bases

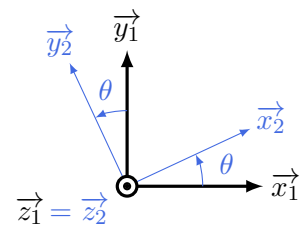
Dans la pratique, la lecture de figure spatiale étant délicate, on se ramène toujours à des figures planes. Dans la plupart des cas, le passage d'une base à une autre est réalisé par **une rotation plane**.

Pour faciliter le calcul des projections, on utilise des figures planes appelées aussi *figures de projection*, *figures de calcul*, *figures de changement de bases* ou *figures géométrales*.



Attention

Ces figures seront toujours réalisées avec des angles positifs proche de 20° , le vecteur commun aux deux bases étant perpendiculaire à la feuille toujours dirigé vers le lecteur de la figure.



Les projections des différents vecteurs sont (à connaître **par cœur** et à savoir retrouver!) :

$$\begin{aligned} \vec{x}_2 &= \cos \theta \cdot \vec{x}_1 + \sin \theta \cdot \vec{y}_1 \\ \vec{x}_1 &= \cos \theta \cdot \vec{x}_2 - \sin \theta \cdot \vec{y}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{y}_2 &= \cos \theta \cdot \vec{y}_1 - \sin \theta \cdot \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 &= \cos \theta \cdot \vec{y}_2 + \sin \theta \cdot \vec{x}_2 \end{aligned}$$

Pour éviter toute erreur, il est utile de vérifier ses formules de projection en $\theta = 0$ et $\theta = 90^\circ$.