



Correction DM 3 - SI

Consignes

- Copies propres et bien présentées: encadrer vos résultats, souligner les applications numériques (avec une règle bien sûr)...
- **Aucun retard ne sera accepté.**

1. Trayeuse automatique pour vache

1.1 Analyser la trayeuse

Les agriculteurs producteurs laitiers sont soumis à des réglementations strictes en termes de respect de l'environnement, de mesures d'hygiène ou de qualité de vie des animaux. De plus, la traite des vaches est une opération pénible et répétitive. Des sociétés ont alors développé des systèmes de traite automatique.



On s'intéresse dans ce sujet à un bras articulé d'une machine de traite automatisée dont on donne une modélisation cinématique ainsi qu'un extrait de cahier des charges suivant :

Exigence	Critère	Niveau
Assurer la sécurité de la vache	La vitesse d'approche vertical de la tête de traite par rapport au pis de la vache ne doit pas être trop rapide.	$5 \pm 1 \text{ cm.s}^{-1}$

1.2 Modélisation de la trayeuse

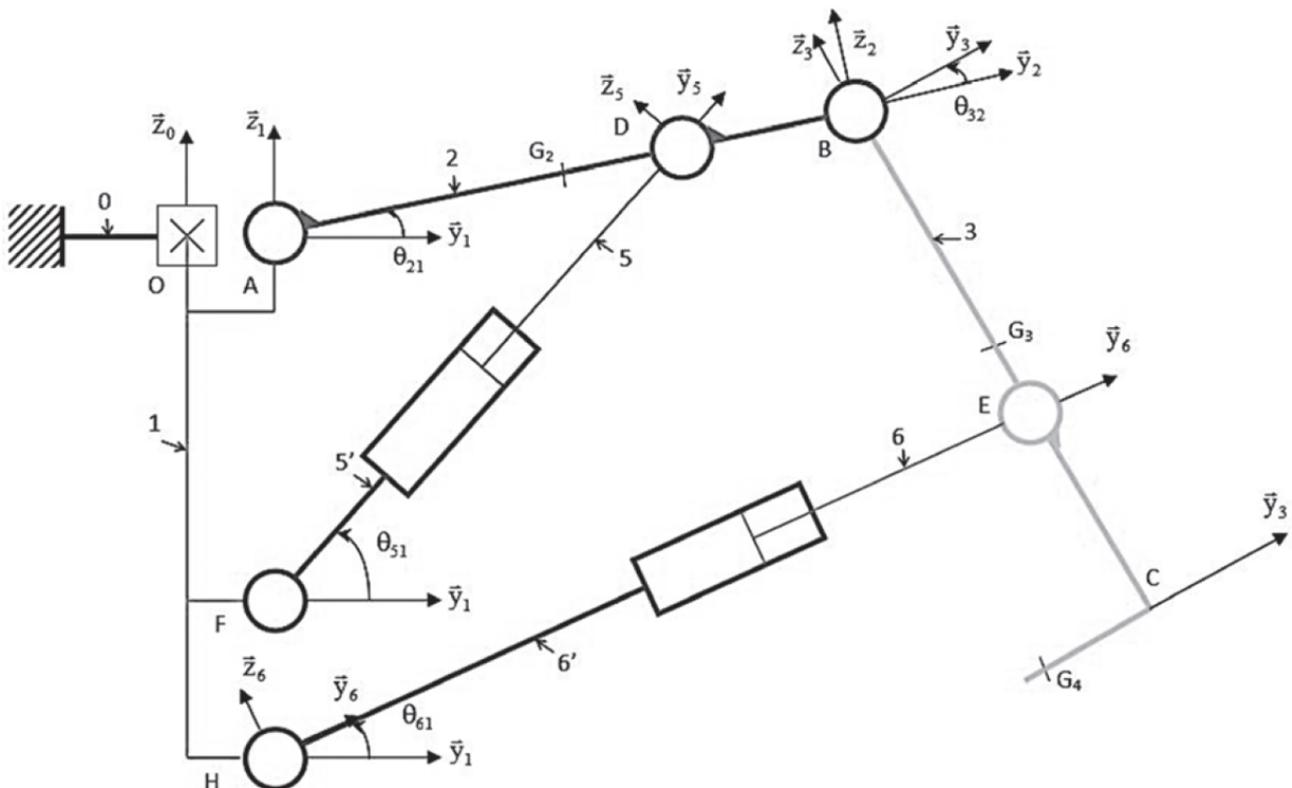
L'ensemble bras articulé de traite est embarqué sur le chariot 1 monté en liaison glissière d'axe (O, \vec{x}_0) par rapport au bâti 0. Cette liaison permet le déplacement horizontal du bras articulé. Le bras articulé est ensuite composé :

- du bras supérieur 2 en liaison pivot d'axe (A, \vec{x}_1) par rapport au chariot 1. Deux vérins montés en parallèle (seul l'un des deux vérins est modélisé ici par l'ensemble corps de vérin 5' + tige de vérin 5) entre le chariot 1 et le bras supérieur 2 assurent les déplacements du bras supérieur 2.
- du bras intermédiaire 3, lié au bras supérieur 2 par une liaison pivot d'axe (B, \vec{x}_2) . Un vérin (ensemble corps de vérin 6' + tige de vérin 6) monté entre le bras intermédiaire 3 et le chariot 1 assure les déplacements du bras intermédiaire 3.
- d'un bras inférieur en liaison encastrement avec le bras intermédiaire 3. Ce bras inférieur porte la tête de traite.

Lorsque la vache est installée dans la machine, la tête de traite est automatiquement positionnée sous la vache, dans une position telle que la tête de traite soit au plus proche des pis de la vache.

Le paramétrage est le suivant :

- $R_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ lié au bâti du robot de traite;
- $R_1 = (A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ lié au chariot 1;
- $R_2 = (A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ lié au bras supérieur 2 tel que $\theta_{21} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$;
- $R_3 = (B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ lié au bras intermédiaire 3 tel que $\theta_{32} = (\vec{y}_2, \vec{y}_3) = (\vec{z}_2, \vec{z}_3)$;
- $R_5 = (F, \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5)$ lié au vérin de tige 5 et de corps 5' tel que $\theta_{51} = (\vec{y}_1, \vec{y}_5) = (\vec{z}_1, \vec{z}_5)$;
- $R_6 = (H, \vec{x}_6, \vec{y}_6, \vec{z}_6)$ lié au vérin de tige 6 et de corps 6' tel que $\theta_{61} = (\vec{y}_1, \vec{y}_6) = (\vec{z}_1, \vec{z}_6)$.



Question 1: Quels sont les paramètres géométriques qui permettent de piloter les mouvements du bras robotisé ?

$$\begin{array}{llll}
\overrightarrow{AB} = L_2 \vec{y}_2 & \overrightarrow{AD} = d_2 \vec{y}_2 & \overrightarrow{BC} = -L_3 \vec{z}_3 & \overrightarrow{BE} = -d_3 \vec{z}_3 \\
\overrightarrow{AG_2} = \frac{L_2}{2} \vec{y}_2 & \overrightarrow{BG_3} = -\frac{L_3}{2} \vec{z}_3 & \overrightarrow{CG_4} = -L_4 \vec{y}_3 & \overrightarrow{AF} = -h_5 \vec{z}_0 \\
\overrightarrow{AH} = -h_6 \vec{z}_0 & \overrightarrow{OA} = x(t) \vec{z}_0 + L_1 \vec{y}_1 & \overrightarrow{FD} = L_5(t) \vec{y}_5 & \overrightarrow{HE} = L_6(t) \vec{y}_6
\end{array}$$

Réponse 1: Les paramètres sont repérés par leur dépendance au temps. En pilotant $x(t)$, $L_5(t)$ et $L_6(t)$, les mouvements du bras robotisé lui permette d'atteindre des positions dans les trois dimensions.

1.3 Étude géométrique

On souhaite s'assurer que la commande du vérin 5 permette bien de piloter l'angle θ_{21} .

Question 2: En écrivant la fermeture géométrique AFD , déterminer une relation scalaire reliant $L_5(t)$ avec θ_{21} et les constantes du système. Conclure.

Réponse 2: Il est fortement conseillé de réaliser le graphe de liaison et les figures de changements de base, même si cela n'est pas demandé dans les questions (au minimum sur le brouillon).

La fermeture géométrique donne : $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FA} = \vec{0}$

Soit $d_2 \vec{y}_2 - L_5 \vec{y}_5 h_5 \vec{z}_0 = \vec{0}$.

En projection sur B_0 : $\begin{cases} d_2 \cos(\theta_{21}) - L_5 \cos(\theta_{51}) + 0 = 0 \\ d_2 \sin(\theta_{21}) - L_5 \sin(\theta_{51}) + h_5 = 0 \end{cases}$

On souhaite éliminer θ_{51} , pour cela on l'isole. Comme il s'agit d'un angle, on passe les équations au carré puis on les somme :

$$L_5^2 (\cos^2 \theta_{51} + \sin^2 \theta_{51}) = L_5^2 = d_2^2 \cos^2 \theta_{21} + (d_2 \sin \theta_{21} + h_5)^2$$

$$\text{Soit } \boxed{L_5^2 = d_2^2 + h_5^2 + 2d_2 h_5 \sin \theta_{21}}.$$

1.4 Étude cinématique

Dans cette partie le paramètre $x(t)$ est considéré constant au cours du temps.

Question 3: Par la méthode de dérivation du vecteur position, calculer le vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{B \in 2/0}}$.

$$\text{Réponse 3: } \overrightarrow{V_{B \in 2/0}} = \left. \frac{d(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB})}{dt} \right|_{R_0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{V_{B,2/0}} = \left. \frac{d(x(t) \vec{z}_0 + L_1 \vec{y}_1 + L_2 \vec{y}_2)}{dt} \right|_{R_0} = \left. \frac{d(x(t) \vec{z}_0 + L_1 \vec{y}_1)}{dt} \right|_{R_0} + \left. \frac{dL_2 \vec{y}_2}{dt} \right|_{R_0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{V_{B,2/0}} = \vec{0} + L_2 \left. \frac{d\vec{y}_2}{dt} \right|_{R_0}$$

D'après la formule de Bour :

$$\left. \frac{d\vec{y}_2}{dt} \right|_{R_0} = \left. \frac{d\vec{y}_2}{dt} \right|_{R_2} + \overrightarrow{\Omega_{2/0}} \wedge \vec{y}_2 = \vec{0} + \dot{\theta}_{21} \vec{x}_2 \wedge \vec{y}_2$$

$$\text{On en déduit : } \boxed{\overrightarrow{V_{B,2/0}} = L_2 \dot{\theta}_{21} \vec{z}_2}.$$

Question 4: Par la méthode de composition des vecteurs vitesses, exprimer $\overrightarrow{V_{E \in 3/0}}$ en fonction de θ_{21} , θ_{32} et des constantes du système.

Réponse 4: La composition des vitesses donne : $\overrightarrow{V_{E,3/0}} = \overrightarrow{V_{E,3/2}} + \overrightarrow{V_{E,2/0}}$

Déterminons ces deux vecteurs vitesses par transport :

$$\overrightarrow{V_{E,3/2}} = \overrightarrow{V_{B,3/2}} + \overrightarrow{EB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{3/2}} = \vec{0} + d_3 \vec{z}_3 \wedge \dot{\theta}_{32} \vec{x}_3$$

$$\overrightarrow{V_{E,3/2}} = d_3 \dot{\theta}_{32} \vec{y}_3$$

De même, $\overrightarrow{V_{E,2/0}} = \overrightarrow{V_{B,2/0}} + \overrightarrow{EB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/0}} = L_2 \dot{\theta}_{21} \vec{z}_2 + d_3 \vec{z}_3 \wedge \dot{\theta}_{21} \vec{x}_3$

$$\overrightarrow{V_{E,2/0}} = L_2 \dot{\theta}_{21} \vec{z}_2 + d_3 \dot{\theta}_{21} \vec{y}_3$$

$$\text{Enfin, } \boxed{\overrightarrow{V_{E,3/0}} = L_2 \dot{\theta}_{21} \vec{z}_2 + d_3 (\dot{\theta}_{32} + \dot{\theta}_{21}) \vec{y}_3}.$$

Question 5: En déduire $\overrightarrow{V_{G_4 \in 3/0}}$.

Réponse 5: D'après la formule de Varignon : $\overrightarrow{V_{G_4,3/0}} = \overrightarrow{V_{E,3/0}} + \overrightarrow{G_4E} \wedge \overrightarrow{\Omega_{3/0}}$

$$\overrightarrow{V_{G_4,3/0}} = L_2 \dot{\theta}_{21} \vec{z}_2 + d_3 (\dot{\theta}_{32} + \dot{\theta}_{21}) \vec{y}_3 + (\overrightarrow{G_4C} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE}) \wedge (\overrightarrow{\Omega_{3/2}} + \overrightarrow{\Omega_{2/0}})$$

$$\overrightarrow{V_{G_4,3/0}} = L_2 \dot{\theta}_{21} \vec{z}_2 + d_3 (\dot{\theta}_{32} + \dot{\theta}_{21}) \vec{y}_3 + (L_4 \vec{y}_3 + L_3 \vec{z}_3 - d_3 \vec{z}_3) \wedge (\dot{\theta}_{32} \vec{x}_3 + \dot{\theta}_{21} \vec{x}_3)$$

$$\overrightarrow{V_{G_4,3/0}} = L_2 \dot{\theta}_{21} \vec{z}_2 + d_3 (\dot{\theta}_{32} + \dot{\theta}_{21}) \vec{y}_3 - L_4 (\dot{\theta}_{32} + \dot{\theta}_{21}) \vec{z}_3 + (L_3 - d_3) (\dot{\theta}_{32} + \dot{\theta}_{21}) \vec{y}_3$$

$$\boxed{\overrightarrow{V_{G_4,3/0}} = L_2 \dot{\theta}_{21} \vec{z}_2 - L_4 (\dot{\theta}_{32} + \dot{\theta}_{21}) \vec{z}_3 + L_3 (\dot{\theta}_{32} + \dot{\theta}_{21}) \vec{y}_3}$$

Pendant la phase d'approche du bras inférieur vers la vache $\theta_{21} = 0$, $\theta_{32} = 0$, $\dot{\theta}_{21} = 0,03 \text{ rad.s}^{-1}$ et $\dot{\theta}_{32} = -0,03 \text{ rad.s}^{-1}$. De plus $L_2 = 1,5 \text{ m}$ et $L_4 = 0,65$.

Question 6: Donner la valeur de la composante verticale de la vitesse $\overrightarrow{V_{G_4 \in 3/0}}$ et conclure vis-à-vis du cahier des charges.

Réponse 6: La composante verticale est obtenue par une projection suivant \vec{z}_0 :

$$\overrightarrow{V_{G_4,3/0}} \cdot \vec{z}_0 = L_2 \dot{\theta}_{21} \cos(\theta_{21}) - L_4 (\dot{\theta}_{32} + \dot{\theta}_{21}) \cos(\theta_{32} + \theta_{21}) + L_3 (\dot{\theta}_{32} + \dot{\theta}_{21}) \sin(\theta_{32} + \theta_{21})$$

L'application numérique donne $\overrightarrow{V_{G_4,3/0}} \cdot \vec{z}_0 = 4,5 \text{ cm.s}^{-1}$. Le cahier des charges demande une vitesse maximale de $6 \text{ cm.s}^{-1} > 4,5 \text{ cm.s}^{-1}$ donc le cahier des charges est validé.