Exercice 12 : Théorème de superposition

1. Méthode directe 1 : loi des mailles dans la maille du bas.

   Méthode directe 2 : comme il n'y a pas de simplifications possibles (R_3 et R_2 ne sont pas montés en parallèle, R_1 et R_2 ne sont pas en série ...) , on peut par exemple utiliser le théorème de Millman (ou la loi des nœuds en termes de potentiels) (Figure 1).

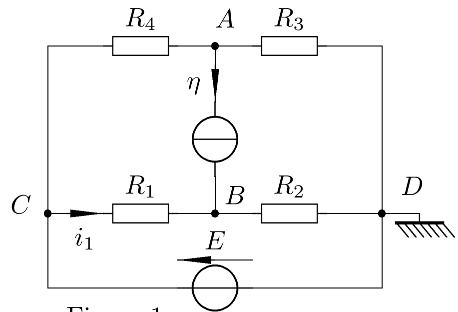


Figure 1

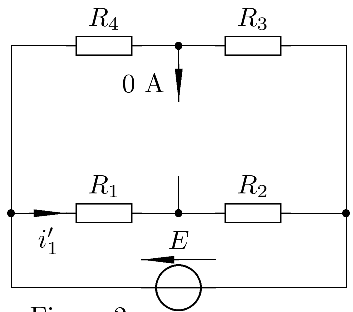


Figure 2

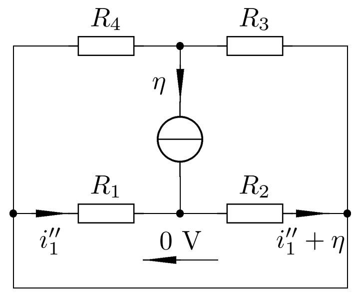


Figure 3

   On pose le nœud D à la masse ce qui impose $V_D = 0$ et $U_{CD} = V_C - V_D = V_C = E$.
   On détermine le potentiel du point B à l'aide du théorème de Millman :

$$V_B = \frac{\frac{V_C}{R_1} + \eta + 0}{1/R_1 + 1/R_2} = 0 \Rightarrow V_B = \frac{R_2 E + R_1 R_2 \eta}{R_1 + R_2}$$

   On en déduit ensuite

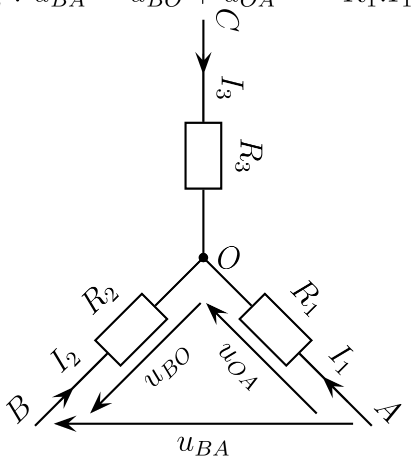
$$i_1 = \frac{U_{CB}}{R_1} = \frac{V_C - V_B}{R_1} = \frac{E - V_B}{R_1} = \frac{E(R_1 + R_2)}{R_1(R_1 + R_2)} - \frac{ER_2 + R_1 R_2 \eta}{R_1(R_1 + R_2)} = \frac{E - R_2 \eta}{R_1 + R_2}$$

2. Par utilisation du théorème de superposition :
   - soit i_1' le courant qui parcourt R_1 si on "éteint" le générateur de courant idéal ($\eta = 0$ A : Figure 2). R_1 et R_2 sont maintenant en série et $i_1' = \frac{E}{R_1+R_2}$.
   - soit i_1'' le courant qui parcourt R_1 si on "éteint" le générateur de tension idéal ($E = 0$ V : Figure 3). En appliquant la loi des nœuds, on voit que R_2 est traversé par $i_1'' + \eta$ et $0 = R_1 i_1'' + R_2(i_1'' + \eta) \Rightarrow i_1'' = -\frac{R_2 \eta}{R_1+R_2}$

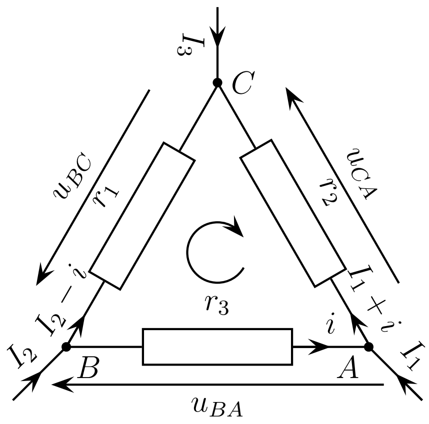
   On en déduit ensuite $i_1 = i_1' + i_1'' = \frac{E - R_2 \eta}{R_1+R_2}$

Exercice 13 : Théorème de Kennely : Étoile $\Longleftrightarrow$ triangle

1. Figure de gauche (étoile), on peut rapidement exprimer u_{BA} en fonction des intensités I_1 et I_2 : $u_{BA} = u_{BO} + u_{OA} = -R_1.I_1 + R_2.I_2$.



Association étoile



Association triangle

Figure de droite (triangle), on utilise directement la loi des nœuds pour faire figurer les intensités qui traversent les résistors.

On en déduit ensuite $u_{BA} = r_3.i = u_{BC} + u_{CA} = r_1.(I_2 - i) - r_2.(I_1 + i)$.

On isole ensuite i dans la seconde équation : $i.(r_3+r_2+r_1) = -r_2.I_1+r_1.I_2 \Rightarrow i = -\frac{r_2}{r_1+r_2+r_3}I_1+\frac{r_1}{r_1+r_2+r_3}I_2$.

Reste à remplacer dans l'expression de u_{BA} pour éliminer i : $u_{BA} = -\frac{r_2.r_3}{r_1+r_2+r_3}I_1 + \frac{r_1.r_3}{r_1+r_2+r_3}I_2$

2. On a donc $u_{BA} = -\frac{r_2.r_3}{r_1+r_2+r_3}I_1 + \frac{r_1.r_3}{r_1+r_2+r_3}I_2$ pour toute valeur de I_1 et I_2.
   Par identification, on en déduit $R_1 = \frac{r_2.r_3}{r_1+r_2+r_3}$, $R_2 = \frac{r_1.r_3}{r_1+r_2+r_3}$ et par permutation circulaire des indices, $R_3 = \frac{r_1.r_2}{r_1+r_2+r_3}$.

3. En injectant les expressions précédentes dans $\frac{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3}{R_1}$, on montre (calculs fastidieux) que $r_1 = \frac{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3}{R_1}$. Le même type de calculs permet de vérifier que $r_2 = \frac{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3}{R_2}$ et $r_3 = \frac{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3}{R_3}$ (fastidieux).

4. Application : si $r_1 = r_2 = r_3 = R$ on a $R_1 = R_2 = R_3 = \frac{R}{3}$.