

Modélisation du frottement

Compétence

Modéliser :

- Écrire la relation entre le modèle local et le modèle global associé aux actions mécaniques dans le cas suivant : action entre solides (liaisons avec frottement)
- Écrire le modèle global du frottement fluide, de la résistance au roulement et du pivotement
- Associer un modèle global d'effort au comportement d'une liaison réelle

L'ingénieur doit constamment procéder à des choix lors des différentes étapes du processus de conception afin d'améliorer les performances des systèmes. Cette amélioration passe nécessairement par l'optimisation de l'architecture des constituants des systèmes et donc, dans ce cadre, un des problèmes essentiels de l'ingénieur est de choisir les meilleures solutions technologiques pour réaliser les liaisons. Pour l'aider dans ces choix technologiques, l'ingénieur s'appuie obligatoirement sur des modèles plus ou moins détaillés car seuls les modèles permettent de simuler le comportement du produit et d'appréhender le réel.

L'objectif de ce cours est donc de compléter les connaissances sur la modélisation des systèmes.

1. La démarche de modélisation

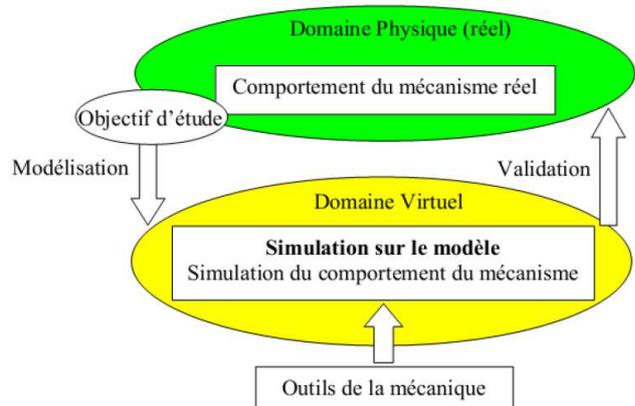
L'objectif de l'ingénieur est de comprendre, analyser, améliorer ou valider un mécanisme. Pour cela, il le modélise pour appliquer ensuite les outils de la mécanique.

Le choix du modèle dépend :

- de l'étude que l'on cherche à mener,
- du degré de précision demandé pour cette étude,
- des moyens de calcul disponibles.

Le domaine de validité des lois de la mécanique implique la mise en place d'hypothèses simplificatrices lors de la phase de modélisation.

Plus le modèle est proche du système réel, plus les résultats obtenus seront satisfaisants.



2. Rappel - Modélisation cinématique et statique des liaisons

2.1. Modélisation cinématique des liaisons

Pour caractériser les mouvements relatifs entre deux solides (1) et (2) constituant une liaison, on utilise l'outil torseur cinématique. Il prend la forme générale :

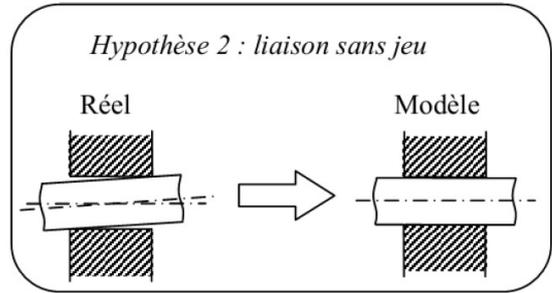
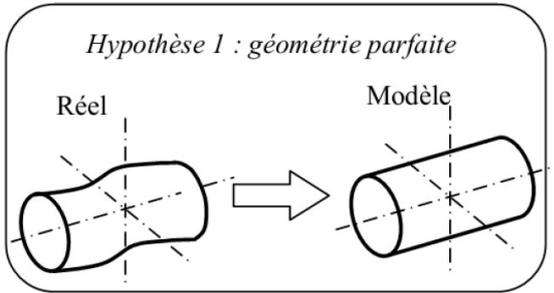
$$\{V_{2/1}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{2/1} = \omega_x \vec{x} + \omega_y \vec{y} + \omega_z \vec{z} \\ \vec{V}_{A,2/1} = V_x \vec{x} + V_y \vec{y} + V_z \vec{z} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} V_x \\ V_y \\ V_z \end{array} \right\}_{(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

On appelle N_C le nombre de degrés de liberté d'une liaison. Il correspond au nombre de paramètres de position relatifs indépendants.

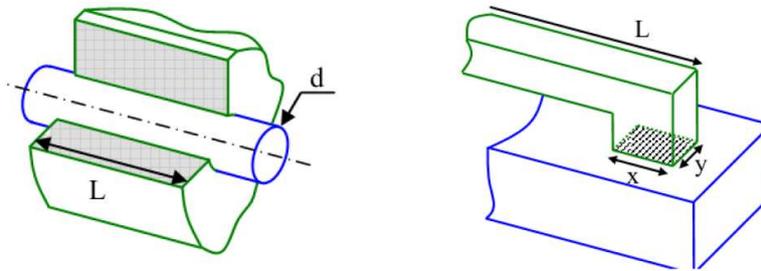
$$0 \leq N_c \leq 5$$

$N_c = 0$ correspond à la liaison encastrement et l'existence même d'une liaison impose $N_c \neq 6$ puisqu'un solide sans liaison possède 6 degrés de liberté.

Deux hypothèses sont nécessaires à la mise en place du modèle cinématique d'une liaison :



Conséquences sur la modélisation du contact cylindre/cylindre et plan/plan :



Modélisation des contacts cylindre / cylindre (à gauche) et plan / plan (à droite)

- Suivant la longueur du contact cylindre/cylindre, le modèle à retenir peut changer :
 - $\frac{L}{d} \leq 0,5$ ou $0,5 < \frac{L}{d} \leq 1,5$ + jeu important \Rightarrow Liaison linéaire annulaire
 - $\frac{L}{d} \geq 0,5$ ou $0,5 < \frac{L}{d} \leq 1,5$ + jeu faible \Rightarrow Liaison pivot glissant
- Suivant les dimensions x et y de la surface plane (inclue dans une liaison de plus grande longueur L), le modèle à retenir peut changer :
 - $x \approx y \Rightarrow$ Liaison appui-plan
 - $x \approx 0,1y$ ou $y \approx 0,1x \Rightarrow$ Liaison linéaire rectiligne
 - x et $y \ll L \Rightarrow$ Liaison ponctuelle

2.2. Modélisation statique des liaisons

Pour caractériser l'action mécanique transmissible entre deux solides (1) et (2) constituant une liaison, on utilise l'outil torseur d'action mécanique transmissible. Il prend la forme générale :

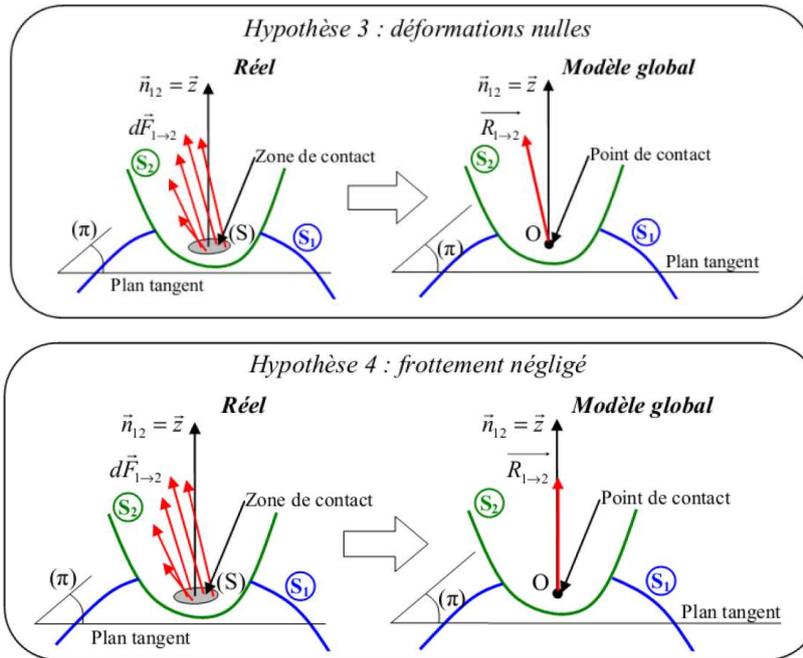
$$\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R}_{1 \rightarrow 2} = X_{12} \vec{x} + Y_{12} \vec{y} + Z_{12} \vec{z} \\ \overrightarrow{M}_{A,1 \rightarrow 2} = L_{12} \vec{x} + M_{12} \vec{y} + N_{12} \vec{z} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{ll} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{array} \right\}_{(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

On appelle N_S le nombre d'inconnues statiques d'une liaison, il correspond au nombre de composantes non nulles et indépendantes.

$$1 \leq N_S \leq 6$$

$N_S = 6$ correspond à la liaison encastrement et l'existence même d'une liaison impose $N_S \neq 0$ puisqu'un solide sans liaison possède au minimum une inconnue statique.

Deux hypothèses fondamentales supplémentaires sont nécessaires à la mise en place du modèle d'action mécanique transmissible :



Lorsque les hypothèses 1, 2, 3 et 4 sont vérifiées, on dit que la liaison est parfaite :

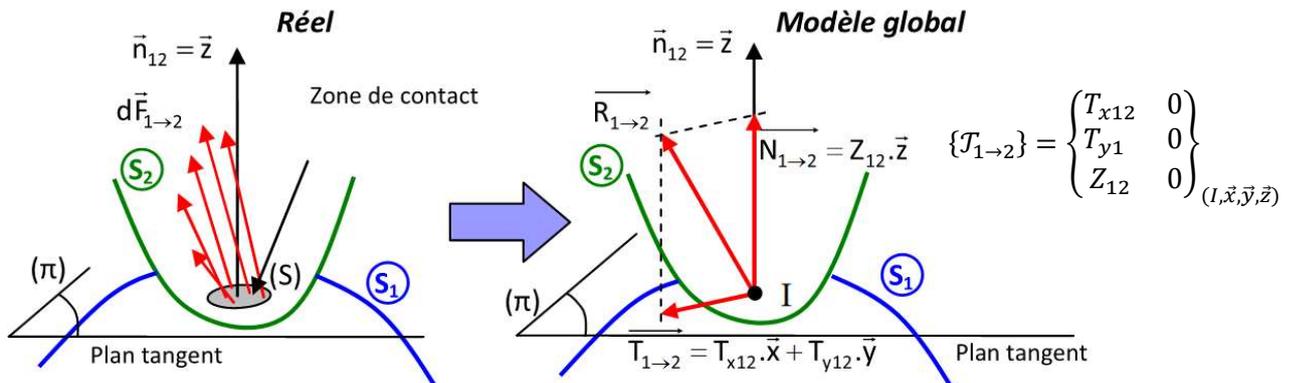
Il est essentiel de garder en mémoire qu'une liaison réelle n'est jamais parfaite puisqu'il s'agit d'un modèle ! En réalité il ne faut pas dire « cette liaison est une liaison pivot glissant d'axe (O, \vec{x}) » mais plutôt « cette liaison peut être raisonnablement modélisée par une liaison pivot glissant parfaite d'axe (O, \vec{x}) compte tenu de l'objectif fixé ».

3. Modélisation du frottement

3.1. Lois du frottement de glissement

Si le frottement n'est pas négligeable, il existe une composante tangentielle à l'action mécanique.

(2)/(1) : Liaison ponctuelle en I de normale (I, \vec{z}) **avec frottement** entre les solides S_2 et S_1 :



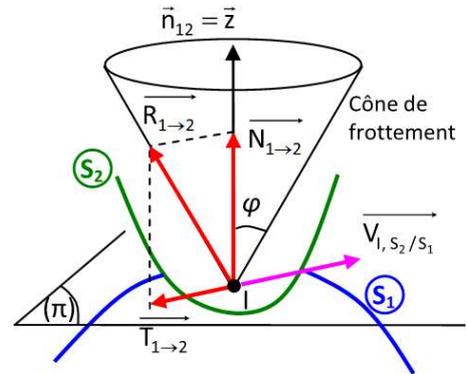
Les lois (expérimentales) de Coulomb permettent de relier les composantes de $\vec{T}_{1 \rightarrow 2}$ à la composante normale Z_{12} . Il existe deux cas de figure :

1^{ère} loi de Coulomb :

Glissement en I $\Rightarrow \vec{V}_{I,S_2/S_1} \neq \vec{0}$

On définit un coefficient de frottement f tel que $f = \tan \varphi$ où φ est le demi angle au sommet du cône de frottement.

- La composante tangentielle $\vec{T}_{1 \rightarrow 2}$ est opposée à la vitesse de glissement $\vec{V}_{I,S_2/S_1}$.
- $\vec{R}_{1 \rightarrow 2}$ est toujours sur le cône de frottement.
- On connaît exactement $\|\vec{T}_{1 \rightarrow 2}\| = f \cdot \|\vec{N}_{1 \rightarrow 2}\|$

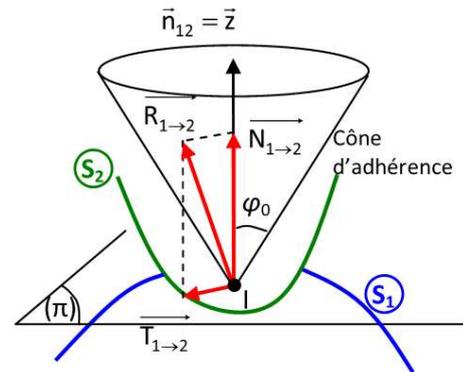


2^{ème} loi de Coulomb :

Non glissement en I $\Rightarrow \vec{V}_{I,S_2/S_1} = \vec{0}$

On définit un coefficient d'adhérence f_0 tel que $f_0 = \tan \varphi_0$ où φ_0 est le demi angle au sommet du cône d'adhérence.

- $\vec{R}_{1 \rightarrow 2}$ est toujours dans le cône d'adhérence.
- On ne connaît pas exactement $\|\vec{T}_{1 \rightarrow 2}\| \leq f_0 \cdot \|\vec{N}_{1 \rightarrow 2}\|$



Attention aux indices pour la 1^{ère} loi de Coulomb. La composante tangentielle $\vec{T}_{1 \rightarrow 2}$ (1→2) est opposée à la vitesse de glissement $\vec{V}_{I,S_2/S_1}$ (2/1).

On a donc la relation suivante entre le vecteur unitaire de la force de frottement et la vitesse de glissement :

$$\vec{t}_{12}(M) = \frac{-\vec{V}_{I,S_2/S_1}}{\|\vec{V}_{I,S_2/S_1}\|}$$

Le coefficient de frottement f est en général inférieur au coefficient d'adhérence f_0 ($f_0 \geq f$) mais dans la pratique, les deux coefficients ayant des valeurs proches, on confond f et f_0 et on utilise uniquement le coefficient de frottement f .

Expérimentalement, on constate que le coefficient de frottement f dépend de la nature des surfaces de contact (matériaux en contact, état de la surface de contact, présence ou non de lubrifiant, ...).

En première approximation, on considère que le facteur prépondérant du coefficient de frottement concerne uniquement la nature des matériaux en contact.

Matériaux en contact	Coefficient de frottement
Acier sur acier	De 0,2 à 0,3
Acier sur bronze	De 0,12 à 0,2
Acier sur PTFE	De 0,02 à 0,08
Acier sur garniture de friction	De 0,25 à 0,4
Pneu neuf sur chaussée	De 0,3 à 0,6

Le coefficient de frottement f est un coefficient adimensionnel qui ne dépend pas de l'effort normal appliqué !!!

Pour étudier l'équilibre d'un solide lorsque celui-ci adhère (non glissement en I), on peut se placer à la limite du glissement (c'est-à-dire dans l'hypothèse limite où le solide commence à glisser). Il n'y a donc pas encore de mouvement relatif mais on peut appliquer la première loi de Coulomb. Se placer à la limite du glissement revient donc à considérer que $\vec{R}_{1 \rightarrow 2}$ est sur le cône de frottement.

3.2. Utilisation des lois de Coulomb dans le cas de contacts surfaciques

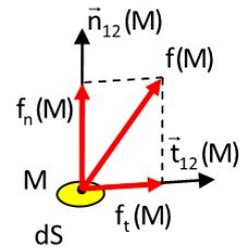
Les lois de Coulomb concernant le frottement de glissement ne sont valables que pour un contact ponctuel. Or, on constate que très souvent le contact entre deux solides n'est pas ponctuel et s'effectue sur une surface entière. Pour déterminer les actions mécaniques de contact dans ce cas de figure, on considère alors de petites zones « quasi-ponctuelles » autour de chaque point de la zone de contact et on écrit les lois de Coulomb sur des densités surfaciques d'effort.

3.2.1. Définition du modèle local avec frottement

On définit l'action mécanique élémentaire de l'élément de surface

$$d\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \vec{f}(M) \cdot dS \text{ avec } \vec{f}(M) = f_n(M) \cdot \vec{n}_{12}(M) + f_t(M) \cdot \vec{t}_{12}(M)$$

- $f_n(M)$: densité surfacique normale d'effort en M ($f_n(M) = -p(M)$ dans le cas de pression de contact sur une surface)
- $\vec{n}_{12}(M)$: vecteur unitaire normal au plan tangent de la surface
- $f_t(M)$: densité surfacique tangentielle d'effort en M
- $\vec{t}_{12}(M)$: vecteur unitaire d'une direction du plan tangent de la surface



On applique ensuite les lois de Coulomb sur l'action mécanique élémentaire et on considère que l'on a une infinité d'actions mécaniques élémentaires sur la surface étudiée. La répartition de ces actions mécaniques élémentaires permet d'obtenir un champ vectoriel qui correspond à la modélisation locale des actions mécaniques.

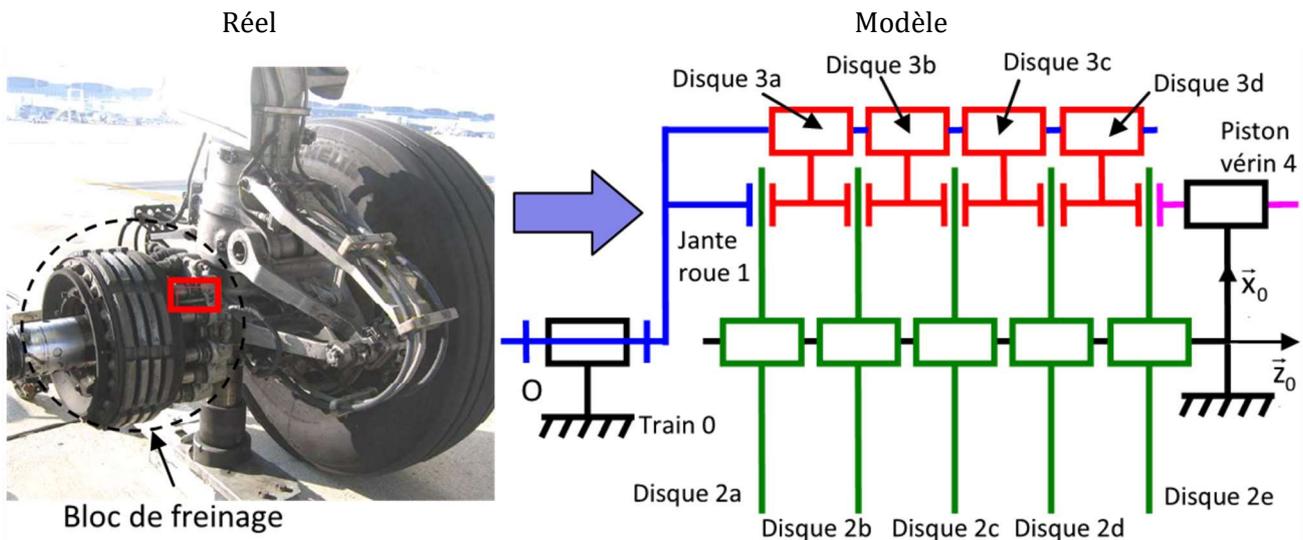
Les lois de Coulomb pour le modèle local sont les mêmes que celles présentée pour le contact ponctuel mais elles portent cette fois-ci sur les densités d'effort.

3.2.2. Définition du modèle global avec frottement

On note $\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{R}_{1 \rightarrow 2} \\ \overrightarrow{M}_{A,1 \rightarrow 2} \end{matrix} \right\}_A$ l'action mécanique du solide 1 sur le solide 2 sur une surface S. Le modèle global est obtenu à partir du modèle local :

$$\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{R}_{1 \rightarrow 2} = \int_S d\overrightarrow{F}_{1 \rightarrow 2} \\ \overrightarrow{M}_{A,1 \rightarrow 2} = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge d\overrightarrow{F}_{1 \rightarrow 2} \end{matrix} \right\}_A$$

Exemple du système de freinage de l'A380 :

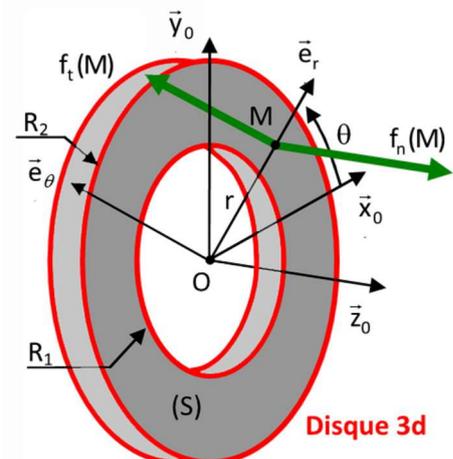


Le Bloc de freinage est doté de 9 disques en carbone, 5 en liaison glissière d'axe (O, \vec{z}_0) par rapport au train repéré 0 (disques 2) et 4 en liaison glissière d'axe \vec{z}_0 par rapport à la jante de la roue repérée 1 (disques 3). Pour mettre en contact ces disques, et par conséquent freiner la jante de la roue 1, un dispositif hydraulique constitué de 14 vérins équi-répartis, dont le vérin 4, permet d'exercer une action mécanique sur le disque 2e définie par le torseur suivant :

$$\{\mathcal{T}_{\text{vérins} \rightarrow 2e}\} = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{R}_{\text{vérins} \rightarrow 2e} = -F_0 \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_O \quad \text{où } F_0 = 10^6 \text{ N}$$

Cette action mécanique est intégralement transmise au disque 3d (et de proche en proche à tous les autres disques) et elle génère grâce au frottement un moment permettant d'immobiliser petit à petit le disque 3d par rapport au disque 2e. Par conséquent on a :

$$\{\mathcal{T}_{2e \rightarrow 3d}\} = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{R}_{2e \rightarrow 3d} = -F_0 \cdot \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{M}_{O,2e \rightarrow 3d} = M_0 \cdot \vec{z}_0 \end{matrix} \right\}_O$$





Objectif de l'étude : Déterminer la relation entre l'effort presseur F_0 exercé par le dispositif hydraulique sur le disque 2e et le moment de freinage global M_{global} exercé par le bloc de freinage sur la jante de la roue.

Compte tenu de la géométrie de la surface de contact (S) entre 2e et 3d on utilise les coordonnées polaires (S) pour paramétrer cette surface.

Données : $R_2 = 300$ mm ; $R_1 = 200$ mm ; $f = 0,5$

1. Définition de l'action mécanique élémentaire et du modèle local :

Par définition : $d\overrightarrow{F_{2e \rightarrow 3d}} = [f_n(M) \cdot \overrightarrow{n_{2e3d}}(M) + f_t(M) \cdot \overrightarrow{t_{2e3d}}(M)] \cdot dS$

On suppose que la pression de contact de 2e sur 3d est uniforme soit $f_n(M) = -p(M) = -p_0$

Le vecteur normal au plan tangent commun à 2e et 3d sortant de la matière de 3d est $\overrightarrow{z_0}$ soit $\overrightarrow{n_{2e3d}}(M) = \overrightarrow{z_0}$

Il y a du glissement en M entre 3d et 2e et puisque l'on calcule les efforts de 2e sur 3d, on a donc :

$$\overrightarrow{t_{2e3d}}(M) = \frac{-\overrightarrow{V_{M,3d/2e}}}{\|\overrightarrow{V_{M,3d/2e}}\|}$$

avec $\overrightarrow{V_{M,3d/2e}} = \overrightarrow{V_{M,1/0}}$ si 3d est solidaire de la jante 1 et 2^e du train 0.

$\overrightarrow{V_{M,3d/2e}} = \overrightarrow{V_{M,1/0}} = \overrightarrow{V_{O,1/0}} + \overrightarrow{MO} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = -r \cdot \overrightarrow{e_r} \wedge \dot{\theta}_{10} \cdot \overrightarrow{z_0} = r \dot{\theta}_{10} \cdot \overrightarrow{e_\theta}$ soit $\overrightarrow{t_{2e3d}}(M) = -\overrightarrow{e_\theta}$ si $\dot{\theta}_{10} > 0$

L'existence du glissement induit que $f_t(M)$ est sur le cône de frottement soit $f_t(M) = f \cdot f_n(M)$.

Au final l'action mécanique élémentaire s'écrit :

$$d\overrightarrow{F_{2e \rightarrow 3d}} = (-p_0 \cdot \overrightarrow{z_0} - f \cdot p_0 \cdot \overrightarrow{e_\theta}) \cdot dS$$

2. Définition du modèle global

On intègre le modèle local sur la surface (S) :

$$\{\mathcal{T}_{2e \rightarrow 3d}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{2e \rightarrow 3d}} = \int_S (-p_0 \cdot \overrightarrow{z_0} + f \cdot p_0 \cdot \overrightarrow{e_\theta}) \cdot dS \\ \overrightarrow{M_{O,2e \rightarrow 3d}} = \int_S \overrightarrow{OM} \wedge (-p_0 \cdot \overrightarrow{z_0} + f \cdot p_0 \cdot \overrightarrow{e_\theta}) \cdot dS \end{array} \right\}_O$$

Calcul de la résultante :

$$\overrightarrow{R_{2e \rightarrow 3d}} = \int_S (-p_0 \cdot \overrightarrow{z_0} + f \cdot p_0 \cdot \overrightarrow{e_\theta}) \cdot dS \text{ avec } dS = r \cdot dr \cdot d\theta \text{ et } \overrightarrow{e_\theta} = -\sin \theta \cdot \overrightarrow{x_0} + \cos \theta \cdot \overrightarrow{y_0}$$

$$\overrightarrow{R_{2e \rightarrow 3d}} = \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} (-p_0 \cdot \overrightarrow{z_0} + f \cdot p_0 \cdot (-\sin \theta \cdot \overrightarrow{x_0} + \cos \theta \cdot \overrightarrow{y_0})) \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$$

$$\overrightarrow{R_{2e \rightarrow 3d}} = -p_0 \cdot \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \overrightarrow{z_0} \cdot r \cdot dr \cdot d\theta + f \cdot p_0 \cdot \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} (-\sin \theta \cdot \overrightarrow{x_0} + \cos \theta \cdot \overrightarrow{y_0}) \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$$

$$\overrightarrow{R_{2e \rightarrow 3d}} = -p_0 \cdot \overrightarrow{z_0} \cdot \int_0^{2\pi} d\theta \int_{R_1}^{R_2} r \cdot dr + \vec{0}$$



$$\overrightarrow{R_{2e \rightarrow 3d}} = -p_0 \cdot 2\pi \cdot \frac{R_2^2 - R_1^2}{2} \cdot \overrightarrow{z_0}$$

Donc :

$$\boxed{\overrightarrow{R_{2e \rightarrow 3d}} = -p_0 \cdot \pi \cdot (R_2^2 - R_1^2) \cdot \overrightarrow{z_0}}$$

Calcul du moment :

$$\overrightarrow{M_{O,2e \rightarrow 3d}} = \int_S \overrightarrow{OM} \wedge (-p_0 \cdot \overrightarrow{z_0} + f \cdot p_0 \cdot \overrightarrow{e_\theta}) \cdot dS = \int_S r \cdot \overrightarrow{e_r} \wedge (-p_0 \cdot \overrightarrow{z_0} + f \cdot p_0 \cdot \overrightarrow{e_\theta}) \cdot dS$$

$$\overrightarrow{M_{O,2e \rightarrow 3d}} = \int_S (r \cdot p_0 \cdot \overrightarrow{e_\theta} + f \cdot r \cdot p_0 \cdot \overrightarrow{z_0}) \cdot dS$$

$$\overrightarrow{M_{O,2e \rightarrow 3d}} = p_0 \cdot \int_0^{2\pi} \overrightarrow{e_\theta} \cdot d\theta \cdot \int_{R_1}^{R_2} r^2 \cdot dr + f \cdot p_0 \cdot \overrightarrow{z_0} \cdot \int_0^{2\pi} d\theta \int_{R_1}^{R_2} r^2 \cdot dr$$

$$\overrightarrow{M_{O,2e \rightarrow 3d}} = \vec{0} + f \cdot p_0 \cdot 2\pi \cdot \frac{R_2^3 - R_1^3}{3} \cdot \overrightarrow{z_0}$$

Donc :

$$\boxed{\overrightarrow{M_{O,2e \rightarrow 3d}} = \frac{2}{3} f \cdot p_0 \cdot \pi \cdot (R_2^3 - R_1^3) \cdot \overrightarrow{z_0}}$$

Sachant que $\{\mathcal{J}_{2e \rightarrow 3d}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{2e \rightarrow 3d}} = -F_0 \cdot \overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{M_{O,2e \rightarrow 3d}} = M_0 \cdot \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_O$, on a :

$$F_0 = p_0 \cdot \pi \cdot (R_2^2 - R_1^2) \text{ et } M_0 = \frac{2}{3} f \cdot p_0 \cdot \pi \cdot (R_2^3 - R_1^3)$$

On a donc :

$$p_0 = \frac{F_0}{\pi \cdot (R_2^2 - R_1^2)}$$

Par conséquent :

$$\boxed{M_0 = \frac{2}{3} f \cdot F_0 \cdot \frac{(R_2^3 - R_1^3)}{(R_2^2 - R_1^2)}}$$

Le moment de freinage global M_{global} exercé par le bloc de freinage sur la jante de la roue correspond au moment M_0 multiplié par le nombre de surfaces en contact entre les disques (9 sur le bloc de l'A320).

$$M_{global} = 9 \cdot M_0$$

Donc :

$$\boxed{M_{global} = 9 \cdot \frac{2}{3} \cdot f \cdot F_0 \cdot \frac{(R_2^3 - R_1^3)}{(R_2^2 - R_1^2)}}$$