

Statique avec frottements

Véhicule 4x4

Q.1. Isoler le véhicule et déterminer les expressions littérales des autres inconnues des liaisons ponctuelles en fonction de la géométrie et de la masse du véhicule.

On isole le véhicule $\{1,2,3\}$.

BAME :

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{c} Y_{02} \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A, \{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 3}\} = \left\{ \begin{array}{c} X_{03} \vec{x}_1 + Y_{03} \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B, \{\mathcal{T}_{pes \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{array}{c} -Mg \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G$$

On réalise le PFS en B :

$$\overrightarrow{M_{B,0 \rightarrow 2}} = \overrightarrow{BA} \wedge Y_{02} \vec{y}_1 = (a + b) Y_{02} \vec{z}_1$$

$$\overrightarrow{M_{B,0 \rightarrow 2}} = \overrightarrow{BG} \wedge -Mg \vec{y}_0 = (b \vec{x}_1 + h \vec{y}_1) \wedge -Mg(\cos \alpha \vec{x}_1 + \sin \alpha \vec{y}_1) = -bMg \cos \alpha \vec{z}_1 + hMg \sin \alpha \vec{z}_1$$

On en déduit donc les trois équations scalaires suivante :

$$\begin{cases} X_{03} - Mg \sin \alpha = 0 \\ Y_{02} + Y_{03} - Mg \cos \alpha = 0 \\ (a + b)Y_{02} - bMg \cos \alpha + hMg \sin \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\text{Soit : } \begin{cases} X_{03} = Mg \sin \alpha \\ Y_{03} = Mg \frac{a \cos \alpha + h \sin \alpha}{a + b} \\ Y_{02} = Mg \frac{b \cos \alpha - h \sin \alpha}{a + b} \end{cases}$$

Q.2. Le coefficient de frottement entre les roues et le sol est noté f . Déterminer l'angle limite de glissement α_g au-delà duquel la voiture glisse par rapport au sol.

A la limite de glissement (pente α_g), le modèle de Coulomb impose $|X_{03}| = f|Y_{03}|$, soit :

$$(a + b)Mg \sin \alpha_g = fMg(a \cos \alpha_g + h \sin \alpha_g)$$

$$(a + b - hf) \sin \alpha_g = fa \cos \alpha_g$$

$$\tan \alpha_g = \frac{fa}{(a + b - hf)}$$

Q.3. Déterminer l'angle limite de basculement α_b au-delà duquel la voiture bascule en arrière.

Pour éviter le basculement du véhicule, il faut que la composante normale des actions mécaniques du sol sur les roues avant soit positive.

A la limite du basculement (pente α_b), on a donc :

$$Y_{02} = Mg \frac{b \cos \alpha_b - h \sin \alpha_b}{a + b} = 0$$

$$b \cos \alpha_b - h \sin \alpha_b = 0$$

$$\tan \alpha_b = \frac{b}{h}$$

Q.4. Calculer α_g et α_b pour $a = 1,3$ m, $b = 1$ m, $h = 0,9$ m, $M = 1300$ kg, $f = 0,8$. En déduire la pente maximale que pourrait gravir le véhicule en supposant qu'il possède deux roues motrices à l'arrière.

AN : $\alpha_g = 33^\circ$ et $\alpha_b = 48^\circ$

Le plus limitant est α_g , donc la pente maximale que pourrait gravir ce véhicule est de 33° .

Frein de sécurité d'une grue portuaire

Q.5. Déterminer si, pour serrer le frein, la haute pression dans le vérin doit se situer dans la cavité supérieure ou dans la cavité inférieure.

Le serrage s'effectuera si la haute pression est délivrée dans la chambre supérieure

Q.6. La pression dans le vérin, est de 200 bar. La section utile du vérin est de 30 cm^2 . Déterminer l'effort que le vérin exerce sur 9 pour serrer le frein. Justifier la direction de cet effort.

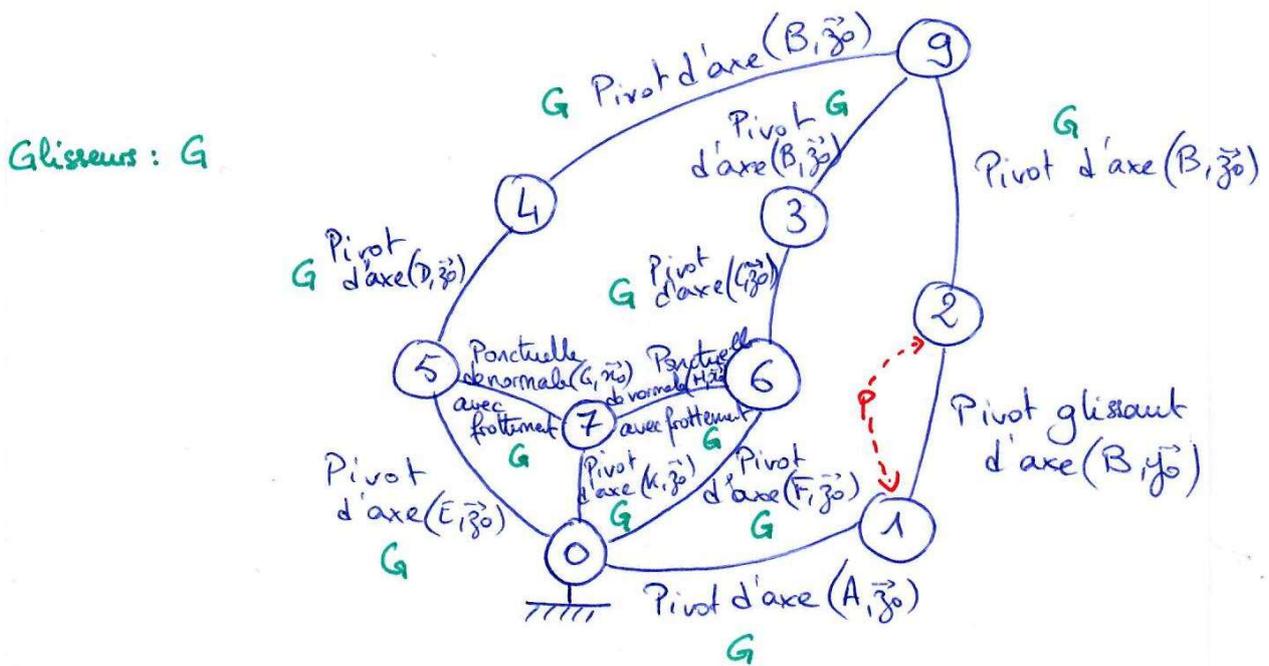
On isole $\{1+2\} \Rightarrow \overrightarrow{F_{9 \rightarrow 2}} = -\overrightarrow{F_{0 \rightarrow 1}}$ support (AB)

Donc, si on isole 2 seul $\Rightarrow \|\overrightarrow{F_{9 \rightarrow 2}}\| = p \cdot S$ et donc $\overrightarrow{F_{2 \rightarrow 9}} = -p \cdot S \cdot \vec{y}_0$

A.N. : $p = 200 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 20 \text{ MPa}$; $S = 30 \text{ cm}^2 = 3000 \text{ mm}^2$

D'où, $p \cdot S = 60000 \text{ N} = 60 \text{ kN}$

Q.7. Etablir le graphe des liaisons et y ajouter les actions mécaniques extérieures.



1.1. Résoudre analytiquement le problème

Q.8. Déterminer et justifier la direction des efforts qu'exercent les pièces 3 et 4 sur la pièce 9 au point B.

On isole 4 : solide soumis à 2 glisseurs donc d'après le PFS les efforts sont donc de sens opposé, sont de même norme et de direction \vec{x}_4 (suivant BD) $\Rightarrow \overrightarrow{F_{4 \rightarrow 9}} = F_{49} \cdot \vec{x}_4$

On isole 3 : solide soumis à 2 glisseurs $\Rightarrow \overrightarrow{F_{3 \rightarrow 9}} = F_{39} \cdot \vec{x}_3$



Q.9. En isolant la pièce 9, déterminer littéralement les efforts $\overrightarrow{F_{3 \rightarrow 9}}$ et $\overrightarrow{F_{4 \rightarrow 9}}$, et en déduire les efforts $\overrightarrow{F_{3 \rightarrow 6}}$ et $\overrightarrow{F_{4 \rightarrow 5}}$. Faire l'application numérique.

On isole 9 :

Théorème de la résultante :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F_{2 \rightarrow 9}} + \overrightarrow{F_{3 \rightarrow 9}} + \overrightarrow{F_{4 \rightarrow 9}} &= \vec{0} \\ -p \cdot S \cdot \vec{y}_0 + F_{39} \cdot \vec{x}_3 + F_{49} \cdot \vec{x}_4 &= \vec{0}\end{aligned}$$

sur \vec{x}_0 : $F_{39} \cos \alpha + F_{49} \cos \beta = 0$

sur \vec{y}_0 : $F_{39} \sin \alpha + F_{49} \sin \beta = p \cdot S$

$$F_{49} = -\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} F_{39}$$

$$-\tan \beta \cos \alpha F_{39} + \sin \alpha F_{39} = p \cdot S$$

D'où,

$$F_{39} = \frac{p \cdot S}{\sin \alpha - \tan \beta \cos \alpha}$$

et donc ,

$$F_{49} = -\frac{p \cdot S \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha \cos \beta - \tan \beta \cos \alpha \cos \beta} = \frac{p \cdot S}{\sin \beta - \cos \beta \tan \alpha}$$

A.N. : $F_{39} = 128670 \text{ N}$; $F_{49} = -91258 \text{ N}$

Q.10. Exprimer les forces $\overrightarrow{F_{3 \rightarrow 6}}$ et $\overrightarrow{F_{4 \rightarrow 5}}$ dans le repère R_0 .

En isolant 3, on trouve que :

$$\overrightarrow{F_{3 \rightarrow 6}} = -\overrightarrow{F_{6 \rightarrow 3}} = \overrightarrow{F_{9 \rightarrow 3}} = -\overrightarrow{F_{3 \rightarrow 9}}$$

De même, en isolant 4, on trouve :

$$\overrightarrow{F_{4 \rightarrow 5}} = -\overrightarrow{F_{4 \rightarrow 9}}$$

Ainsi, $\overrightarrow{F_{3 \rightarrow 6}} = -128670 \vec{x}_3$; $\overrightarrow{F_{4 \rightarrow 5}} = 91258 \vec{x}_4$

En projection dans le repère 0 :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F_{3 \rightarrow 6}} &= F_{36} \vec{x}_3 = F_{36} (\cos \alpha \vec{x}_0 + \sin \alpha \vec{y}_0) = -X_{36} \vec{x}_0 - Y_{36} \vec{y}_0 \\ &\text{avec } X_{36} = 82 \text{ kN et } Y_{36} = 99 \text{ kN}\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F_{4 \rightarrow 5}} &= F_{45} \vec{x}_4 = F_{45} (\cos \beta \vec{x}_0 + \sin \beta \vec{y}_0) = X_{45} \vec{x}_0 + Y_{45} \vec{y}_0 \\ &\text{avec } X_{45} = 82 \text{ kN et } Y_{45} = 38 \text{ kN}\end{aligned}$$

Q.11. A l'aide du modèle de Coulomb, déterminer la direction générale des efforts $\overrightarrow{F_{7 \rightarrow 5}}$ en G et $\overrightarrow{F_{7 \rightarrow 6}}$ en H.

$$\overrightarrow{V_{H \in 6/7}} = -\overrightarrow{V_{H \in 7/6}} = -(-v \cdot \vec{y}_0) = v \cdot \vec{y}_0$$

$\Rightarrow \overrightarrow{T_{7 \rightarrow 6}}$ est dirigé vers le bas (opposé à $\overrightarrow{V_{H \in 6/7}}$)

et donc $\overrightarrow{F_{7 \rightarrow 6}} = N_{76} \vec{x}_0 - T_{76} \vec{y}_0$ et on choisit N_{76} et $T_{76} \geq 0$ avec $T_{76} = f \cdot N_{76}$

$$\overrightarrow{V_{G \in 5/7}} = -\overrightarrow{V_{G \in 7/5}} = -v \cdot \vec{y}_0$$



$\Rightarrow \overrightarrow{T_{7 \rightarrow 5}}$ est dirigé vers le haut (opposé à $\overrightarrow{V_{H \in 6/7}}$)

et donc $\overrightarrow{F_{7 \rightarrow 5}} = -N_{75}\overrightarrow{x_0} + T_{75}\overrightarrow{y_0}$ et on choisit N_{75} et $T_{75} \geq 0$ avec $T_{75} = f \cdot N_{75}$

Q.12. Isoler la pièce 5, appliquer le PFS et déterminer la composante tangentielle de $\overrightarrow{F_{7 \rightarrow 5}}$ et faire de même avec la pièce 6 appliquer le PFS et déterminer la composante tangentielle de $\overrightarrow{F_{7 \rightarrow 6}}$.

On isole 5 :

B.A.M.E. :

$$\{\mathcal{T}_{4 \rightarrow 5}\} = \begin{Bmatrix} X_{45} & - \\ Y_{45} & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{(D, R_0)} ; \{\mathcal{T}_{7 \rightarrow 5}\} = \begin{Bmatrix} -N_{75} & - \\ T_{75} & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{(G, R_0)} ; \{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 5}\} = \begin{Bmatrix} X_{05} & - \\ Y_{05} & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{(E, R_0)}$$

Théorème du moment au point E projeté sur $\overrightarrow{z_0}$:

$$-hX_{45} + \frac{h}{2}N_{75} + eT_{75} = 0$$

$$\text{or } T_{75} = f \cdot N_{75} \Rightarrow -hX_{45} + \left(\frac{h}{2} + f \cdot e\right)N_{75} = 0$$

D'où la composante tangentielle :

$$T_{75} = \frac{2hfX_{45}}{h + 2fe} = 78 \text{ kN}$$

De la même manière, on isole 6 :

Théorème du moment en F :

$$hX_{36} - \frac{h}{2}N_{76} + eT_{76} = 0$$

Ainsi, comme pour 5 :

$$T_{76} = \frac{2hfX_{36}}{h - 2fe} = 94 \text{ kN}$$

Q.13. Déterminer le couple de freinage qu'exercent 5 et 6 sur 7.

$$C_f = R(T_{75} + T_{76}) = 27 \times 10^3 \text{ N.m}$$

Q.14. Calculer le poids maximal de l'objet que le frein de sécurité peut freiner et conclure quant au critère de l'exigence 1.1.4.

$$P_{max} = \frac{C_f}{r \cdot g} = 27 \times 10^3 \text{ kg} = 27 \text{ tonnes} > 6 \text{ tonnes}$$

Donc le CdCF est vérifié.