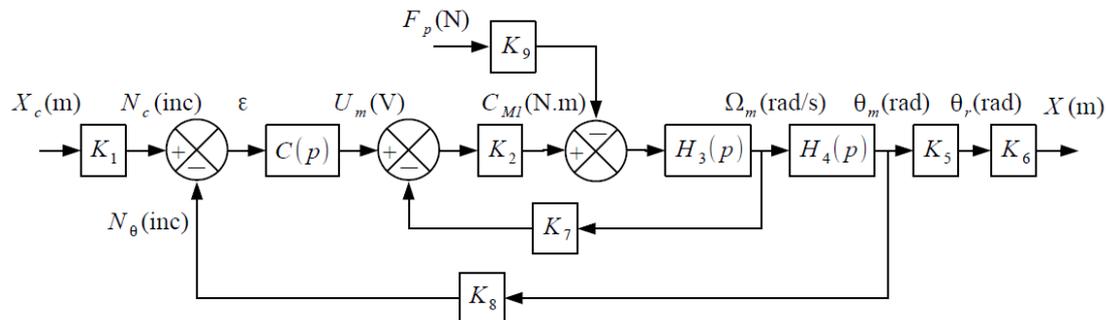


PCSI – DS7 – 2h

Corrigé



Modélisation des blocs

L'ensemble moteur CC

Q1. A partir des équations, déterminer les fonctions de transfert K_2 , $H_3(p)$, K_7 et K_9 .

$$[1] + [3] \rightarrow C_{M1} = k_t \cdot I(p) = \frac{k}{R} (U_m(p) - E(p))$$

Donc

$$K_2 = \frac{k}{R}$$

$$[2] \rightarrow E(p) = k\Omega_m(p)$$

Donc

$$[4] \rightarrow \Omega_m(p) = \frac{K_7 = k}{M_{eq}(r\rho_1)^2 p} (C_{M1} - r\rho_1 F_p)$$

Donc

$$H_3(p) = \frac{1}{M_{eq}(r\rho_1)^2 p} ; K_9 = r\rho_1$$

Détermination des autres fonctions de transfert

Bloc $H_4(p)$

Q2. Donner la fonction de transfert $H_4(p)$.

La vitesse est la dérivée de la position donc

$$H_4(p) = \frac{1}{p}$$

Codeur incrémental

Q3. A partir de l'allure des signaux, sachant que l'on fait une mesure sur chaque front montant et front descendant des deux voies, déterminer le nombre d'incrément mesurables par tour en fonction du nombre de fentes. En déduire la fonction de transfert K_8 .

On a 4 informations (2 fronts montants et 2 fronts descendant) par fentes ce qui donne 2000 inc par tours.

Donc

$$K_8 = \frac{2000}{2\pi} \approx 318,3 \text{ inc. rad}^{-1}$$

Réducteur

Q4. Déterminer la relation entre les vitesses de rotation ω_{10} et ω_{30} en fonction de Z_0 et Z_1 .

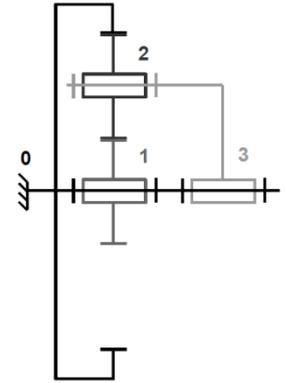
On a un train épicycloïdal de planétaires 0 et 1, de satellite 2 et de porte-satellite 3. Donc de raison basique

$$\frac{\omega_1 - \omega_3}{\omega_0 - \omega_3} = -\frac{Z_0 Z_2}{Z_2 Z_1} = -\frac{Z_0}{Z_1}$$

Comme $\omega_0 = 0$,

$$\omega_1 - \omega_3 = \frac{Z_0}{Z_1} \omega_3$$

$$\omega_1 = \left(1 + \frac{Z_0}{Z_1}\right) \omega_3 = \frac{Z_0 + Z_1}{Z_1} \omega_3$$



Q5. Les solides 1 et 3 du réducteur sont liés soit à l'axe moteur, soit à l'axe de la poulie. Définir en le justifiant quel solide est relié à quel axe.

On veut un rapport de réduction $\rho_1 < 1$ donc

- Axe **moteur** relié à **1**
- Axe **poulie** relié à **3**

Q6. Sachant que $Z_1 = 10$ dents, déterminer les nombres de dents Z_0 et Z_2 permettant de respecter le rapport de réduction du système.

Ainsi

$$\rho_1 = \frac{Z_1}{Z_0 + Z_1}$$

Donc

$$Z_0 = \frac{1 - \rho_1}{\rho_1} Z_1 ; AN : Z_0 = 90 \text{ dents}$$

D'autre part, on a géométriquement

$$R_0 = R_1 + 2R_2$$

Comme " $R = 2mZ$ "

$$Z_2 = \frac{1}{2}(Z_0 - Z_1) ; AN Z_2 = 40 \text{ dents}$$

Q7. Déterminer la fonction de transfert K_5 .

On a par définition

$$K_5 = \rho_1$$

Dispositif poulie-courroie

Q8. Déterminer la fonction de transfert K_6 .

En supposant qu'il n'y a pas glissement entre les poulies et la courroie,

$$K_6 = r$$

Convertisseur analogique/numérique

Q9. Déterminer l'expression de la fonction de transfert K_1 en fonction de K_8 , K_5 et K_6 permettant d'obtenir un asservissement de X sur la consigne X_c .

On a

$$\varepsilon_x = K_1 \cdot X_c - \frac{K_8}{K_5 K_6} X$$

Pour que l'asservissement fonctionne correctement, $\varepsilon_x = 0$ si $X = X_c$ donc

$$K_1 = \frac{K_8}{K_5 K_6}$$

Vérification des performances de l'asservissement

Correction proportionnelle

On suppose que $C(p) = K_c$.

Q10. Exprimer ε_x en fonction des deux entrées F_p et X_c et des constantes A, B, D et K_c .

On applique le théorème de superposition en prenant ε_x en sortie. Il vient

$$\varepsilon_x = \frac{1}{1 + \frac{K_c A}{p(1+Bp)}} X_c + \frac{\frac{DA}{p(1+Bp)}}{1 + \frac{K_c A}{p(1+Bp)}} F_p$$

$$\varepsilon_x = \frac{p(1+Bp)}{K_c A + p + Bp^2} X_c + \frac{DA}{K_c A + p + Bp^2} F_p$$

Q11. Déterminer l'écart de position ε_0 en réponse à deux échelons d'intensité F_0 pour la force du patient et X_0 pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.

On applique le théorème de la valeur finale

$$\varepsilon_x = \frac{DF_0}{K_c}$$

Le cahier des charges est respecté vis-à-vis de l'entrée mais pas vis-à-vis de la perturbation.

Correction proportionnelle intégrale

Q12. Exprimer ε_x en fonction des deux entrées F_p et X_c et des constantes A, B, D, K_i et T_i .

Dans l'expression précédente, on remplace K_c par l'expression du correcteur soit

$$C(p) = K_i \left(\frac{1 + T_i p}{T_i p} \right)$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{1 + \frac{K_i \left(\frac{1 + T_i p}{T_i p} \right) A}{p(1+Bp)}} X_c + \frac{\frac{DA}{p(1+Bp)}}{1 + \frac{K_i \left(\frac{1 + T_i p}{T_i p} \right) A}{p(1+Bp)}} F_p$$

$$\varepsilon_x = \frac{T_i p^2 (1+Bp)}{T_i p^2 (1+Bp) + K_i (1+T_i p) A} X_c + \frac{DA T_i p}{T_i p^2 (1+Bp) + K_i (1+T_i p) A} F_p$$

Q13. Déterminer l'écart de position ε_0 en réponse à deux échelons d'intensité F_0 pour la force du patient et X_0 pour le déplacement. Conclure quant au respect du cahier des charges.

Par application du théorème de la valeur finale, on trouve maintenant

$$\varepsilon_0 = 0$$

Le cahier des charges est validé.

Q14. Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte du système.

$$FTBO(p) = \frac{C(p)A}{p(1+Bp)} = K_i \left(\frac{1 + T_i p}{T_i p} \right) \frac{A}{p(1+Bp)}$$

$$FTBO(p) = \frac{AK_i (1 + T_i p)}{T_i p^2 (1 + Bp)}$$

Q15. Déterminer la valeur T_i permettant d'assurer la marge de phase pour la pulsation au gain unité souhaitée (pulsation pour laquelle le gain en décibel est nul).

On a

$$\varphi(FTBO(\omega_{0dB})) = \varphi\left(\frac{K_i}{T_i p^2}\right) + \varphi(1 + T_i p) + \varphi(1 + Bp) = -135^\circ$$

$$\varphi(FTBO(\omega_{0dB})) = -180 + \text{atan}(T_i \omega_{0dB}) - \text{atan}(B \omega_{0dB}) = -135^\circ$$

Soit

$$\text{atan}(T_i \omega_{0dB}) = 180 + \text{atan}(B \omega_{0dB}) - 135^\circ$$

AN

$$T_i = \frac{1}{\omega_{0dB}} \tan(180 + \text{atan}(B\omega_{0dB}) - 135)$$

$T_i = 0.06 \text{ s}$

Q16. Déterminer K_i permettant d'assurer la pulsation au gain unité souhaitée.

On veut

$$G_{dB}(FTBO(\omega_{0dB})) = 0dB$$

$$|FTBO(\omega_{0dB})| = 1 = \left| \frac{AK_i (1 + T_i p)}{T_i p^2 (1 + Bp)} \right| = \frac{AK_i \sqrt{1 + (T_i \omega_{0dB})^2}}{T_i \omega_{0dB}^2 \sqrt{1 + (B\omega_{0dB})^2}}$$

Donc

$$K_i = \frac{T_i \omega_{0dB}^2 \sqrt{1 + (B\omega_{0dB})^2}}{A \sqrt{1 + (T_i \omega_{0dB})^2}}$$

AN

$K_i = 7,92 \cdot 10^{-3}$

Quelque soient les résultats trouvés, on prend pour la suite

$T_i = 0,06s ; K_i = 0,008$

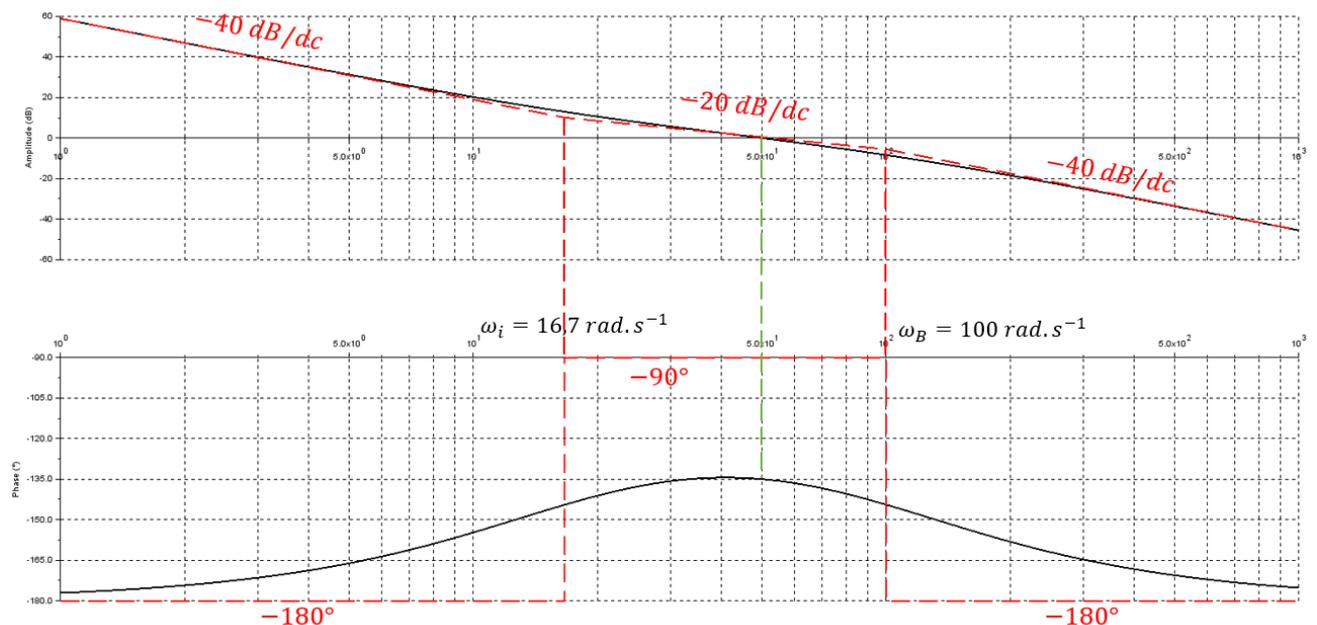
Q17. Tracer l'allure des diagrammes de Bode asymptotiques de la FTBO.

On a deux pulsations de coupure : $\omega_i = \frac{1}{T_i} = 16.7 \text{ rad. s}^{-1}$ et $\omega_B = \frac{1}{B} = 100 \text{ rad. s}^{-1}$

Ainsi

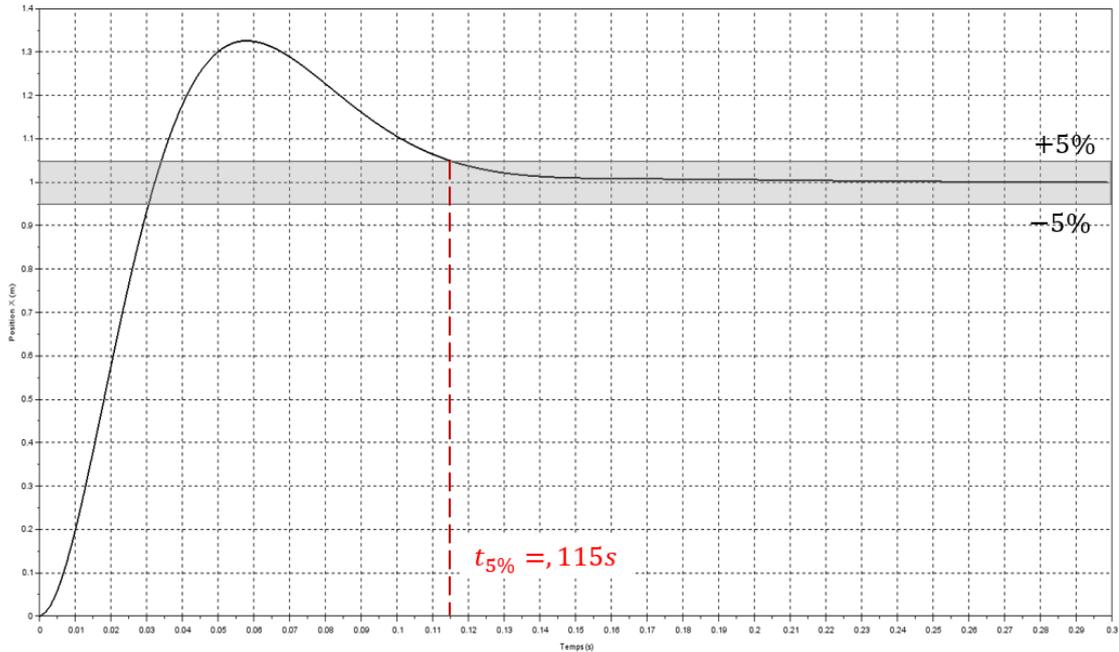
	$FTBO(p)$	G_{dB}	φ
$\omega < \omega_i$	$FTBO \approx \frac{AK_i}{T_i p^2}$	-40 dB/dc	-180°
$\omega_i < \omega < \omega_B$	$FTBO \approx \frac{AK_i}{p}$	-20 dB/dc	-90°
$\omega_B < \omega$	$FTBO \approx \frac{AK_i}{B p^2}$	-40 dB/dc	-180°

Seules les asymptotes étaient demandées



La phase ne descend jamais sous les -180° donc $G_{dB}(FTBO(\omega_{-180^\circ})) \rightarrow -\infty < -7dB$, Le cahier des charges est respecté.

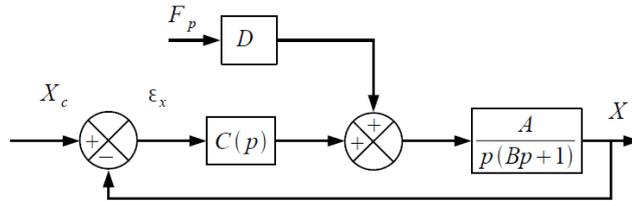
Q18. Conclure quant au respect du cahier des charges sur le reste des critères énoncés. Faire apparaître sur le document réponse les grandeurs mesurées.



On a un temps de réponse à 5% : $t_{5\%} \approx 0,115s < 0,2s$ le cahier des charges est respecté.

Question Bonus

Q19. Montrer que le schéma-bloc précédent, peut être mis sous la forme suivante :



Exprimer A , B et D (constants) en fonction des paramètres du système : r , ρ_1 , k_t , k_e , R , M , m et K_g .

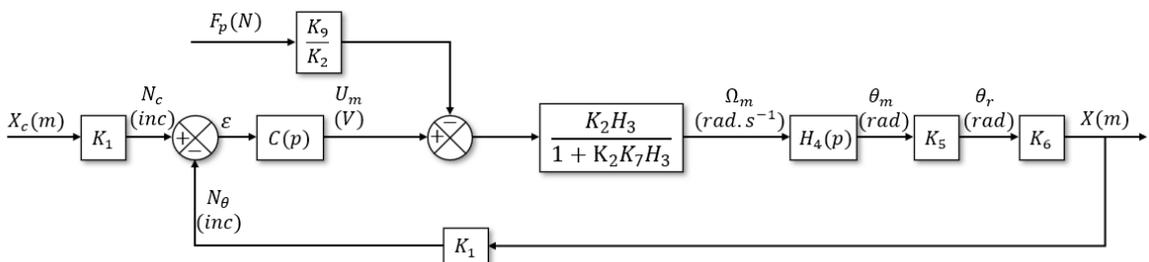
En utilisant la question Q9, on peut déplacer le prélèvement de θ_m vers X .
D'autre part, en appliquant le principe de superposition sur la boucle interne, on peut écrire

$$\Omega_m = \frac{K_2 H_3}{1 + K_2 K_7 H_3} U_m - \frac{K_9 H_3}{1 + K_2 K_7 H_3} F_p$$

Soit

$$\Omega_m = \frac{K_2 H_3}{1 + K_2 K_7 H_3} \left(U_m - \frac{K_9}{K_2} F_p \right)$$

Ce qui donne le 1^{er} schéma bloc simplifié



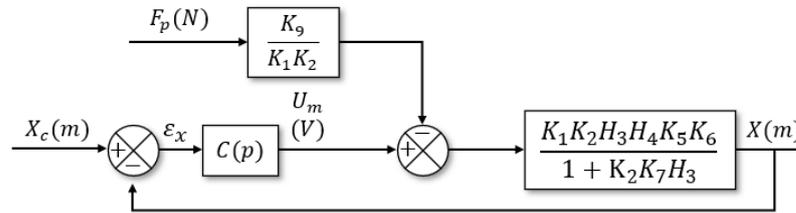
On a alors

$$\Omega_m = \frac{K_2 H_3}{1 + K_2 K_7 H_3} \left(C(p)(K_1 X_c - K_1 X) - \frac{K_9}{K_2} F_p \right)$$

On met K_1 en facteur

$$\Omega_m = \frac{K_1 K_2 H_3}{1 + K_2 K_7 H_3} \left(C(p)(X_c - X) - \frac{K_9}{K_1 K_2} F_p \right)$$

Donc



On a le schéma bloc demandé avec

$$D = \frac{K_9}{K_2 K_1} = \frac{r R \rho_1 K_5 K_6}{k K_8}$$

$$D = \frac{R(r\rho_1)^2}{k K_8}$$

Et

$$\frac{K_1 K_2 H_3 H_4 K_5 K_6}{1 + K_2 K_7 H_3} = \frac{\frac{K_8}{K_5 K_6} K_2 \frac{1}{M_{eq}(r\rho_1)^2 p} \frac{1}{p} K_5 K_6}{1 + \frac{K_2 K_7}{M_{eq}(r\rho_1)^2 p}} = \frac{K_8 K_2}{p(M_{eq}(r\rho_1)^2 p + K_2 K_7)} = \frac{\frac{K_8}{K_7}}{p \left(1 + \frac{M_{eq}(r\rho_1)^2}{K_2 K_7} p \right)}$$

Soit

$$A = \frac{K_8}{K_7} = \frac{K_8}{k}$$

$$B = \frac{M_{eq}(r\rho_1)^2}{K_2 K_7} = \frac{R M_{eq}(r\rho_1)^2}{k^2}$$