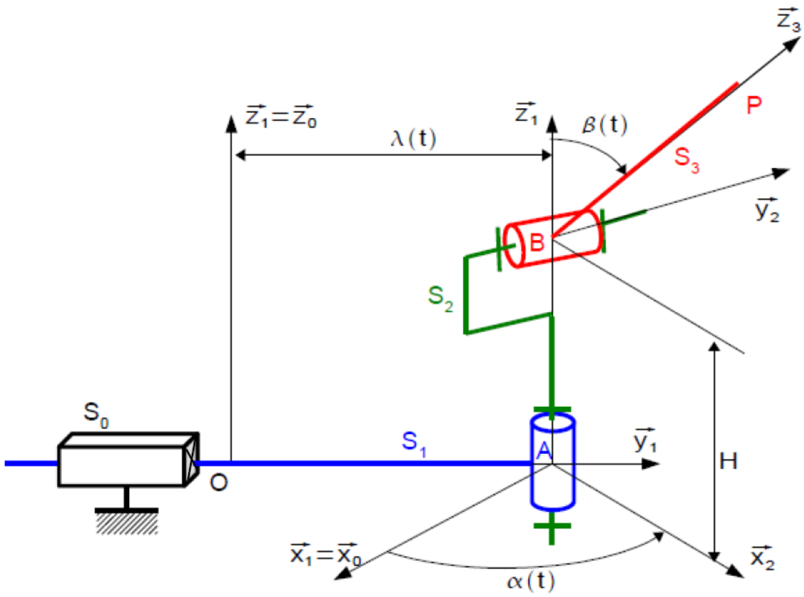
Correction DM 3 - SI

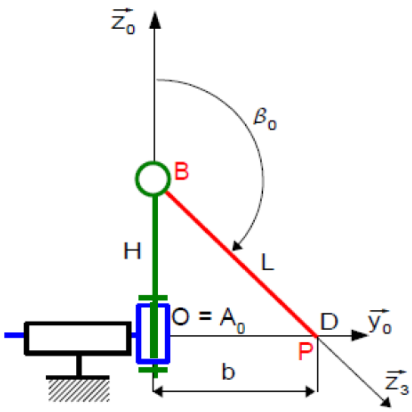
1. Robot de peinture

Présentation

On étudie un robot de peinture de voiture dont le modèle cinématique est donné sur la figure ci-dessous.



Shéma cinématique du robot



Position médiane (P est en D)

Paramétrage

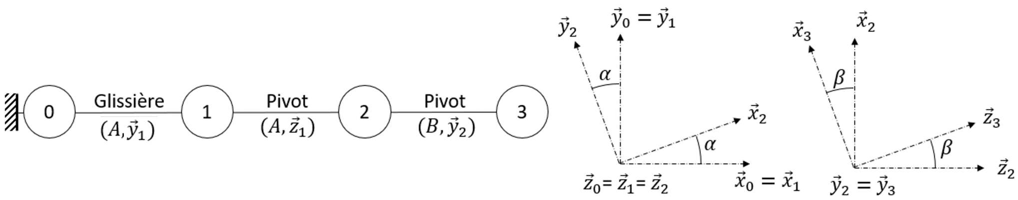
Le robot est constitué par :

- Le chariot S_1, auquel on associe le repère $R_1 = (A, \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$, est en mouvement de translation d'axe $(A, \vec{y_0})$ par rapport au bâti S_0, de repère $R_0 = (O, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$;
- Le corps S_2, auquel on associe le repère $R_2 = (A, \vec{x_2}, \vec{y_2}, \vec{z_2})$, est en mouvement de rotation d'axe $(A, \vec{z_1})$ avec le chariot S_1 ;
- Le bras S_3, auquel on associe le repère $R_3 = (B, \vec{x_3}, \vec{y_3}, \vec{z_3})$, est en mouvement de rotation d'axe $(B, \vec{y_2})$ avec le corps S_2.

On a : $\overrightarrow{OA} = \lambda(t)\vec{y_0}$; $\overrightarrow{AB} = H\vec{z_1}$; $\overrightarrow{BP} = L\vec{z_3}$ et $\alpha = (\vec{x_1}, \vec{x_2})$; $\beta = (\vec{z_2}, \vec{z_3})$

Étude

Question 1: Tracer le graphe des liaisons et les figures de changement de bases.



Réponse 1:

Question 2: En déduire les torseurs cinématiques de chacune des liaisons.

Réponse 2:
$$\{\mathcal{V}_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dot{\lambda} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{O,(-,\vec{y_1},-)}$$

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dot{\alpha} & 0 \end{Bmatrix}_{A,(-,-,\vec{z_1})}$$

$$\{\mathcal{V}_{3/2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \dot{\beta} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{B,(-,\vec{y_2},-)}$$

Question 3: Déterminer $\overrightarrow{V_{P,3/0}}$:

(a) Par dérivation.
(b) Par composition des vecteurs vitesses.

Réponse 3:

(a) Le point P appartient physiquement au solide S_3, on peut alors écrire :
$\overrightarrow{V_{P,3/0}} = \left.\dfrac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\right|_{R_0} = \left.\dfrac{d\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}}{dt}\right|_{R_0} = \left.\dfrac{d\lambda(t)\vec{y_0}+H\vec{z_1}+L\vec{z_3}}{dt}\right|_{R_0}$
Soit $\overrightarrow{V_{P,3/0}} = \left.\dfrac{d\lambda(t)\vec{y_0}}{dt}\right|_{R_0} + \left.\dfrac{dH\vec{z_1}}{dt}\right|_{R_0} + \left.\dfrac{dL\vec{z_3}}{dt}\right|_{R_0}$
$\Longleftrightarrow \overrightarrow{V_{P,3/0}} = \left.\dfrac{d\lambda(t)}{dt}\vec{y_0}\right|_{R_0} + \lambda(t)\left.\dfrac{d\vec{y_0}}{dt}\right|_{R_0} + \left.\dfrac{dH}{dt}\vec{z_1}\right|_{R_0} + H\left.\dfrac{d\vec{z_1}}{dt}\right|_{R_0} + \left.\dfrac{dL}{dt}\vec{z_3}\right|_{R_0} +$
$L\left.\dfrac{d\vec{z_3}}{dt}\right|_{R_0} = \dot{\lambda}\vec{y_0} + \vec{0}+\vec{0}+\vec{0}+\vec{0} + L\left.\dfrac{d\vec{z_3}}{dt}\right|_{R_0}$ car H, L, $\vec{y_0}$ et $\vec{z_1}$ ne varient pas au cours du temps par rapport à R_0.
D'après la formule de Bour :
$L\left.\dfrac{d\vec{z_3}}{dt}\right|_{R_0} = L\left.\dfrac{d\vec{z_3}}{dt}\right|_{R_3} + \overrightarrow{\Omega_{3/0}} \wedge \vec{z_3}$
Et $\overrightarrow{\Omega_{3/0}} = \overrightarrow{\Omega_{3/2}} + \overrightarrow{\Omega_{2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \dot{\beta}\vec{x_3} + \dot{\alpha}\sin(\beta)\vec{y_3} + \vec{0}$.
Enfin : $\boxed{\overrightarrow{V_{P,3/0}} = \dot{\lambda}\vec{y_0} + L\dot{\beta}\vec{x_3} + L\dot{\alpha}\sin(\beta)\vec{y_3}}$

(b) La composition des vecteurs vitesses donne :
$\overrightarrow{V_{P,3/0}} = \overrightarrow{V_{P,3/2}} + \overrightarrow{V_{P,2/1}} + \overrightarrow{V_{P,1/0}}$ calculons ces trois vitesses à partir des torseurs déterminer précédemment.
$\overrightarrow{V_{P,3/2}} = \overrightarrow{V_{B,3/2}} + \overrightarrow{PB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{3/2}} = \vec{0} - L\vec{z_3} \wedge \dot{\beta}\vec{y_2} = L\dot{\beta}\vec{x_3}$
De même pour les autres vitesses on trouve :
$\overrightarrow{V_{P,2/1}} = L\dot{\alpha}\sin(\beta)\vec{y_3}$ et $\overrightarrow{V_{P,1/0}} = \dot{\lambda}\vec{z_0}$
D'où $\boxed{\overrightarrow{V_{P,3/0}} = L\dot{\beta}\vec{x_3} + L\dot{\alpha}\sin(\beta)\vec{y_3} + \dot{\lambda}\vec{z_0}}$

On définit la position dite médiane pour laquelle le Point P est en D par $\lambda = 0$; $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ et $\beta = \beta_0$ (figure de droite).

Question 4: Déterminer l'expression de β_0 en fonction de L et H.

Réponse 4: On exprime le vecteur position $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP}$ (équivalent à une fermeture géométrique). Il vient $b\vec{y_0} = H\vec{z_0} + L\vec{z_3}$ soit en projection sur $\vec{y_0}$ et $\vec{z_0}$:

$$\begin{cases} 0 = L\sin(\beta)\cos(\alpha) \\ b = L\sin(\beta)\sin(\alpha) \\ 0 = H + L\cos(\beta) \end{cases}$$

Or $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ et $\beta = \beta_0$, d'où : $\begin{cases} 0 = 0 \\ b = L\sin(\beta_0) \\ H = -L\cos(\beta_0) \end{cases}$

D'où $\boxed{\beta_0 = \arccos\left(-\dfrac{H}{L}\right) = \arcsin\left(\dfrac{b}{L}\right)}$

On veut que le point P se déplace sur la droite $(D, \vec{x_0})$ à la vitesse constante de norme V.

Question 5: Déterminer les vitesses $\dot{\lambda}$, $\dot{\alpha}$ et $\dot{\beta}$ à imposer en fonction de V et des paramètres géométriques.

Réponse 5: On veut alors $\overrightarrow{V_{P,3/0}} = V\vec{x_0}$. Exprimons $\overrightarrow{V_{P,3/0}}$ dans la base 0 :

$$\overrightarrow{V_{P,3/0}} = \begin{pmatrix} \left[L\dot{\beta}\cos(\beta)\cos(\alpha) - L\dot{\alpha}\sin(\beta)\sin(\alpha)\right]\vec{x_0} \\ \left[\dot{\lambda} + L\dot{\beta}\cos(\beta)\sin(\alpha) + L\dot{\alpha}\sin(\beta)\cos(\alpha)\right]\vec{y_0} \\ -L\dot{\beta}\sin(\beta)\vec{z_0} \end{pmatrix}$$

On obtient alors un système de trois équations :

$$\begin{cases} V = L\dot{\beta}\cos(\beta)\cos(\alpha) - L\dot{\alpha}\sin(\beta)\sin(\alpha) \\ 0 = \dot{\lambda} + L\dot{\beta}\cos(\beta)\sin(\alpha) + L\dot{\alpha}\sin(\beta)\cos(\alpha) \\ 0 = -L\dot{\beta}\sin(\beta) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} V = L\dot{\beta}\cos(\beta)\cos(\alpha) - L\dot{\alpha}\sin(\beta)\sin(\alpha) \\ 0 = \dot{\lambda} + L\dot{\beta}\cos(\beta)\sin(\alpha) + L\dot{\alpha}\sin(\beta)\cos(\alpha) \\ 0 = \dot{\beta} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} V = -L\dot{\alpha}\sin(\beta)\sin(\alpha) \\ 0 = \dot{\lambda} + L\dot{\alpha}\sin(\beta)\cos(\alpha) \\ 0 = \dot{\beta} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \dot{\alpha} = \dfrac{-V}{L\sin(\beta)\sin(\alpha)} \\ \dot{\lambda} = -L\dot{\alpha}\sin(\beta)\cos(\alpha) \\ 0 = \dot{\beta} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \dot{\alpha} = \dfrac{-V}{L\sin(\beta)\sin(\alpha)} \\ \dot{\lambda} = -L\dfrac{-V}{L\sin(\beta)\sin(\alpha)}\sin(\beta)\cos(\alpha) \\ 0 = \dot{\beta} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \dot{\alpha} = \dfrac{-V}{L\sin(\beta)\sin(\alpha)} \\ \dot{\lambda} = \dfrac{V}{\tan(\alpha)} \\ 0 = \dot{\beta} \end{cases}$$

De plus, dans cette configuration $\beta = \beta_0$, et comme $\beta_0 = \arcsin(\frac{b}{L})$, il vient :

$$\boxed{\begin{cases} \dot{\alpha} = \dfrac{-V}{b\sin(\alpha)} \\ \dot{\lambda} = \dfrac{V}{\tan(\alpha)} \\ \dot{\beta} = 0 \end{cases}}$$

2. Rugosimètre

Présentation

La rugosimétrie est la mesure de l'état de surface des pièces mécaniques. L'ordre de grandeur des défauts mesurés est le micron. Cette mesure des états de surfaces est aussi répandue et indispensable que la mesure des caractéristiques dimensionnelles et géométriques des pièces mécaniques (longueur, orientation, perpendicularité...). La figure 1 représente un relevé rugosimétrique tridimensionnel d'une partie d'une aube de turbine de haute précision, ainsi qu'un schéma cinématique de l'outil.

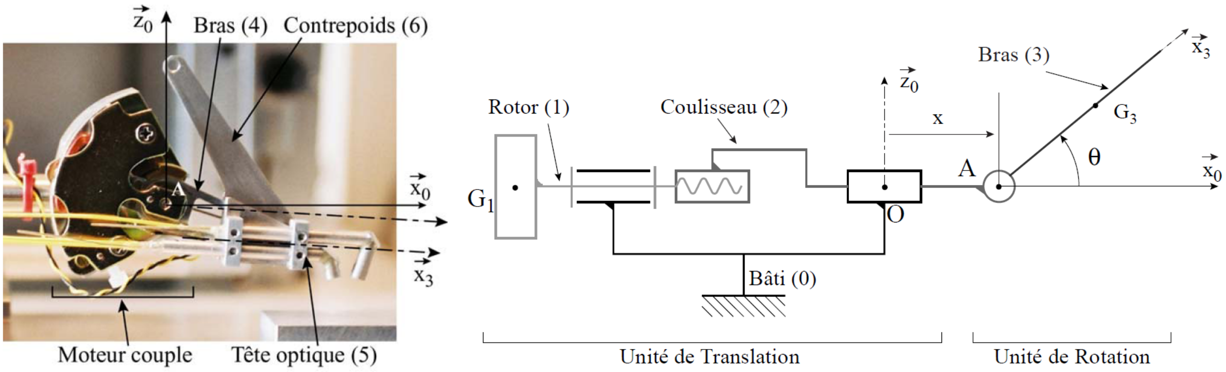


FIGURE 1

Paramétrage

Le paramétrage est donné par la figure 1. Ce système comporte quatre pièces :

— Le bâti 0, auquel on associe le repère $\mathcal{R}_0 = (0, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$, considéré galilléen ;

— Le rotor 1, en liaison pivot d'axe $(O, \vec{x_0})$ avec le bâti, donc le paramètre angulaire est $\phi = (\vec{y_0}, \vec{y_1})$;

— Le coulisseau 2, en liaison hélicoïdale d'axe $(O, \vec{x_0})$ avec 1, de pas noté $\lambda = 0.5mm$ et également en liaison glissière d'axe $(O, \vec{x_0})$ avec le bâti, de paramètre $\overrightarrow{OA} = x(t)\vec{x_0}$;

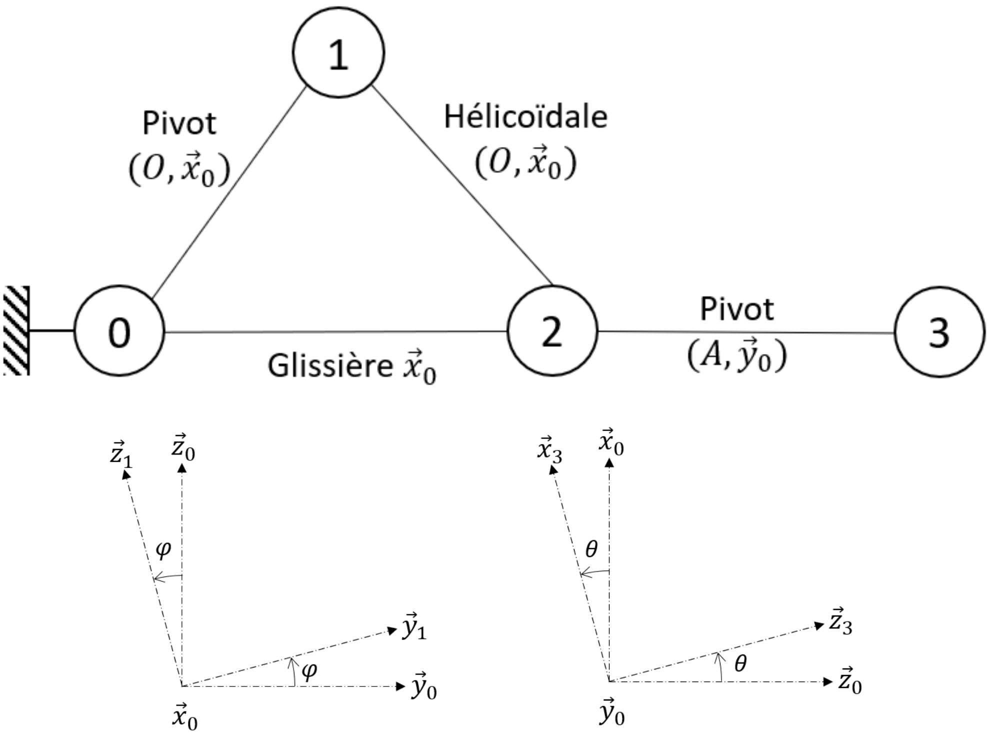
— L'ensemble 3 de centre d'inertie G_3 avec $\overrightarrow{AG_3} = r\vec{x_3}$ et en liaison pivot d'axe $(A, \vec{y_0})$ avec 2, de paramètre angulaire $\theta = (\vec{x_0}, \vec{x_3})$.

Problématique

Pour dimensionner la motorisation, les calculs de dynamique conduisent à rechercher $\overrightarrow{\Gamma_{G_3,3/0}}$.

Question 6: Tracer le graphe des liaisons et les figures de changement de bases.

Réponse 6:



Question 7: En déduire les torseurs cinématiques de chacune des liaisons.

Réponse 7: $\{\mathcal{V}_{1/0}\} = \left\{\begin{array}{cc} \dot\phi & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_{O,(\vec{x}_0,-,-)}$ $\quad \{\mathcal{V}_{2/1}\} = \left\{\begin{array}{cc} \omega_{21} & v_{21} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_{O,(\vec{x}_0,-,-)}$

$\{\mathcal{V}_{2/0}\} = \left\{\begin{array}{cc} 0 & \dot x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_{O,(\vec{x}_0,-,-)}$ $\quad \{\mathcal{V}_{3/2}\} = \left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \dot\theta & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_{A,(-,\vec{y}_0,-)}$

Question 8: Déterminer la relation entre $x(t)$ et ϕ et en déduire la relation entre $\dot x(t)$ et $\dot\phi$.

Réponse 8: On a par composition des vecteurs vitesses : $\overrightarrow{V_{A,2/1}} = \overrightarrow{V_{A,2/0}} + \overrightarrow{V_{A,0/1}} = \overrightarrow{V_{A,2/0}} - \overrightarrow{V_{A,1/0}}$

Or $\overrightarrow{V_{A,1/0}} = \vec{0}$ car A appartient à l'axe de rotation entre 1 et 0. On en déduit $\overrightarrow{V_{A,2/1}} = \overrightarrow{V_{A,2/0}} = \dot x \vec{x}_0$

De même pour les résultantes (vecteurs vitesse instantanée de rotation) : $\overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \overrightarrow{\Omega_{2/0}} - \overrightarrow{\Omega_{1/0}}$ et $\overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = -\dot\phi \vec{x}_0$.

On a alors $\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \left\{\begin{array}{cc} -\dot\phi & \dot x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_{O,(\vec{x}_0,-,-)}$ ces deux grandeurs sont donc reliés par la relation imposée par la liaison hélicoïdale. En un tour (2π), la distance parcourue est de un pas (λ), ainsi avec un rotation d'un angle ϕ, la distance parcourue est de x avec la relation : $x = \frac{-\lambda}{2\pi}\phi$. Donc $\boxed{\dot x = \frac{-\lambda}{2\pi}\dot\phi}$

Question 9: Déterminer $\overrightarrow{V_{G_3,3/0}}$ en fonction de $\dot{\theta}$ et $\dot{\phi}$:

(a) Par dérivation.
(b) Par composition des vecteurs vitesses.

Réponse 9:

(a) Le point G_3 appartient physiquement au solide 3, on peut alors écrire :
$\overrightarrow{V_{G_3,3/0}} = \left.\dfrac{d\overrightarrow{OG_3}}{dt}\right]_{R_0} = \left.\dfrac{d\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AG_3}}{dt}\right]_{R_0} = \left.\dfrac{d(x(t)\vec{x_0}+r\vec{x_3})}{dt}\right]_{R_0}$
$\iff \overrightarrow{V_{G_3,3/0}} = \left.\dfrac{dx(t)\vec{x_0}}{dt}\right]_{R_0} + \left.\dfrac{dr\vec{x_3}}{dt}\right]_{R_0} = \left.\dfrac{dx(t)}{dt}\right]_{R_0}\vec{x_0} + r\left.\dfrac{d\vec{x_3}}{dt}\right]_{R_0}$ car r et $\vec{x_0}$ ne varient pas au cours du temps par rapport à R_0.
$\iff \overrightarrow{V_{G_3,3/0}} = \dot{x}\vec{x_0} + r\left(\left.\dfrac{d\vec{x_3}}{dt}\right]_{R_3} + \overrightarrow{\Omega_{3/0}}\wedge\vec{x_3}\right)$ d'après la formule de Bour.
D'où $\overrightarrow{V_{G_3,3/0}} = \dot{x}\vec{x_0} + r\left(\overrightarrow{\Omega_{3/2}}+\overrightarrow{\Omega_{2/0}}\right)\wedge\vec{x_3}$
$\iff \overrightarrow{V_{G_3,3/0}} = \dot{x}\vec{x_0} + r\left(\dot{\theta}\vec{y_0}+\vec{0}\right)\wedge\vec{x_3}$
Enfin : $\boxed{\overrightarrow{V_{G_3,3/0}} = \dfrac{-\lambda}{2\pi}\dot{\phi}\vec{x_0} - r\dot{\theta}\vec{z_3}}$

(b) La composition des vecteurs vitesses donne : $\overrightarrow{V_{G_3,3/0}} = \overrightarrow{V_{G_3,3/2}} + \overrightarrow{V_{G_3,2/0}}$.
On a : $\overrightarrow{V_{G_3,3/2}} = \overrightarrow{V_{A,3/2}} + \overrightarrow{G_3A}\wedge\overrightarrow{\Omega_{3/2}} = \vec{0} - r\vec{x_3}\wedge\dot{\theta}\vec{y_0} = -r\dot{\theta}\vec{z_3}$
Et : $\overrightarrow{V_{G_3,2/0}} = \overrightarrow{V_{O,2/0}}$ car $\overrightarrow{\Omega_{3/2}} = \vec{0}$ (mouvement de translation pur)
Il vient alors : $\boxed{\overrightarrow{V_{G_3,3/0}} = -r\dot{\theta}\vec{z_3} - \dfrac{\lambda}{2\pi}\dot{\phi}\vec{x_0}}$

Question 10: Déterminer l'accélération $\overrightarrow{\Gamma_{G_3,3/0}}$ en fonction de $\ddot{\theta}$ et $\ddot{\phi}$.

Réponse 10: Pour calculer une accélération, il est nécessaire de dériver le vecteur vitesse :
$\overrightarrow{\Gamma_{G_3,3/0}} = \left.\dfrac{d\overrightarrow{V_{G_3,3/0}}}{dt}\right]_{R_0} = \left.\dfrac{d(-r\dot{\theta}\vec{z_3}+\dot{x}\vec{x_0})}{dt}\right]_{R_0}$
$\iff \overrightarrow{\Gamma_{G_3,3/0}} = -r\ddot{\theta}\vec{z_3} - r\dot{\theta}\left.\dfrac{d\vec{z_3}}{dt}\right]_{R_0} + \ddot{x}\vec{x_0}$
$\iff \overrightarrow{\Gamma_{G_3,3/0}} = -r\ddot{\theta}\vec{z_3} - r\dot{\theta}\dot{\theta}\vec{x_3} + \ddot{x}\vec{x_0}$
En remarquant que $\ddot{x} = \dfrac{-\lambda}{2\pi}\ddot{\phi}$, il vient : $\boxed{\overrightarrow{\Gamma_{G_3,3/0}} = -r\ddot{\theta}\vec{z_3} - r\dot{\theta}^2\vec{x_3} - \dfrac{\lambda}{2\pi}\ddot{\phi}\vec{x_0}}$