

Exercice = bobine sur axe: Etablissement du courant de une bobine:

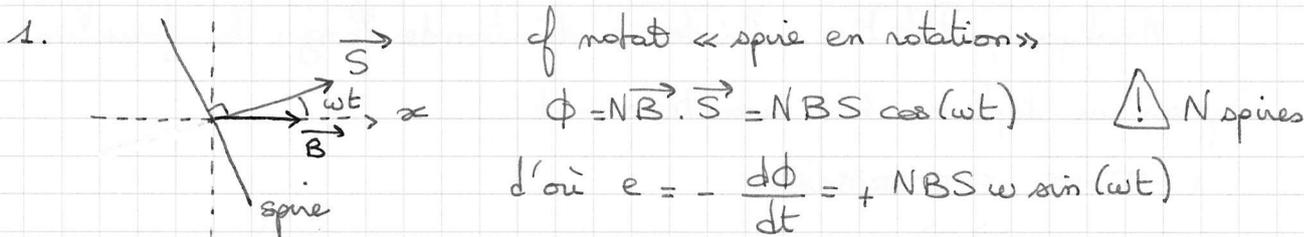
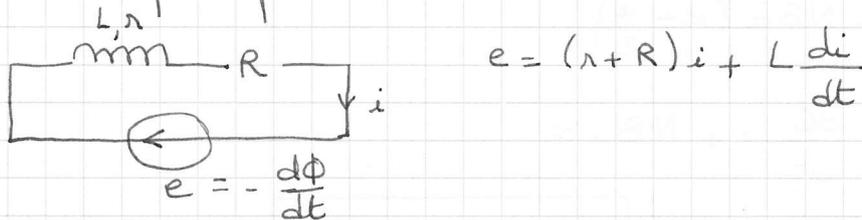


Schéma électrique équivalent:



d'où $\frac{di}{dt} + \left(\frac{r+R}{L}\right) i = \frac{NBS \omega}{L} \sin(\omega t)$

$$\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = \frac{NBS \omega}{L} \sin(\omega t) \quad \text{avec } \tau = \frac{L}{R+r}$$

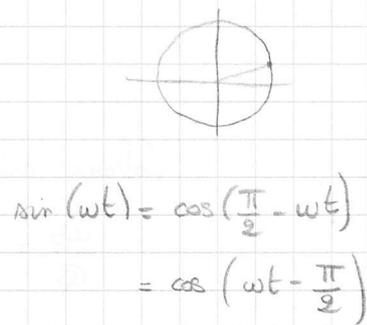
2. Solut générale: $i(t) = \underbrace{A e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\text{régime transitoire}} + \underbrace{I_m \cos(\omega t + \varphi)}_{\text{régime sinusoïdal forcé: atteint au bout de } 99 \tau}$
 $\tau = 0,47 \text{ ms.}$

3. Calcul de I_m en utilisant la notation complexe =

$$\underline{I}_m \left(j\omega + \frac{1}{\tau} \right) = \frac{NBS \omega}{L} (-j)$$

$$I_m = \frac{NBS \omega}{L \sqrt{\omega^2 + \frac{1}{\tau^2}}} \quad (\text{amplitude})$$

$$I_{\text{eff}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$



AN: $I_{\text{eff}} = 0,23 \text{ A}$

Exercice = freinage inductif =

de Laplace

1. Analyse qualitative: loi de modération de Lenz: la force V_{ra} s'oppose au déplacement donc amortissement.

2. ETUDE ELECTRIQUE:

$$\Phi = N \vec{B} \cdot \vec{S} = -NBS \text{ avec } S = a \left(u + \frac{a}{2} \right)$$

$$\Phi = -NBa \left(u + \frac{a}{2} \right)$$

$$e = - \frac{d\Phi}{dt} = + NBa v$$

$$e = r i \quad \Rightarrow \quad \boxed{NBa v = r i}$$

3. ETUDE MECANIQUE:

force de Laplace uniquement sur la partie horizontale du bas: $\vec{F}_L = -i a B N \vec{e}_x$ ($N a i \vec{e}_z \wedge B \vec{e}_y$)

$$m \ddot{u} = -k u - i a B N$$

$$m \ddot{u} = -k u - \frac{(a B N)^2}{r} u$$

$$4. \quad \ddot{u} + \underbrace{\frac{(a B N)^2}{m r}}_{\frac{\omega_0}{Q}} u + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2} u = 0$$

Valeur critique du champ magnétique $Q = \frac{1}{2}$:

$$2\omega_0 = \frac{a^2 B_c^2 N^2}{m r}$$

$$\boxed{B_c^2 = \frac{2\omega_0 m r}{a^2 N^2}}$$

5. $B > B_c$ Régime aperiodique avec amortissement.

$$\frac{\omega_0}{Q} \frac{a^2 B^2 N^2}{m r} > \frac{a^2 B_c^2 N^2}{m r} = \frac{\omega_0}{1/2}$$

$$\frac{1}{Q} > \frac{1}{1/2}$$

$$Q < 1/2$$

$$B = \frac{B_0}{\sqrt{2}} ?$$

6. Bilan de puissance =

$$NBa \omega i = r i^2$$

$$m i \frac{d\ddot{u}}{dt} = -k u i - i a B N \omega$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \omega^2 \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} k u^2 \right) = -r i^2$$

$$P_{\text{méca}} + P_J = 0$$

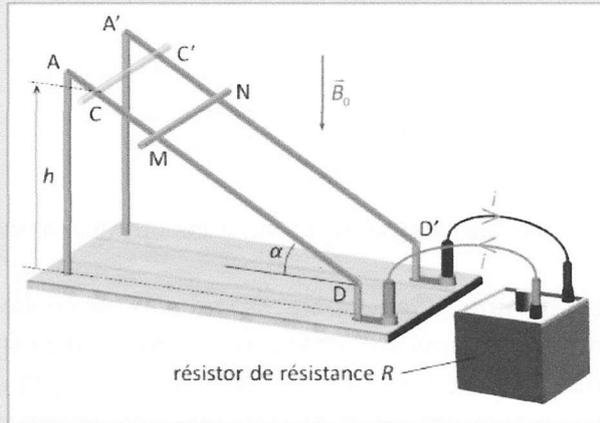
Ce qui est perdu en énergie méca est dissipée par effet Joule.



Les applications

Exercice 5 La revanche du rail de Laplace incliné !

Une tige conductrice horizontale de masse m et de résistance électrique r peut glisser sans frottements sur un rail formé de deux barres métalliques parallèles, AD et $A'D'$. Distantes de l et faisant chacune un angle α avec l'horizontale, les deux barres sont reliées à un résistor de résistance R à leurs extrémités D et D' . La résistance des barres du rail est négligeable devant R . On suppose que le seul mouvement possible de la tige est une translation parallèlement au rail et on note M et N ses points de contact sur les barres. L'ensemble du rail et de la tige est plongé dans un champ magnétique uniforme, vertical descendant, de norme B_0 .



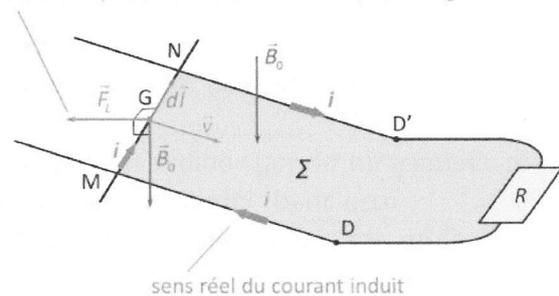
Étudier le mouvement de la tige lorsqu'elle est posée sur le rail à une hauteur h au-dessus du sol (position CC'), puis lâchée sans vitesse initiale.

A L'exercice n'est pas guidé mais nous allons le résoudre en utilisant la méthode 59.

1 Effectuons une analyse qualitative du mouvement : après avoir été lâchée sans vitesse initiale, la tige entame une translation vers DD' sous l'effet de son poids. Or, cette tige forme un circuit fermé avec le résistor et les portions ND' et MD du rail.

Comme son mouvement entraîne une variation de l'aire de la surface Σ s'appuyant sur le contour (C) de ce circuit, un phénomène d'induction apparaît et un courant induit i se met donc à circuler. D'après la loi de Lenz, ce courant doit s'opposer à la cause de l'induction, c'est-à-dire au mouvement de la tige : il doit donc être dirigé de M vers N afin que les actions de Laplace subies par la tige exercent un freinage.

force de Laplace freinant le mouvement de la tige



2 Afin d'effectuer une étude quantitative, paramétrons le dispositif. Le mouvement étant une translation le long du rail, installons un repère cartésien ($OXYZ$) défini comme suit :

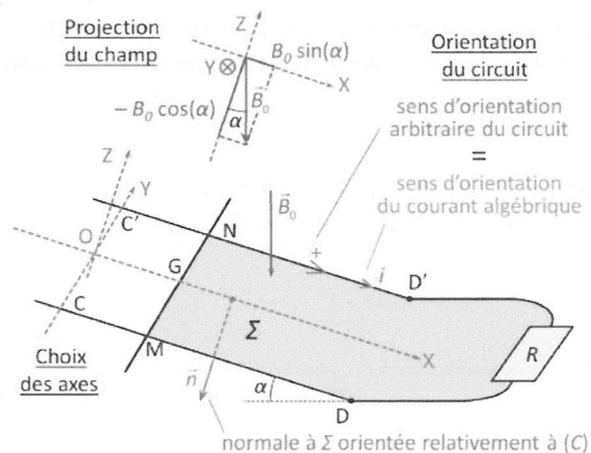
- O est au milieu de $[CC']$, confondu avec la position initiale du barycentre G de la tige ;
- (OX) est colinéaire aux barres rail, dirigé vers DD' ;
- (OY) est colinéaire à la tige, dirigé de C vers C' ;
- (OZ) est enfin choisi pour obtenir un repère direct.

Avec ce paramétrage (figure ci-contre), le vecteur position de G s'écrit simplement :

$$\vec{r}_G = X(t)\vec{e}_x \text{ avec } X_0 = 0 \text{ et } \dot{X}_0 = 0$$

En revanche, le champ magnétique doit s'écrire :

$$\vec{B} = -B_0 \cos \alpha \vec{e}_z + B_0 \sin \alpha \vec{e}_x$$



Achevons le paramétrage en orientant le contour (C) du circuit. Compte tenu de la géométrie du problème et du choix des axes, une orientation directe de (C) par rapport à (OZ) conduit à une orientation de i de N vers M le long de la tige, c'est-à-dire à contre sens de l'axe (OY). Bien que ce choix soit possible, nous allons lui préférer l'orientation opposée, c'est-à-dire **un courant i algébriquement dirigé de M vers N** le long de la tige. L'orientation de (C) est alors indirecte par rapport à (OZ) et la normale à la surface Σ est donc $\vec{n} = -\vec{e}_z$ (sauf au voisinage du résistor...).

③ Il nous faut maintenant établir le système d'équations couplées en $i(t)$ et $X(t)$ régissant le dispositif. Nous allons tout d'abord déterminer le flux instantané $\Phi(t)$ à travers Σ et en déduire la *f.é.m.* induite e .

Pour évaluer $\Phi(t)$, introduisons le flux Φ_0 que l'on obtiendrait pour une position CC' de la tige, ainsi que l'aire $S(t) = l X(t)$ balayée par la tige entre sa position initiale et l'instant t . Compte tenu de l'uniformité du champ magnétique dans la zone du rail où la tige se déplace, nous avons alors simplement :

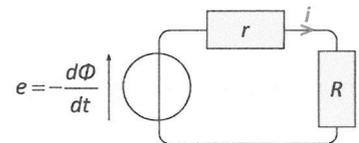
$$\begin{aligned}\Phi(t) &= \Phi_0 - \vec{B}_0 \cdot S(t) \vec{n} \rightarrow \Phi(t) = \Phi_0 - B_0 (-\cos \alpha \vec{e}_z + \sin \alpha \vec{e}_x) \cdot S(t) (-\vec{e}_z) \\ &\rightarrow \Phi(t) = \Phi_0 - B_0 \cos \alpha S(t) \rightarrow \Phi(t) = \Phi_0 - B_0 l \cos \alpha X(t)\end{aligned}$$

La loi de Faraday donne alors : $e(t) = -d\Phi/dt \rightarrow e(t) = B_0 l \cos \alpha \dot{X}(t)$

💡 Comme dans l'exemple de référence du § 2.1, la valeur exacte de Φ_0 n'est pas connue et est même impossible à déterminer (le champ magnétique n'est pas uniforme à l'extérieur du rail et la surface est localement courbe au voisinage du résistor) ; toutefois, cette valeur est sans importance car, le champ étant stationnaire, elle est indépendante du temps et disparaît donc à la dérivation.

Représentons enfin le circuit électrique équivalent et appliquons-y la loi de mailles ; nous obtenons ainsi l'équation électrique régissant le dispositif :

$$(R+r)i(t) = e(t) \text{ soit : } (R+r)i(t) = B_0 l \cos \alpha \dot{X}(t) > 0 \text{ car } \dot{X} > 0$$



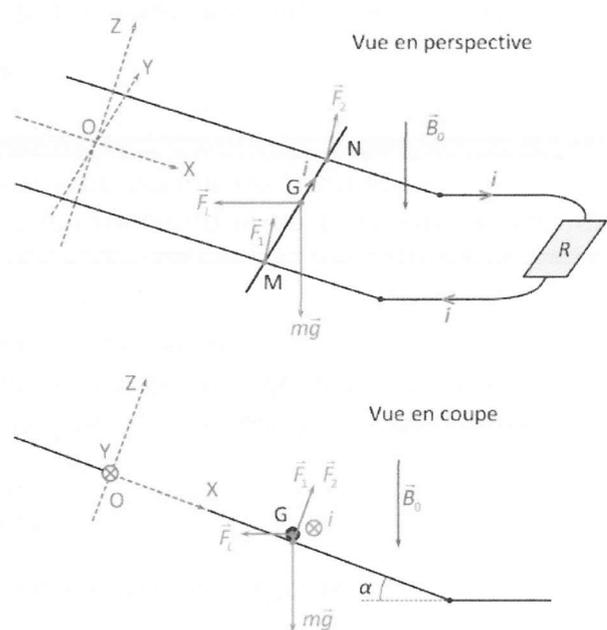
💡 Cette équation montre donc que $i(t) > 0$, ce qui est conforme à notre prédiction qualitative basée sur la loi de Lenz !

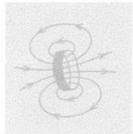
④ Listons maintenant les actions subies par la tige ; il y a :

- Le poids, qui équivaut à une unique force verticale $\vec{P} = m\vec{g}$ appliquée au barycentre G. Sa direction étant la même que celle du champ magnétique, sa décomposition dans le repère (OXYZ) prend la même forme :

$$\vec{P} = -mg \cos \alpha \vec{e}_z + mg \sin \alpha \vec{e}_x$$

- Les actions de contact sur le rail en M et N qui sont assimilables à deux forces \vec{F}_1 et \vec{F}_2 respectivement appliquées en M et N (les contacts sont ponctuels) et qui, en l'absence de frottements, sont orthogonales au rail, donc à l'axe (OX).





Les applications

- Les actions de Laplace, de résultante : $\vec{F}^L = \int_{P \in \text{Tige}} i(t) d\vec{l}_p \wedge \vec{B}_0 = i(t) \times \left(\int_{P: M \rightarrow N} d\vec{l}_p \right) \wedge \vec{B}_0 = i(t) \overline{MN} \wedge \vec{B}_0$

soit $\vec{F}^L = i(t) (l \vec{e}_y) \wedge (-B_0 \cos \alpha \vec{e}_z + B_0 \sin \alpha \vec{e}_x)$ puis $\vec{F}^L = i(t) l B_0 (-\cos \alpha \vec{e}_x - \sin \alpha \vec{e}_z)$

L'équation mécanique s'obtient à partir du théorème du centre d'inertie appliqué à la tige et projeté sur l'axe (OX) :

$$m \frac{d^2 \vec{r}_G}{dt^2} = \vec{F}^{ext} = \vec{F}^L + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + m\vec{g} \quad \text{d'où, en projetant : } m\ddot{X}(t) = -i(t) l B_0 \cos \alpha + mg \sin \alpha$$

5 Puisque nous cherchons à caractériser le mouvement, éliminons $i(t)$ de ce système afin d'obtenir une unique équation différentielle sur la position $X(t)$:

De l'équation électrique nous tirons : $i(t) = \frac{B_0 l \cos \alpha}{R+r} \dot{X}(t)$

que nous injectons dans l'équation mécanique pour obtenir : $m\ddot{X}(t) = -\frac{B_0^2 l^2 \cos^2 \alpha}{R+r} \dot{X}(t) + mg \sin \alpha$

$X(t)$ n'intervenant pas explicitement, il est judicieux de réécrire cette équation en faisant apparaître directement la vitesse $V(t) = \dot{X}(t)$, ce qui donne :

$$\dot{V}(t) = g \sin \alpha - \frac{B_0^2 l^2 \cos^2 \alpha}{m(R+r)} V(t) \quad \text{ou encore} \quad \dot{V}(t) + \frac{1}{\tau} V(t) = g \sin \alpha \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{m(R+r)}{B_0^2 l^2 \cos^2 \alpha}$$

Compte tenu des conditions initiales, il vient : $V(t) = g\tau \sin \alpha (1 - e^{-t/\tau}) \xrightarrow{t \gg \tau} V_\infty = g\tau \sin \alpha$

dont nous pouvons enfin déduire : $X(t) = V_\infty \tau \left(\frac{t}{\tau} - 1 + e^{-t/\tau} \right)$

Ces lois sont valables tant que la tige reste sur le rail, c'est-à-dire tant que X reste inférieur à $h/\sin \alpha$.

6 Il nous reste à interpréter les résultats obtenus :

- Remarquons tout d'abord qu'en l'absence de champ magnétique, l'équation différentielle s'écrit $\dot{V} = g \sin \alpha$ et prédit donc un mouvement uniformément accéléré où la vitesse V croît linéairement au cours du temps ; ce résultat est parfaitement normal pour un glissement sans frottement le long d'un plan incliné et est bien connu depuis 1604 grâce aux expériences de Galilée !



Conformément à l'intuition, le terme d'accélération ($g \sin \alpha$) diminue avec l'inclinaison α du rail et s'annule pour un rail horizontal ($\alpha = 0$).

- En comparaison, l'effet de l'induction apparaît clairement comme un freinage, aussi bien dans l'équation différentielle où figure un terme d'amortissement (V/τ), que dans sa solution qui prédit l'existence d'une vitesse limite V_∞ ; la loi de Lenz est donc bien vérifiée.
- Analysons enfin le rôle joué par les différents paramètres du problème (m, R, B_0, l, α).

En dehors du terme d'accélération déjà mentionné, ces paramètres interviennent exclusivement à travers la durée τ , qui caractérise à elle seule la dynamique du système ; qualitativement, le freinage est d'autant plus efficace que τ est faible, puisque la valeur de la vitesse limite ($g\tau \sin \alpha$) ainsi que la durée nécessaire pour atteindre cette vitesse ($\approx 5\tau$) décroissent avec τ .

Or, $\tau = m(R+r) / (B_0^2 l^2 \cos^2 \alpha)$. Nous en déduisons que pour obtenir un freinage efficace (τ faible), il faut un champ magnétique intense (B_0 élevé), une faible inclinaison du rail ($\cos \alpha$ élevé) et un circuit de grande taille (l élevé), de faible résistance et de faible masse ($R+r$ et m faibles).

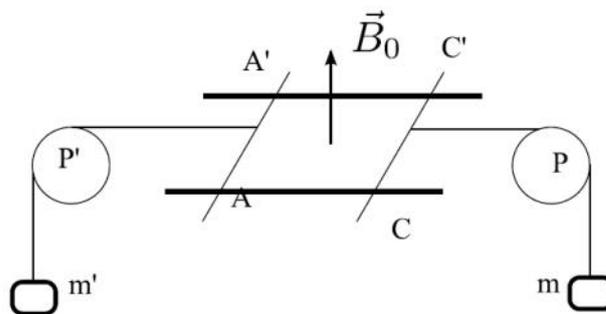
I_TD 5: Barre sur rails

Exercice 5 : Barres sur rails

Les deux barres AA' et CC' se déplacent, sans frottement, sur deux rails horizontaux et parallèles dans un champ vertical uniforme \vec{B}_0 . On fait les hypothèses suivantes : les poulies P et P' sont idéales et de masse nulles, les masses des barres AA' et CC' seront négligées, chaque barre possède une résistance R , les fils sont inextensibles et enfin on néglige la résistance des rails et les phénomènes d'auto-induction.

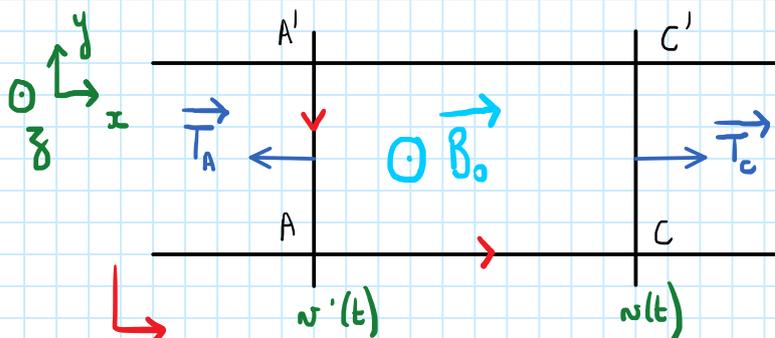
On pose $AA' = CC' = a$ et

$$\frac{1}{\tau} = \frac{B_0^2 a^2}{2R} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'} \right)$$



1. On note $\vec{v}(t) = v(t)\vec{u}_x$ et $\vec{v}'(t) = v'(t)\vec{u}_x$ les vitesses des barres CC' et AA' . Établir l'équation électrique donnant le courant $i(t)$ traversant $ACC'A$.
2. Donner les deux équations mécaniques traduisant le mouvement des deux barres.
3. Résoudre le système précédent. On déterminera les vitesses en supposant que les masses sont initialement lâchées sans vitesse initiale. (On suggère de faire apparaître les grandeurs $mv + m'v'$ et $v - v'$). Tracer l'allure des courbes $v(t)$ et $v'(t)$.
4. Faire un bilan énergétique et commenter.

1. On refait le schéma vu de dessus :



+ On oriente le schéma avant d'oublier de A vers C.

Analyse qualitative : même si ce n'est pas demandé : au départ, les deux masses chutent et les barres s'écartent. On a un circuit fermé mobile dans un champ magnétique stationnaire. D'après la loi de Lenz, il y a création de deux forces de Laplace qui vont s'opposer au mvt des barres. D'un point de vue électrique, création d'un courant induit et d'une fem pour s'opposer aux variations de flux subies.

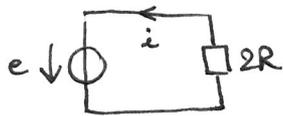
L'analyse qualitative n'est pas très simple ici, ni très intuitive.

$$\phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \vec{e}_z \cdot S \vec{e}_z = B_0 S = B_0 a (x - x')$$

(on repère la barre CC' par x et AA' par x')

D'après la loi de Faraday: $e = - \frac{d\phi}{dt} = - B_0 a (v - v')$

On dessine le schéma électrique équivalent:



$$e = 2Ri \quad (*)$$

$$i = \frac{e}{2R} = - \frac{B_0 a}{2R} (v - v')$$

$$i(t) = - \frac{B_0 a}{2R} (v(t) - v'(t))$$

2). Syst = tige \triangle de masse négligeable! AA'

Ref: terrestre galiléen

Forces: . tension du fil . Force de Laplace

$$\vec{T} + \vec{F}_L = \vec{0} \quad (\text{car masse} = 0)$$

($\|\vec{T}\| = \|\vec{F}_L\|$) tige

en projection selon x : $-T - iaB = 0$

$$T = -iaB_0$$

. Idem syst. CC': $T' + iaB_0 = 0 \quad T' = -iaB_0 = T$

Il faut alors déterminer la tension du fil en s'intéressant au syst. masse au bout de la poulie. PFD en proj selon z :

$$m' \ddot{z}' = -m'g + T' \quad (\text{la tension est la même en norme, transmise par le fil idéal}).$$

$$\text{or } \ddot{x}' = \ddot{z}'$$

(l'accélération de la barre/tige est celle de la masse)

$$\ddot{x}' = -g + \frac{T'}{m} = -g - \frac{iaB_0}{m}$$

$$\ddot{x}' = -g - \frac{iaB_0}{m}$$

De même pour la masse m' :

$$m \ddot{z} = -mg + T$$

or $\ddot{x} = -\ddot{z}$  signes! - PIÈGE -

$$-m \ddot{x} = -mg + T = -mg - iaB_0$$

$$\ddot{x} = g + \frac{iaB_0}{m}$$

$$3) \left\{ \begin{array}{l} m \frac{dv}{dt} = mg - \frac{a^2 B_0^2}{2R} (v - v') \quad (1) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m' \frac{dv'}{dt} = -m'g + \frac{B_0^2 a^2}{2R} (v - v') \quad (2) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) + (2) \quad \frac{d}{dt} (m v + m' v') = (m - m') g \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(1)}{m} - \frac{(2)}{m'} \quad \frac{d}{dt} (v - v') = 2g - \frac{B_0^2 a^2}{2R} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m'} \right) (v - v') \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m v + m' v' = (m - m') g t + 0 \quad (3) \quad (\text{car les 2 vitesses sont nulles à } t=0) \\ v - v' = A e^{-t/\tau} + \tau \times 2g \end{array} \right.$$

$$0 = A + \tau \times 2g \quad A = -2\tau g$$

$$\rightarrow v - v' = 2\tau g (1 - e^{-t/\tau}) \quad \text{Il faut résoudre ça!}$$

$$v = v' + 2\tau g (1 - e^{-t/\tau})$$

$$(3) \rightarrow (m + m') v' + m 2\tau g - 2\tau g m e^{-t/\tau} = (m - m') g t$$

$$v' = \frac{1}{(m + m')} \left[(m - m') g t - 2\tau g m (1 - e^{-t/\tau}) \right]$$

$$\text{et } v = \frac{1}{(m + m')} \left[(m - m') g t + 2\tau g m' (1 - e^{-t/\tau}) \right]$$

Qd $t \rightarrow +\infty$ le terme en $e^{-t/\tau} \rightarrow 0$: les deux barres ont des vitesses de le même sens et la même accélération!

Alors: si $m - m' > 0$ au bout de qq τ 2 droites affines...

4) Bilan énergétique:

On multiplie la loi des mailles par i : (*)

$$2Ri^2 = e_i$$

$$P_{\text{Joule}} = P_{em} = e \left(-\frac{ba}{2R} (\omega - \omega') \right)$$

$$\text{Eq. méca: } m \frac{d\omega}{dt} = -mg + T = -mg + F_L \quad (T = F_L)$$

$$\times \omega: \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \omega^2 + mgz \right) = F_L \omega = P_{\text{Laplace}}(CC')$$

$$\frac{dE_m}{dt} = P_{\text{Laplace}}(CC')$$

$$\text{idem: } \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m' \omega'^2 + m'gz' \right) = T' \omega' = P_{\text{Laplace}}(AA') \\ = -iaB_0 \omega'$$

Ici on dit un peu rapidement: $P_{\text{Laplace}} = P_{em}$

$$\text{et on obtient } \frac{dE_m(\text{tot})}{dt} = P_{\text{Joule}}$$

Conversion mécanique \Rightarrow électrique (dissipat par effet Joule)