

MPSI – DS 7 Juin

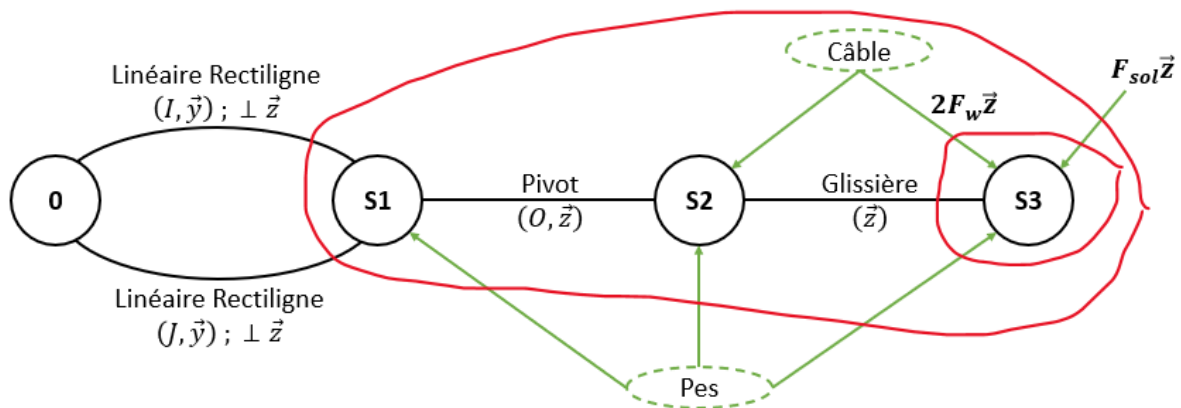
Machine de Forage

Corrigé

Partie I - Contrôle de la stabilité de la machine de forage

Condition de basculement statique

Q1. Réaliser le graphe des liaisons de l'ensemble. Faire apparaître les efforts extérieurs.



Q2. Donner les torseurs statiques des liaisons Linéaires rectilignes, de la pivot et de la glissière.

Linéaire rectiligne en (J, \vec{y}) de normale \vec{z} $\{T_{0 \rightarrow 1d}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{01d} = Z_{01d} \vec{z} \\ \vec{M}_J(0 \rightarrow 1d) = L_{10d} \vec{x} \end{Bmatrix}$	Linéaire rectiligne (I, \vec{y}) de normale \vec{z} $\{T_{0 \rightarrow 1g}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{01g} = Z_{01g} \vec{z} \\ \vec{M}_I(0 \rightarrow 1g) = L_{10g} \vec{x} \end{Bmatrix}$
Pivot (O, \vec{z}) $\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{12} \\ \vec{M}_O(1 \rightarrow 2) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_{-, -\vec{z}}$	Glissière \vec{z} $\{T_{2 \rightarrow 3}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{23} \\ \vec{M}_P(2 \rightarrow 3) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_{23} & L_{23} \\ Y_{23} & M_{23} \\ 0 & N_{23} \end{Bmatrix}_{-, -\vec{z}}$

Q3. Expliquer par un raisonnement simple mais détaillé pourquoi mesurer l'effort F_w dans le câble d'avance permet au constructeur, en quasi-statique, de connaître l'effort de forage F_{sol} sans mesurer ce dernier. On veut relier l'effort dans le câble et l'effort du sol. **On isole s3.** Comme on ne veut pas des inconnues de la glissière, on applique le TRS suivant \vec{z} .

$$\vec{F}_{sol} \cdot \vec{z} + 2\vec{F}_w \cdot \vec{z} + \vec{P}_3 \cdot \vec{z} + \underbrace{\vec{R}_{23} \cdot \vec{z}}_0 = 0$$

$$F_{sol} + 2F_w - mg = 0$$

$$F_{sol} = mg - 2F_w$$

Le poids étant connu, si on mesure l'effort F_w , on en déduit l'effort de forage F_{sol} .

Q4. En appliquant le principe fondamental de la statique, donner l'expression des résultantes des linéaires rectilignes en fonction des données connues du système, de θ et de F_{sol} . Vous détaillerez la démarche (isolement, équation écrite en justifiant votre choix)

On veut déterminer les efforts dans les linéaires rectilignes. Il faut donc isoler 1.
 Pour ne pas avoir d'autres inconnues de liaison, **on isole l'ensemble du système Σ .**

On a 2 inconnues (Z_{01d}, Z_{01g}) à déterminer. Il faut donc 2 équations scalaires.

Une équation simple est donnée par le **TRS sur \vec{z}** (les projections sur x et y ne donnent rien évident):

$$\vec{R}_{01d} \cdot \vec{z} + \vec{R}_{01g} \cdot \vec{z} + \vec{P}_3 \cdot \vec{z} + \vec{F}_{sol} \cdot \vec{z} = 0$$

$$Z_{01d} + Z_{01g} - Mg + F_{sol} = 0$$

La seconde équation vient donc de l'équation de moment. ...

- Sur \vec{x} , les inconnues L_{01d} et L_{01g} interviennent donc 😞
- Les efforts étant sur \vec{z} , ils ne génèrent pas de moment sur \vec{z}
- Donc il faut le TMS sur \vec{y} ...

ok mais en quel point ? ... Ici tous les points marchent mais si on prend I , on élimine Z_{01g} et si on prend J , on élimine Z_{01d} .

Finalement, **TMS en I sur \vec{y}** :

$$\vec{M}_I(0 \rightarrow 1d) \cdot \vec{y} + \underbrace{\vec{M}_I(0 \rightarrow 1g) \cdot \vec{y}}_0 + \vec{M}_I(pes \rightarrow \Sigma) \cdot \vec{y} + \vec{M}_I(sol \rightarrow 3) \cdot \vec{y} = 0$$

Or

$$\vec{M}_I(0 \rightarrow 1d) \cdot \vec{y} = \underbrace{\vec{M}_J(0 \rightarrow 1d) \cdot \vec{y}}_0 + \vec{IJ} \wedge \vec{R}_{01d} = 2a\vec{x} \wedge Z_{01d}\vec{z} = -2aZ_{01d}$$

$$\vec{M}_I(pes \rightarrow \Sigma) \cdot \vec{y} = \underbrace{\vec{M}_G(pes \rightarrow \Sigma) \cdot \vec{y}}_0 + \vec{IG} \wedge \vec{P}_\Sigma = (a\vec{x} + r.\vec{x}_2 + z_G\vec{z}) \wedge -Mg\vec{z}$$

$$\vec{M}_I(pes \rightarrow \Sigma) \cdot \vec{y} = Mg(a + r \cos \theta)$$

$$\vec{M}_I(sol \rightarrow 3) \cdot \vec{y} = \underbrace{\vec{M}_F(sol \rightarrow 3) \cdot \vec{y}}_0 + \vec{IF} \wedge \vec{F}_{sol} = (a\vec{x} + e.\vec{x}_2) \wedge F_{sol}\vec{z}$$

$$\vec{M}_I(sol \rightarrow 3) \cdot \vec{y} = -F_{sol}(a + e \cos \theta)$$

Donc

$$-2aZ_{01d} + Mg(a + r \cos \theta) - F_{sol}(a + e \cos \theta) = 0$$

Soit

$$Z_{01d} = \frac{1}{2a} (Mg(a + r \cos \theta) - F_{sol}(a + e \cos \theta))$$

Et avec l'équation de résultante

$$Z_{01g} = \frac{1}{2a} (Mg(a - r \cos \theta) - F_{sol}(a - e \cos \theta))$$

Rmq : on peut remplacer l'équation de résultante par le TMS en J sur \vec{y} pour obtenir directement Z_{01g} . Cela revient dans les calculs à remplacer a par $-a$ et à changer le signe du couple généré par Z_{01g}

- Q5. Donner la condition en effort pour laquelle il y a basculement statique à droite. En absence d'effort de forage, en déduire la condition sur la position (r, θ) du centre de gravité G pour laquelle le basculement à droite est alors évité. Interpréter physiquement ce résultat et montrer que $b\%$ peut être, dans ce cas, approximé par :**

$$b\% = 100. \frac{|r \cdot \cos \theta|}{a}$$

Il y a **basculement à droite** si l'effort à gauche devient négatif soit

$$Z_{01g} > 0$$

$$Mg(a - r \cos \theta) - F_{sol}(a - e \cos \theta) > 0$$

En absence d'effort de forage ($F_{sol} = 0$), il faut donc vérifier

$$r \cdot \cos \theta < a$$

Physiquement il faut que le centre de gravité G soit « entre » les points I et J pour ne pas basculer. On peut donc évaluer le pourcentage de risque par

$$b\% = 100. \frac{|r \cdot \cos \theta|}{a}$$

Q6. Exprimer la coordonnée sur \vec{x} , notée r , du centre de gravité G total de la machine en fonction des paramètres connus et de n_{cp} . En déduire le nombre n_{cp} minimum de contrepoids pour respecter l'exigence 1.2.

Par définition du centre de gravité :

$$(m_t + m_e + m_c) \cdot \overrightarrow{OG} \cdot \vec{x} = m_t \overrightarrow{OG_t} \cdot \vec{x} + m_e \overrightarrow{OG_e} \cdot \vec{x} + m_c \overrightarrow{OG_c} \cdot \vec{x}$$

$$(m_t + m_e + m_c) \cdot r = m_e x_e + m_c x_c$$

$$r = \frac{m_e x_e + m_c x_c}{m_t + m_e + m_c}$$

D'après le cahier des charges (id1.2), on veut $b\% < 50\% \forall \theta$ donc dans le pire des cas ($\theta = 0$) :

$$r < \frac{a}{2}$$

$$\frac{m_e x_e + m_c x_c}{m_t + m_e + m_c} < \frac{a}{2}$$

$$2m_e x_e + 2m_c x_c < a(m_t + m_e + m_c)$$

$$m_c(2x_c - a) < a(m_t + m_e) - 2m_e x_e$$

Or $(x_c - a) < 0$

$$n_c > \frac{2m_e x_e - a(m_t + m_e)}{(a - 2x_c)m_1}$$

AN

$$n_c > 2,72$$

On prend donc

$$n_c = 3$$

Contrôle de la pression du sol

Modélisation des actions mécaniques

Q7. Déterminer les expressions de F_{eq} et de e en fonction de M, m, F_w, R, r et de g .

D'après l'énoncé, on prend les deux torseurs

$$\{T_{pes \rightarrow \Sigma}\} = \begin{matrix} \square \\ \vec{P} = -Mg\vec{z} \\ \square \end{matrix} ; \{T_{sol \rightarrow \Sigma}\} = \begin{matrix} \square \\ \vec{F}_{sol} = F_{sol}\vec{z} \\ \square \end{matrix}$$

On cherche le torseur équivalent dont le moment est nul en E. La résultante de ce dernier est

$$\vec{F}_{eq} = \vec{P} + \vec{F}_{sol} = (-Mg + F_{sol})\vec{z}$$

Or $F_{sol} = mg - 2F_w$ donc

$$F_{eq} = (m - M)g - 2F_w$$

L'équation de moment en E s'écrit

$$\vec{M}_E(pes \rightarrow \Sigma) + \vec{M}_E(sol \rightarrow \Sigma) = 0$$

$$\underbrace{\vec{M}_G(pes \rightarrow \Sigma)}_0 + \vec{EG} \wedge \vec{P} + \underbrace{\vec{M}_F(sol \rightarrow \Sigma)}_0 + \vec{EF} \wedge \vec{F}_{sol} = \vec{0}$$

$$(r - e)\vec{x}_2 \wedge -Mg\vec{z} + (R - e)\vec{x}_2 \wedge F_{sol}\vec{z} = \vec{0}$$

$$-Mg(r - e) + (R - e)F_{sol} = 0$$

$$RF_{sol} - Mgr - e(F_{sol} - Mg) = 0$$

$$e = \frac{RF_{sol} - Mgr}{F_{sol} - Mg}$$

$$e = \frac{R(mg - 2F_w) - Mgr}{mg - 2F_w - Mg}$$

Q8. En déduire l'expression de la force élémentaire $d\vec{F}_{0 \rightarrow cg}$ et du moment élémentaire, $d\vec{M}_O(0 \rightarrow cg)$ au point O qu'exercent le sol sur la chenille gauche en un point P de contact en fonction de A et de B.

La force nous est donnée !

$$d\vec{F}_{0 \rightarrow cg} = p_g(y)\vec{z}dxdy = \left(A \frac{y}{L} + B\right)\vec{z}dxdy$$

Pour le moment en O

$$d\vec{M}_O(0 \rightarrow cg) = \underbrace{d\vec{M}_P(0 \rightarrow cg)}_0 + \vec{OP} \wedge d\vec{F}_{0 \rightarrow cg}$$

$$d\vec{M}_O(0 \rightarrow cg) = (x\vec{x} + y\vec{y}) \wedge p_g(y)\vec{z}dxdy$$

$$d\vec{M}_O(0 \rightarrow cg) = p_g(y)(y\vec{x} - x\vec{y})dxdy = \left(A \cdot \frac{y}{L} + B\right)(y\vec{x} - x\vec{y})dxdy$$

Q9. Déterminer à l'aide de la question précédente les expressions de l'effort $\vec{F}_{0 \rightarrow cg}$ et du moment au point O $\vec{M}_O(0 \rightarrow cg)$ en fonction de A, B et des données connues du système.
On intègre sur la surface :

$$\vec{F}_{0 \rightarrow cg} = \int_{-a-\frac{\ell}{2}}^{-a+\frac{\ell}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} A \cdot \frac{y}{L} + B dy dx \vec{z}$$

$$\vec{F}_{0 \rightarrow cg} = [x]_{-a-\frac{\ell}{2}}^{-a+\frac{\ell}{2}} \left[\frac{A}{L} \cdot \frac{y^2}{2} + By \right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \vec{z}$$

$$\vec{F}_{0 \rightarrow cg} = \ell \cdot L \cdot B \cdot \vec{z}$$

Et

$$\vec{M}_O(0 \rightarrow cg) = \int_{-a-\frac{\ell}{2}}^{-a+\frac{\ell}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left(A \cdot \frac{y}{L} + B\right) (y\vec{x} - x\vec{y}) dy dx$$

$$\vec{M}_O(0 \rightarrow cg) = \int_{-a-\frac{\ell}{2}}^{-a+\frac{\ell}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left(A \cdot \frac{y^2}{L} + By\right) dy dx \vec{x} - \int_{-a-\frac{\ell}{2}}^{-a+\frac{\ell}{2}} x \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left(A \cdot \frac{y}{L} + B\right) dy dx \vec{y}$$

$$\vec{M}_O(0 \rightarrow cg) = \ell \cdot \left[\frac{A}{L} \cdot \frac{y^3}{3} + B \cdot \frac{y^2}{2} \right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \vec{x} - \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-a-\frac{\ell}{2}}^{-a+\frac{\ell}{2}} \left[\frac{A}{L} \cdot \frac{y^2}{2} + By \right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \vec{y}$$

$$\vec{M}_O(0 \rightarrow cg) = \ell \cdot \frac{A}{L} \cdot \frac{2L^3}{24} \vec{x} - \frac{1}{2} \left[\left(-a + \frac{\ell}{2}\right)^2 - \left(-a - \frac{\ell}{2}\right)^2 \right] \cdot L \cdot B \cdot \vec{y}$$

$$\vec{M}_O(0 \rightarrow cg) = A \cdot \frac{\ell L^2}{12} \vec{x} + \frac{1}{2} 2a\ell \cdot L \cdot B \cdot \vec{y}$$

$$\vec{M}_O(0 \rightarrow cg) = A \cdot \frac{\ell \cdot L^2}{12} \vec{x} + a \cdot \ell \cdot L \cdot B \cdot \vec{y}$$

Q10. Quels théorèmes généraux ont permis d'établir les trois équations scalaires du système d'équations (1) ?

On isole Σ et on applique le PFS.

Le TRS donne

$$\vec{F}_{eq} + \vec{F}_{0 \rightarrow cd} + \vec{F}_{0 \rightarrow cg} = \vec{0}$$

$$\vec{F}_{eq} + \ell \cdot L \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{D}) = \mathbf{0}$$

1^{ère} équation du système

Le TMS en O donne

$$\vec{M}_O(eq) + \vec{M}_O(0 \rightarrow cd) + \vec{M}_O(0 \rightarrow cg) = \vec{0}$$

Or

$$\vec{M}_O(eq) = \vec{M}_E(eq) + \vec{OE} \wedge \vec{F}_{eq} = e\vec{x}_2 \wedge F_{eq}\vec{z} = -eF_{eq}\vec{y}_2$$

$$\vec{M}_O(eq) = eF_{eq} \sin \theta \vec{x} - eF_{eq} \cos \theta \vec{y}$$

Donc

$$\begin{aligned} (A + C) \cdot \frac{\ell \cdot L^2}{12} + e F_{eq} \sin \theta &= 0 \\ a \cdot \ell \cdot L \cdot (B - C) - e F_{eq} \cos \theta &= 0 \end{aligned}$$

2 dernières équations du système.

Les calculs n'étaient pas à faire.

- Q11.** Après avoir précisé l'expression des paramètres A , B , C et D , donner l'expression de la pression maximale de chacune des répartitions estimées (gauche et droite) en fonction des données connues par la machine (L , ℓ , a , e , θ et F_{eq} uniquement). En déduire que l'expression unique de la pression maximale sous la foreuse s'écrit :

$$P_{Max} = -\frac{F_{eq}}{2 \cdot L \cdot \ell} \left(1 + \frac{e \cdot |\cos \theta|}{a} + \frac{6 \cdot e \cdot |\sin \theta|}{L} \right)$$

On suppose $A = C$, donc on a le système

$$\begin{cases} (D + B) \cdot L \cdot \ell &= -F_{eq} & (2) \\ 2A \cdot \frac{L^2 \cdot \ell}{12} &= -F_{eq} \cdot e \cdot \sin \theta & (3) \\ (D - B) \cdot L \cdot \ell \cdot a &= -F_{eq} \cdot e \cdot \cos \theta & (4) \end{cases}$$

L'équation (3) donne

$$A = C = -\frac{6 \cdot e}{L^2 \cdot \ell} \cdot F_{eq} \sin \theta$$

$a * (2) + (3)$ donne

$$D = -\frac{F_{eq}}{2 \cdot L \cdot \ell \cdot a} (a + e \cdot \cos \theta)$$

$a * (2) - (3)$ donne

$$B = -\frac{F_{eq}}{2 \cdot L \cdot \ell \cdot a} (a - e \cdot \cos \theta)$$

On nous donne, à gauche

$$P_{Max,g} = B + \left| \frac{A}{2} \right| \\ P_{Max,g} = -\frac{F_{eq}}{2 \cdot L \cdot \ell \cdot a} (a - e \cdot \cos \theta) + \left| -\frac{1}{2} \frac{6 \cdot e}{L^2 \cdot \ell} \cdot F_{eq} \sin \theta \right|$$

Attention F_{eq} négatif

$$P_{Max,g} = -\frac{F_{eq}}{2 \cdot L \cdot \ell} \left(1 - \frac{e}{a} \cdot \cos \theta + \frac{6 \cdot e}{L} |\sin \theta| \right)$$

Et pour la droite

$$P_{Max,d} = C + \left| \frac{D}{2} \right| \\ P_{Max,d} = -\frac{F_{eq}}{2 \cdot L \cdot \ell} \left(1 + \frac{e}{a} \cdot \cos \theta + \frac{6 \cdot e}{L} |\sin \theta| \right)$$

D'où la valeur donnée de P_{Max}

$$P_{Max} = -\frac{F_{eq}}{2 \cdot L \cdot \ell} \left(1 + \frac{e}{a} \cdot \cos \theta + \frac{6 \cdot e}{L} |\sin \theta| \right)$$

Partie II - Contrôle de la vitesse de la table de forage

Sous ensemble " Mécanisme " : étude cinématique de la table de forage

- Q12.** De la même manière, en utilisant la composition des vitesses au point I et en exprimant une condition de roulement sans glissement, montrer que : $\vec{V}_I(4/0) \cdot \vec{z} = V = R_3 \omega_3$.

La composition des vitesses en I donne

$$(\vec{V}_I(4/3) + \vec{V}_I(3/c\grave{a}ble) + \vec{V}_I(c\grave{a}ble/0) + \vec{V}_I(0/4)) \cdot \vec{z} = 0$$

La condition de roulement sans glissement en I entre le câble et la poulie 3 donne

$$\vec{V}_I(3/\text{câble}) = \vec{0}$$

De plus

$$\vec{V}_I(4/3) = \underbrace{\vec{V}_C(4/3)}_{\vec{0}} + \vec{IC} \wedge \vec{\Omega}(4/3) = -R_3 \vec{x} \wedge -\omega_3 \vec{y} = R_3 \omega_3 \vec{z}$$

Le morceau de câble (OI) ne bouge pas par rapport à 0 donc

$$\vec{V}_I(\text{câble}/0) = \vec{0}$$

Enfin

$$\vec{V}_I(0/4) = -V \vec{z}$$

Donc

$$\vec{V}_I(4/0) \cdot \vec{z} = V = R_3 \omega_3$$

Q13. Dédurre de la question précédente l'expression du rayon équivalent, noté R_{eq} , dans le sous-système "Mécanisme" du schéma-bloc fourni en annexe 3, en fonction de R_1 seulement.

Les équations précédentes donnent donc

$$V = -V + R_1 \omega_1$$

$$V = \frac{R_1}{2} \omega_w$$

$$R_{eq} = \frac{R_1}{2}$$

Partie " Amortisseur " : étude dynamique de la table de forage

Q14. Exprimer k_T et λ_T en fonction de n , k et de λ .

Les ressorts amortisseurs sont montés en parallèles donc l'effort global est la somme des efforts de chacun des ensembles donc

$$\vec{F}_{nr} = n * \vec{F}_r ; \vec{F}_{na} = n * \vec{F}_a$$

Soit

$$k_T = nk ; \lambda_T = n * \lambda$$

Q15. À l'équilibre, système suspendu, proposer et mettre en œuvre une stratégie de résolution en appliquant le principe fondamental de la statique, afin d'établir une première équation, liant k_T , Δz_e , Δz_0 , M_K et g et une deuxième, liant F_{we} , M_K , M_T et g .

On isole {4+5}. Le TRS en projection sur \vec{z} donne :

$$\vec{F}_{sol} \cdot \vec{z} + \vec{P}_4 \cdot \vec{z} + \vec{P}_5 \cdot \vec{z} + 2\vec{F}_{we} = 0$$

Le système est suspendu donc $\vec{F}_{sol} = \vec{0}$

Soit

$$2F_{we} = (M_T + M_K)g$$

On isole {5}. Le TRS en projection sur \vec{z} donne :

$$-\vec{F}_{nr} \cdot \vec{z} - \underbrace{\vec{F}_{na}}_0 \cdot \vec{z} + \vec{P}_5 \cdot \vec{z} + \underbrace{\vec{F}_{sol}}_0 \cdot \vec{z} = 0$$

Soit

$$-k_T(\Delta z_0 - \Delta z_e) = M_K g$$

Q16. En fonctionnement, isoler la table 4 et déterminer son équation du mouvement vertical $\ddot{z}_4(t)$ en fonction des paramètres du problème en utilisant une équation issue du principe fondamental de la dynamique (Celui vu en physique : « $\Sigma \vec{F} = m \vec{a}$ »).

On isole la table 4. Le Théorème de la résultante dynamique donne

$$\vec{F}_{nr} \cdot \vec{z} + \vec{F}_{na} \cdot \vec{z} + \vec{P}_4 \cdot \vec{z} + 2\vec{F}_w \cdot \vec{z} = M_T \ddot{z}_4$$

$$k_T(\Delta z_0 - \Delta z) - \lambda_T \frac{d\Delta z}{dt} - M_T g + 2F_w = M_T \ddot{z}_4$$

Q17. En utilisant les résultats précédents et le changement de variables précédent, montrer que l'on obtient le système d'équations (2) suivant :

$$\begin{cases} M_T \cdot \frac{d^2 \hat{z}_4}{dt^2} + \lambda_T \cdot \frac{d\hat{z}_4}{dt} + k_T \hat{z}_4 = \lambda_T \cdot \frac{d\hat{z}_5}{dt} + k_T \cdot \hat{z}_5 + \delta F_w \\ M_K \cdot \frac{d^2 \hat{z}_5}{dt^2} + \lambda_T \cdot \frac{d\hat{z}_5}{dt} + k_T \hat{z}_5 = \lambda_T \cdot \frac{d\hat{z}_4}{dt} + k_T \cdot \hat{z}_4 + F_{sol} \end{cases} \quad (2)$$

Reprenons l'équation établie en Q16 :

$$k_T(\Delta z_0 - \Delta z) - \lambda_T \frac{d\Delta z}{dt} - M_T g + 2F_w = M_T \ddot{z}_4$$

On additionne avec la seconde équation de Q15

$$k_T(\Delta z_e - \Delta z) - M_K g - \lambda_T \frac{d\Delta z}{dt} - M_T g + 2F_w = M_T \ddot{z}_4$$

Puis avec la première équation

$$k_T(\Delta z_e - \Delta z) - \lambda_T \frac{d\Delta z}{dt} - 2F_{we} + 2F_w = M_T \ddot{z}_4$$

Avec le changement de variable

$$\Delta z_e - \Delta z = \Delta z_e - (z_4 - z_5) = \hat{z}_4 - \hat{z}_5$$

Donc

$$M_T \frac{d^2 \hat{z}_4}{dt^2} + \lambda_T \frac{d\hat{z}_4}{dt} + k_T \hat{z}_4 = \lambda_T \frac{d\hat{z}_5}{dt} + k_T \hat{z}_5 + \delta F_w$$

Les mêmes calculs sur l'équation donnée permet d'obtenir la seconde équation du système.

Q18. Traduire le système différentiel précédent (2) dans le domaine de Laplace, puis en déduire les expressions des trois fonctions de transfert $H_6(p)$, $H_7(p)$ et $H_8(p)$ présentes sur l'annexe 3 (zone encadrée notée "Amortisseur" en précisant que $L\left[\frac{dz_4}{dt}\right] = V(p)$).

Par transformée de Laplace en supposant les conditions initiales nulles, il vient

$$\begin{cases} (M_T p^2 + \lambda_T p + k_T) \frac{V}{p} = (\lambda_T p + k_T) \cdot \hat{Z}_5 + \Delta F_w \\ (M_T p^2 + \lambda_T p + k_T) \hat{Z}_5 = (\lambda_T p + k_T) \frac{V}{p} + F_{sol} \end{cases}$$

La seconde équation donne immédiatement

$$H_6(p) = \frac{\lambda_T p + k_T}{p}$$

Et il sort du comparateur du haut

$$(M_T p^2 + \lambda_T p + k_T) \hat{Z}_5$$

La première équation permet d'écrire

$$\Delta F_w = (M_T p^2 + \lambda_T p + k_T) \frac{V}{p} - (\lambda_T p + k_T) \cdot \hat{Z}_5$$

Ce qui donne

$$H_8(p) = \frac{M_T p^2 + \lambda_T p + k_T}{p}$$

Et ...attention de prendre en compte l'entrée du bloc

$$H_7(p) = \frac{\lambda_T p + k_T}{M_T p^2 + \lambda_T p + k_T}$$

Sous-systèmes Servo-pompe, Circuit hydraulique et Moteur hydraulique

Q19. Traduire les cinq équations (1), (2), (3), (4) et (5) dans le domaine de Laplace et en déduire les expressions des cinq fonctions de transfert $H_1(p)$, $H_2(p)$, $H_3(p)$, $H_4(p)$ et $H_5(p)$.

Équation (1)

$$Q_p(p) = K_s \cdot U_s(p)$$

donc

$$H_1(p) = K_s$$

Équation (2)

$$\frac{V_0}{B} \cdot p \Delta P = Q_p - Q_m$$

donc

$$H_2(p) = \frac{B}{V_0 p}$$

Équation (3)

$$Q_m(p) = C_Y \cdot \Omega_m(p)$$

donc

$$H_4(p) = C_Y$$

Équation (4)

$$C_m(p) = C_Y \cdot \Delta P(p)$$

donc

$$H_3(p) = C_Y$$

Équation (5)

$$(J_{eq} \cdot p + a) \cdot \Omega_m(p) = C_m(p) - C_r(p)$$

donc

$$H_5(p) = \frac{1}{J_{eq} p + a}$$

Étude de l'asservissement de la vitesse d'avance de la table de forage

Q20. Préciser le rôle du gain K_{ihm} de la partie " Chaîne d'information " du schéma bloc et donner son expression en fonction des paramètres présent sur le schéma bloc. Justifier.

K_{ihm} est le gain d'adaptation afin de comparer des valeurs de même dimensions. On doit avoir $\varepsilon_V = 0$ lorsque $V = V_c$ donc

$$K_{ihm} = \frac{2K_{gen}}{R_2}$$

Q21. Exprimer la fonction de transfert $\frac{\Omega_m}{U_s}$ en fonction des $H_i(p)$; $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

On applique Black. Attention H_1 est en dehors de la boucle

$$\frac{\Omega_m}{U_s} = H_1 * \frac{H_2 H_3 H_5}{1 + H_2 H_3 H_4 H_5}$$

Q22. Exprimer la fonction de transfert en boucle ouverte $G_{BO}(p) = \frac{V(p)}{\varepsilon(p)}$.

$$G_{BO}(p) = \frac{K_0 K_p K_h}{1 + \frac{2z_h}{\omega_h} p + \frac{p^2}{\omega_h^2}}$$

Q23. Avec un correcteur proportionnel, peut-on satisfaire l'exigence de précision de vitesse indiquée ? Justifier.

On a

$$\varepsilon(p) = \frac{V_c(p)}{1 + G_{BO}(p)}$$

Par application du théorème de la valeur finale

$$\epsilon_{\infty} = \lim_{p \rightarrow 0} p * \frac{1}{1 + G_{BO}(p)} * \frac{V_{CO}}{p}$$

Donc

$$\epsilon_{\infty} = \frac{V_{CO}}{1 + K_0 K_p K_h} \neq 0$$

Le critère n'est pas vérifié

Q24. L'exigence de précision sur la vitesse est-elle satisfaite ? Justifier.

On a toujours

$$\epsilon_{\infty} = \lim_{p \rightarrow 0} p * \frac{1}{1 + G_{BO}(p)} * \frac{V_{CO}}{p}$$

Mais maintenant

$$G_{BO}(p) = \frac{K_0 K_p K_h}{1 + \frac{2z_h}{\omega_h} p + \frac{p^2}{\omega_h^2}} * \frac{1 + T_i p}{T_i p}$$

Donc

$$\lim_{p \rightarrow 0} G_{BO}(p) = \infty$$

D'où

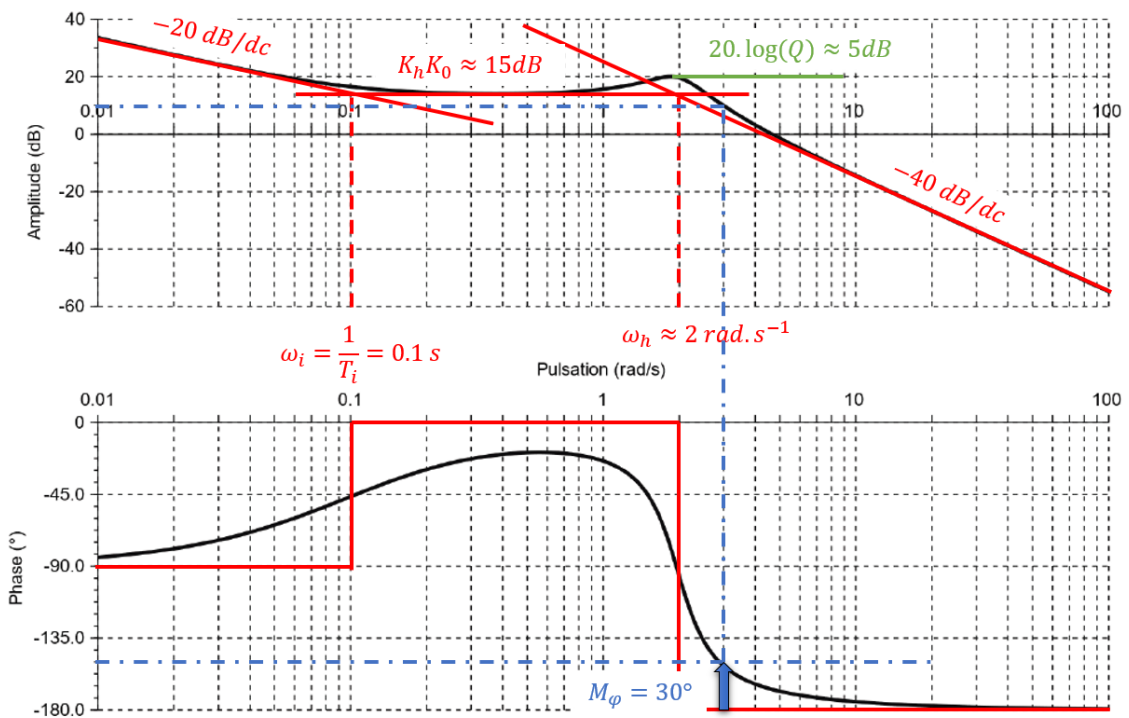
$$\epsilon_{\infty} = 0$$

Le critère de précision est vérifié

Q25. Tracer les diagrammes de Bode asymptotique de la FTBO corrigé sur le DR. Détailler les constructions.

On a 2 pulsations de coupure : $\omega_i = \frac{1}{T_i} = 0,1 \text{ s}$ et ω_h qui doit être plus grande vu la courbe.

Intervalle	G_{BOC}	Gain	Phase
$\omega < \omega_i$	$\frac{K_0 K_p K_h}{T_i p}$	-20 dB/dc	-90°
$\omega_i < \omega < \omega_h$	$K_0 K_p K_h$	$20 \cdot \log(K_0 K_p K_h)$	0°
$\omega_h < \omega$	$\frac{K_0 K_p K_h \omega_h^2}{p^2}$	-40 dB/dc	-180°



Q26. Déduire de vos tracés le gain $G_{BO} = K_h K_0$ ainsi que la pulsation ω_h et z_h .

D'après l'asymptote horizontale donne ($K_p = 1$)

$$20 \cdot \log(K_0 K_h) \approx 15 \text{ dB}$$

$$K_0 K_h \approx 10^{\frac{15}{20}} \approx 5,62$$

L'intersection des asymptotes donne

$$\omega_h \approx 2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

On peut trouver z_h **en prenant le coefficient de surtension**

$$20 \cdot \log Q \approx 5 \text{ dB soit } Q \approx 1,8$$

En prenant $Q = \frac{1}{2z}$, on en déduit

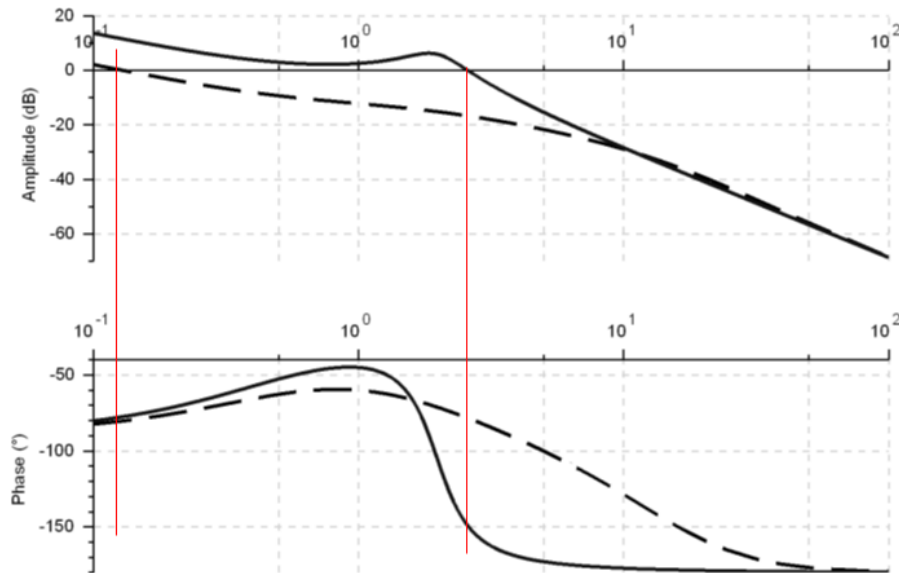
$$z_h \approx 0,3$$

Q27. Déterminer K_p (sans modifier la valeur de T_i) permettant de garantir la marge de phase spécifiée dans le cahier des charges. Justifier. Laisser les constructions graphiques sur le DR.

Pour avoir une marge de phase de $M_\varphi = 30^\circ$, il faut remonter la courbe de gain de 10dB donc

$$K_p = 3,16$$

Q28. Sur quelle(s) performance(s) la présence de l'amortisseur peut-elle influencer ? Justifier que le correcteur choisi permet de répondre aux exigences 2.1.1 en présence de l'amortisseur.



On voit que le gain en basse fréquence va dans les 2 cas tendre vers ∞ donc le système reste précis.

La marge de gain est également ∞ donc pas de problème

La marge de phase est de 30° sans amortisseur et de 100° avec amortisseur. De plus la pulsation de coupure à 0° est d'environ 3rad/s sans amortisseur et d'environ 0,12 rad/s avec amortisseur.

Le système avec amortisseur est plus stable et plus lent que sans.

Cependant, avec amortisseur, on peut augmenter le gain K_p pour revenir à une pulsation de coupure de 3 rad/s tout en conservant une marge de phase de 100° . Donc garder une vitesse équivalente tout en améliorant la stabilité.