Correction DS 3 (jeudi) - SI

Consignes

- Copies propres et bien présentées: $\boxed{\text{encadrer vos résultats}}$, souligner les applications numériques (avec une règle bien sûr)...
- Uniquement la calculatrice est autorisée.
- Les exercices sont indépendants.

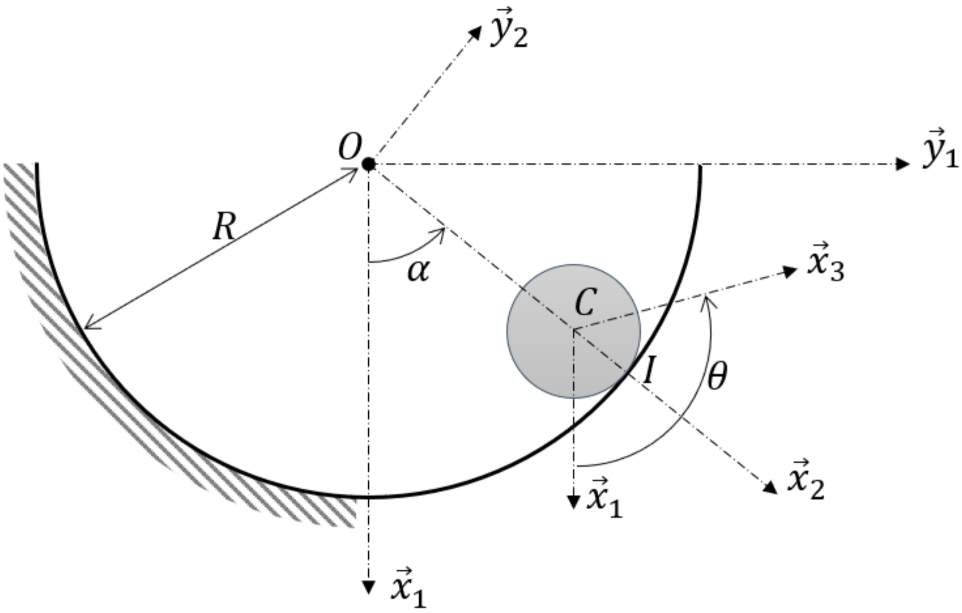
Table des matières

1. Bille dans un cercle

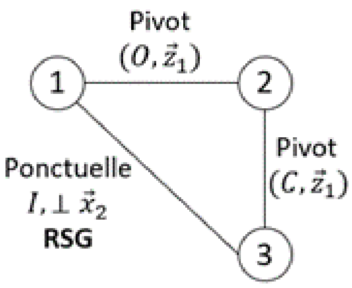
1.1 Bille sur un rail fixe

Une bille considérée comme une sphère homogène, de centre C, de rayon r, roule sans glisser sur un rail circulaire fixe de centre O et de rayon R.
On note I le point de contact de la sphère avec le rail et :

- $R_1 = (O, \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$ le repère lié au rail fixe.
- $R_2 = (O, \vec{x_2}, \vec{y_2}, \vec{z_1})$ le repère permettant de suivre la position du centre de la bille C par rapport au rail circulaire. On pose aussi $\alpha = (\vec{x_1}, \vec{x_2})$.
- $R_3 = (C, \vec{x_3}, \vec{y_3}, \vec{z_1})$ le repère lié à la bille. On pose $\theta = (\vec{x_1}, \vec{x_3})$.

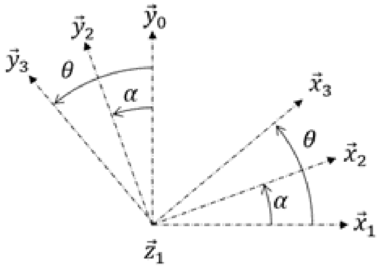


Question 1: En traduisant sous forme de liaison les mouvements **des repères** entre eux, réaliser un graphe des liaisons.



Réponse 1:

Question 2: Réaliser la ou les figue(s) de changement de base.



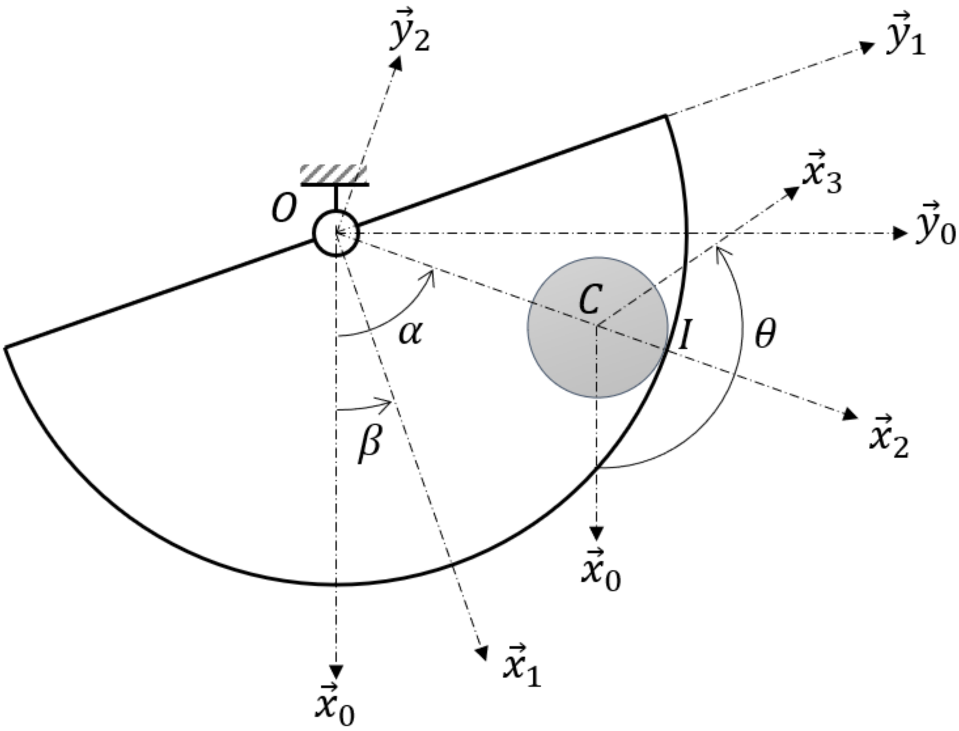
Réponse 2:

Question 3: Établir une relation entre r, R, $\dot{\theta}$ et $\dot{\alpha}$.

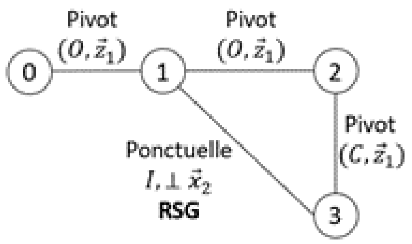
Réponse 3: Le roulement sans glissement en I donne : $\overrightarrow{V_{I,3/1}} = \vec{0}$
Or par composition des vecteurs vitesses : $\overrightarrow{V_{I,3/1}} = \overrightarrow{V_{I,3/2}} + \overrightarrow{V_{I,2/1}}$
On a donc $\vec{0} = \overrightarrow{V_{I,3/2}} + \overrightarrow{V_{I,2/1}}$. Déterminons ces deux vecteurs vitesses. D'après la formule de Varignon :
$\overrightarrow{V_{I,3/2}} = \overrightarrow{V_{C,3/2}} + \overrightarrow{IC} \wedge \overrightarrow{\Omega_{3/2}} = \vec{0} - r\vec{x_2} \wedge (\dot{\theta} - \dot{\alpha})\vec{z_1} = r(\dot{\theta} - \dot{\alpha})\vec{y_2}$
Et $\overrightarrow{V_{I,2/1}} = \overrightarrow{V_{O,2/1}} + \overrightarrow{IO} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \vec{0} - R\vec{x_2} \wedge \dot{\alpha}\vec{z_1} = R\dot{\alpha}\vec{y_2}$
On en déduit : $\boxed{r(\dot{\theta} - \dot{\alpha}) + R\dot{\alpha} = 0}$

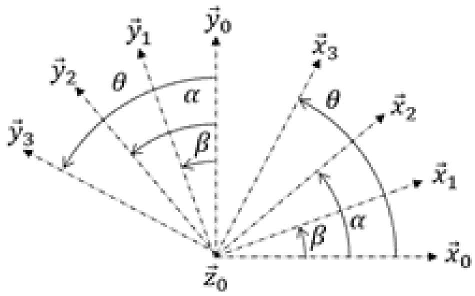
1.2 Bille sur un rail mobile

On pose maintenant $R_0 = (O, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_1})$ le repère lié à un bâti fixe. Dans cette seconde étude, le rail 1 est en liaison pivot d'axe $(O, \vec{z_1})$ avec le bâti et on note $\beta = (\vec{x_0}, \vec{x_1})$. Les angles précédents sont désormais tous repérés par rapport à R_0, soit : $\alpha = (\vec{x_0}, \vec{x_2})$ et $\theta = (\vec{x_0}, \vec{x_3})$.



Question 4: Adapter la méthode précédente afin d'établir la relation entre r, R, $\dot{\beta}$, $\dot{\theta}$ et $\dot{\alpha}$.





Réponse 4:

Le roulement sans glissement en I donne : $\overrightarrow{V_{I,3/1}} = \vec{0}$

Or par composition des vecteurs vitesses : $\overrightarrow{V_{I,3/1}} = \overrightarrow{V_{I,3/2}} + \overrightarrow{V_{I,2/1}}$

On a donc $\vec{0} = \overrightarrow{V_{I,3/2}} + \overrightarrow{V_{I,2/1}}$. Déterminons ces deux vecteurs vitesses. D'après la formule de Varignon :

$\overrightarrow{V_{I,3/2}} = \overrightarrow{V_{C,3/2}} + \overrightarrow{IC} \wedge \overrightarrow{\Omega_{3/2}} = \vec{0} - r\vec{x_2} \wedge (\dot{\theta} - \dot{\alpha})\vec{z_1} = r(\dot{\theta} - \dot{\alpha})\vec{y_2}$

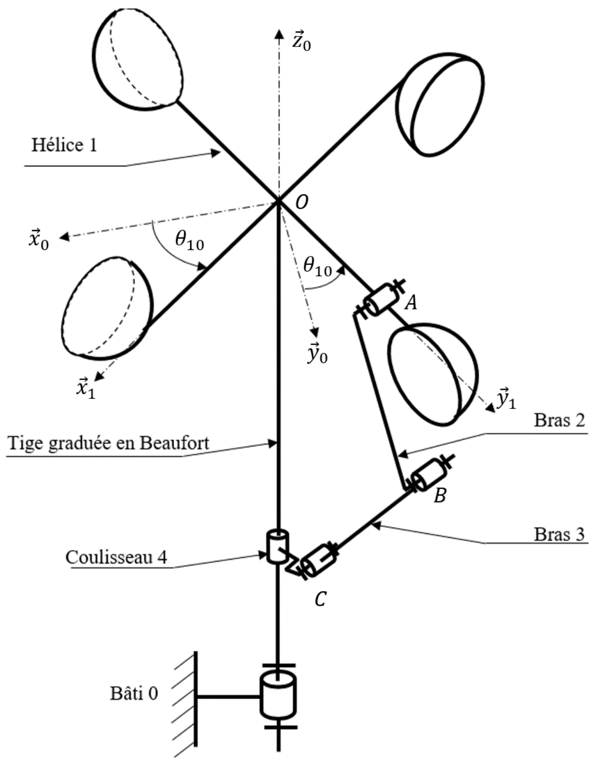
Et $\overrightarrow{V_{I,2/1}} = \overrightarrow{V_{O,2/1}} + \overrightarrow{IO} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \vec{0} - R\vec{x_2} \wedge (\dot{\alpha} - \dot{\beta})\vec{z_1} = R(\dot{\alpha} - \dot{\beta})\vec{y_2}$

On en déduit : $\boxed{r(\dot{\theta} - \dot{\alpha}) + R(\dot{\alpha} - \dot{\beta}) = 0}$

2. Anémomètre

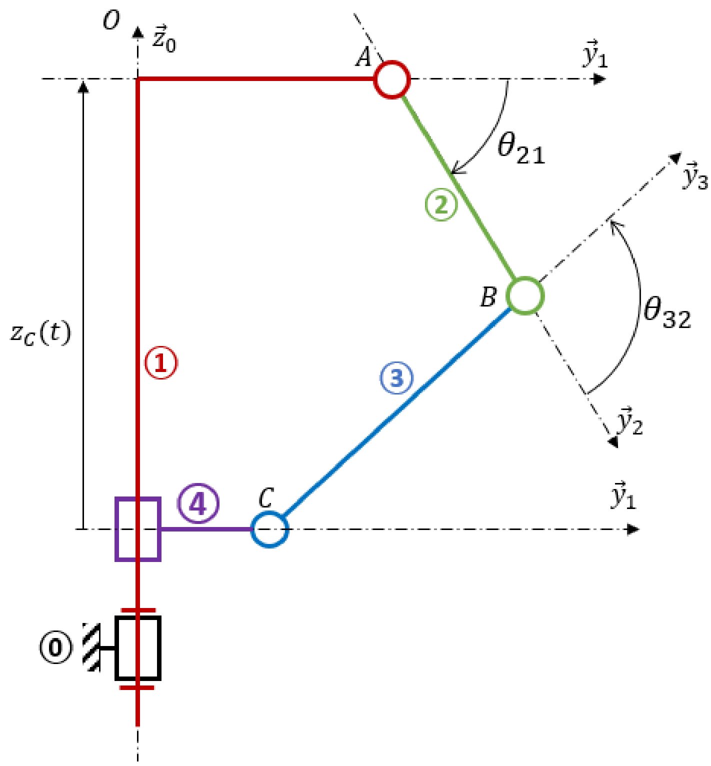
2.1 Présentation

Sous l'action du vent, l'hélice 1 tourne. Les bras 2 et 3 s'écartent alors sous l'effet centrifuge, entraînant le coulisseau 4 dans leur mouvement. Celui-ci coulisse le long de la tige verticale graduée en m/s et avec l'échelle de *Beaufort* indiquant la vitesse du vent.



Pour l'étude qui suit, le paramétrage et le schéma cinématique dans le plan $(O,\vec{y_1},\vec{z_0})$ sont donnés :

$$\overrightarrow{OA} = R\vec{y_1}\,;$$
$$\overrightarrow{AB} = L_2\vec{y_2}\,;$$
$$\overrightarrow{CB} = L_3\vec{y_3}\,;$$
$$\overrightarrow{OC} = r\vec{y_1} - z_c(t)\vec{z_0}$$

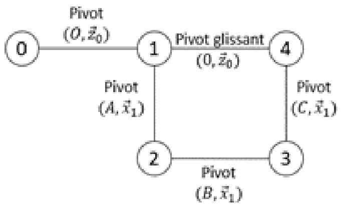


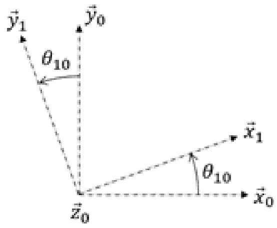
2.2 Étude

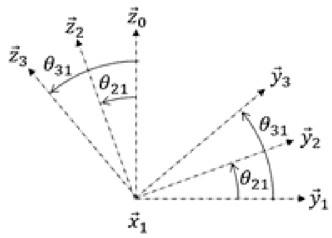
2.2.a Travail préliminaire

Question 5: Tracer le graphe des liaisons et réaliser les figures de changement de base.

Réponse 5:







2.2.b Étude géométrique

Question 6: Déterminer l'expression de z_c en fonction de θ_{21} et des longueurs L_2, L_3, R et r.

Réponse 6: Par fermeture géométrique, on a : $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AO} = \vec{0}$

Soit $r\vec{y_1} - z_c(t)\vec{z_0} + L_3\vec{y_3} - L_2\vec{y_2} - R\vec{y_1} = \vec{0}$

On définit $\theta_{31} = (\vec{y_1}, \vec{y_3}) = \theta_{32} + \theta_{21}$. En projetant sur $\vec{y_1}$ et $\vec{z_0}$, il vient :

$$\begin{cases} r + L_3\cos(\theta_{31}) - L_2\cos(\theta_{21}) - R = 0 \\ -z_c(t) + L_3\sin(\theta_{31}) - L_2\sin(\theta_{21}) = 0 \end{cases}$$

On veut éliminer θ_{31}, donc on l'isole :

$$\iff \begin{cases} L_3\cos(\theta_{31}) = R - r + L_2\cos(\theta_{21}) \\ L_3\sin(\theta_{31}) = z_c(t) + L_2\sin(\theta_{21}) \end{cases}$$

La grandeur à éliminer est un angle donc on élève au carré et on additionne :

$L_3^2 = [R - r + L_2\cos(\theta_{21})]^2 + [z_c(t) + L_2\sin(\theta_{21})]^2$

Soit $\boxed{[z_c(t) + L_2\sin(\theta_{21})]^2 = L_3^2 - [R - r + L_2\cos(\theta_{21})]^2}$.

2.2.c Étude cinématique

Question 7: Écrire les torseurs cinématiques pour chaque liaison. On posera $\overrightarrow{\Omega_{4/3}} = \omega_{43}\vec{x_1}$ et $\overrightarrow{\Omega_{4/1}} = \omega_{41}\vec{z_0}$.

Réponse 7: $\{\mathcal{V}_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dot\theta_{10} & 0 \end{Bmatrix}_{O,(-,-,\vec{z_0})}$ $\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \dot\theta_{21} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A,(\vec{x_1},-,-)}$

$\{\mathcal{V}_{3/2}\} = \begin{Bmatrix} \dot\theta_{32} = \dot\theta_{31} - \dot\theta_{21} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{B,(\vec{x_1},-,-)}$ $\{\mathcal{V}_{4/3}\} = \begin{Bmatrix} \omega_{43} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{C,(\vec{x_1},-,-)}$

$\{\mathcal{V}_{4/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{41} & -\dot z_c \end{Bmatrix}_{O,(-,-,\vec{z_0})}$

Question 8: Déterminer la vitesse $\overrightarrow{V_{B,2/0}}$.

(a) Par composition des vitesses.
(b) Par dérivation.

Réponse 8:

(a) La composition des vitesses donne : $\overrightarrow{V_{B,2/0}} = \overrightarrow{V_{B,2/1}} + \overrightarrow{V_{B,1/0}}$
Déterminons ces deux vecteurs vitesses par transport :
$\overrightarrow{V_{B,2/1}} = \overrightarrow{V_{A,2/1}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \vec{0} - L_2\vec{y_2} \wedge \dot{\theta}_{21}\vec{x_1}$
$\overrightarrow{V_{B,2/1}} = +L_2\dot{\theta}_{21}\vec{z_2}$
De même, $\overrightarrow{V_{B,1/0}} = \overrightarrow{V_{O,1/0}} + \overrightarrow{BO} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \vec{0} + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AO}) \wedge \dot{\theta}_{10}\vec{z_0}$
$\overrightarrow{V_{B,1/0}} = (-L_2\vec{y_2} - R\vec{y_1}) \wedge \dot{\theta}_{10}\vec{z_0} = -L_2\dot{\theta}_{10}\sin(\frac{\pi}{2} - \theta_{21})\vec{x_1} - R\dot{\theta}_{10}\vec{x_1}$
Soit $\overrightarrow{V_{B,1/0}} = -(R + L_2\cos(\theta_{21}))\dot{\theta}_{10}\vec{x_1}$
Enfin, $\boxed{\overrightarrow{V_{B,2/0}} = L_2\dot{\theta}_{21}\vec{z_2} - (R + L_2\cos(\theta_{21}))\dot{\theta}_{10}\vec{x_1}}$.

(b) Le point B appartient physiquement au solide 2, on peut alors écrire :
$\overrightarrow{V_{B,2/0}} = \left.\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\right]_{R_0}$
$\overrightarrow{V_{B,2/0}} = \left.\frac{d(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB})}{dt}\right]_{R_0}$ (on peut aussi passer par $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB}$)
$\overrightarrow{V_{B,2/0}} = \left.\frac{d(R\vec{y_1} + L_2\vec{y_2})}{dt}\right]_{R_0} = \left.\frac{dR\vec{y_1}}{dt}\right]_{R_0} + \left.\frac{dL_2\vec{y_2}}{dt}\right]_{R_0} = R\left.\frac{d\vec{y_1}}{dt}\right]_{R_0} + L_2\left.\frac{d\vec{y_2}}{dt}\right]_{R_0}$
D'après la formule de Bour :
$\left.\frac{d\vec{y_1}}{dt}\right]_{R_0} = \left.\frac{d\vec{y_1}}{dt}\right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \vec{y_1}$
$\Rightarrow \overrightarrow{V_{B,2/0}} = R\dot{\theta}_{10}\vec{z_0} \wedge \vec{y_1} + L_2(\dot{\theta}_{21}\vec{x_1} + \dot{\theta}_{10}\vec{z_0}) \wedge \vec{y_2}$
$\iff \overrightarrow{V_{B,2/0}} = -R\dot{\theta}_{10}\vec{x_1} + L_2(\dot{\theta}_{21}\vec{z_2} - \dot{\theta}_{10}\cos(\theta_{21})\vec{x_1})$
Soit $\boxed{\overrightarrow{V_{B,2/0}} = -(R + L_2\cos(\theta_{21})\dot{\theta}_{10}\vec{x_1} + L_2\dot{\theta}_{10}\vec{z_2}}$.
Ou en passant par $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB}$:
$\boxed{\overrightarrow{V_{B,2/0}} = -(r + L_3\cos(\theta_{32} + \theta_{21}))\dot{\theta}_{10}\vec{x_1} + L_3(\dot{\theta}_{32} + \dot{\theta}_{21})\vec{z_3} + \dot{z}_c(t)\vec{z_0}}$.

Question 9: Écrire la fermeture cinématique sous forme de torseur.

Réponse 9: $\{\mathcal{V}_{4/1}\} = \{\mathcal{V}_{4/3}\} + \{\mathcal{V}_{3/2}\} + \{\mathcal{V}_{2/1}\}$

Question 10: En déduire ω_{43} et ω_{41} en fonction des autres paramètres.

Réponse 10: La composition des vecteurs vitesses de rotation donne :
$\overrightarrow{\Omega_{4/1}} = \overrightarrow{\Omega_{4/3}} + \overrightarrow{\Omega_{3/2}} + \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \iff \omega_{41}\vec{z_0} = \omega_{43}\vec{x_1} + (\dot{\theta}_{31} - \dot{\theta}_{21})\vec{x_1} + \dot{\theta}_{21}\vec{x_1}$
$\iff \begin{cases} \omega_{41} = 0 \\ 0 = \omega_{43} + (\dot{\theta}_{31} - \dot{\theta}_{21}) + \dot{\theta}_{21} \end{cases}$
On en déduit $\boxed{\omega_{41} = 0 \text{ et } \omega_{43} = -\dot{\theta}_{31}}$.