Modélisation du comportement dynamique d'un système

Compétences

Modéliser :
- Systèmes linéaires continus et invariants
- Modélisation des systèmes asservis

Résoudre :
- Performances d'un système asservi

1. Hypothèses de modélisation

Dans le cadre des systèmes de commande, un modèle est une représentation mathématique du comportement du système permettant de prévoir l'évolution de sorties au cours du temps pour une entrée donnée.

Le modèle permet, lors de la phase de conception d'un produit, de valider ses performances dans diverses situations et d'élaborer des lois de commande assurant les meilleures performances possibles.

Un modèle est nécessairement une représentation simplifiée de la réalité.

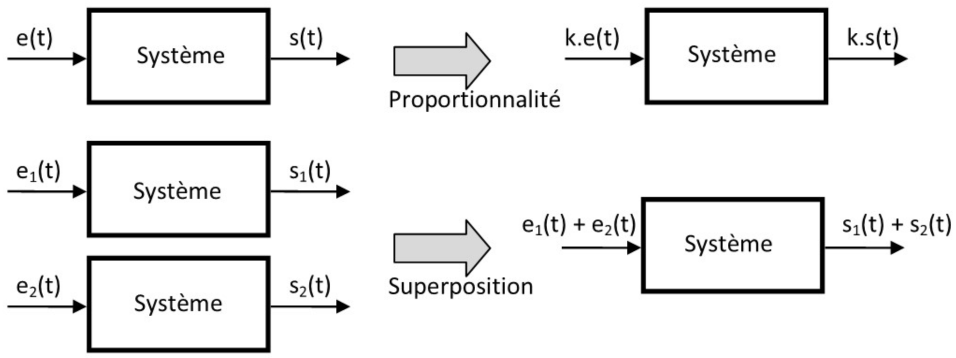
Nous nous intéressons dans le cadre du programme aux **systèmes linéaires, continus, invariants**. Ces hypothèses raisonnables permettent la résolution analytique du problème.

1.1. Système linéaire

Définition

Système linéaire

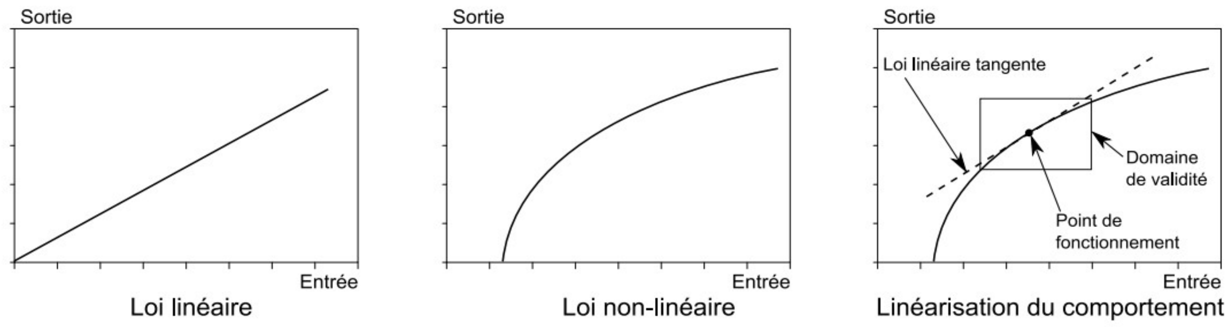
Un système est dit linéaire si la fonction qui décrit son comportement est elle-même linéaire. Cette dernière vérifie alors le principe de proportionnalité et de superposition.



Si le système est linéaire on obtient, en traçant la réponse $s(t)$ en fonction de $e(t)$ (pour un instant donné ou en régime permanent), la caractéristique du système égale à une droite de pente K (gain du système).

Attention à ne pas confondre la caractéristique sortie fonction de l'entrée avec la courbe sortie fonction du temps qui, elle, est très souvent non-linéaire.

La plupart des systèmes physiques ne sont pas linéaires sur la totalité de leur domaine d'application. Cependant, lorsque le système est utilisé dans une zone réduite du domaine d'application, il est possible de linéariser la réponse du système dans cette zone.



1.2. Système continu

Un système est continu, par opposition à un système discret, lorsque les variations des grandeurs physiques sont définies à chaque instant (il est caractérisé par une fonction continue). On parle aussi dans ce cas de système analogique.

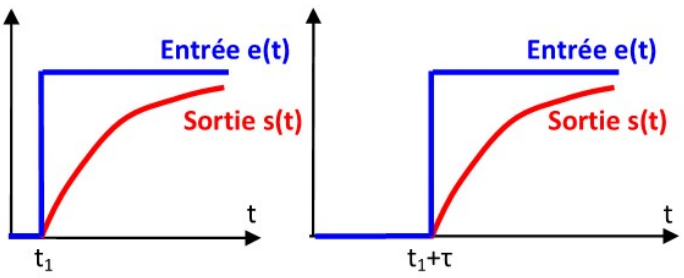
1.3. Système invariant

Définition

Système invariant

Un système est dit invariant si on suppose que les caractéristiques du système (masse, dimension, résistance, etc.) ne varient pas au cours du temps ("le système ne vieillit pas").

Si une même entrée se produit à deux instants distincts (t_1 et $t_2 = t_1 + \tau$), alors les deux sorties temporelles ($s_1(t)$ et $s_2(t)$) seront identiques.



1.4. Conséquences sur le modèle

Un système linéaire continu invariant peut être représenté par une **équation différentielle à coefficients constants** :

$$a_0.s(t) + a_1.\frac{ds}{dt}(t) + \cdots + a_d.\frac{d^d s}{dt^d}(t) = b_0.e(t) + b_1.\frac{de}{dt}(t) + \cdots + b_n.\frac{d^n e}{dt^n}(t)$$

Pour que le système soit physiquement réalisable, on a nécessairement $\boldsymbol{n < d}$.

Il est très utile de représenter un système complexe en un schéma-bloc fonctionnel et de le décomposer en sous-systèmes élémentaires plus simples, car cette stratégie permet de retrouver souvent des modèles de comportement bien connus pour chaque sous-système élémentaire.

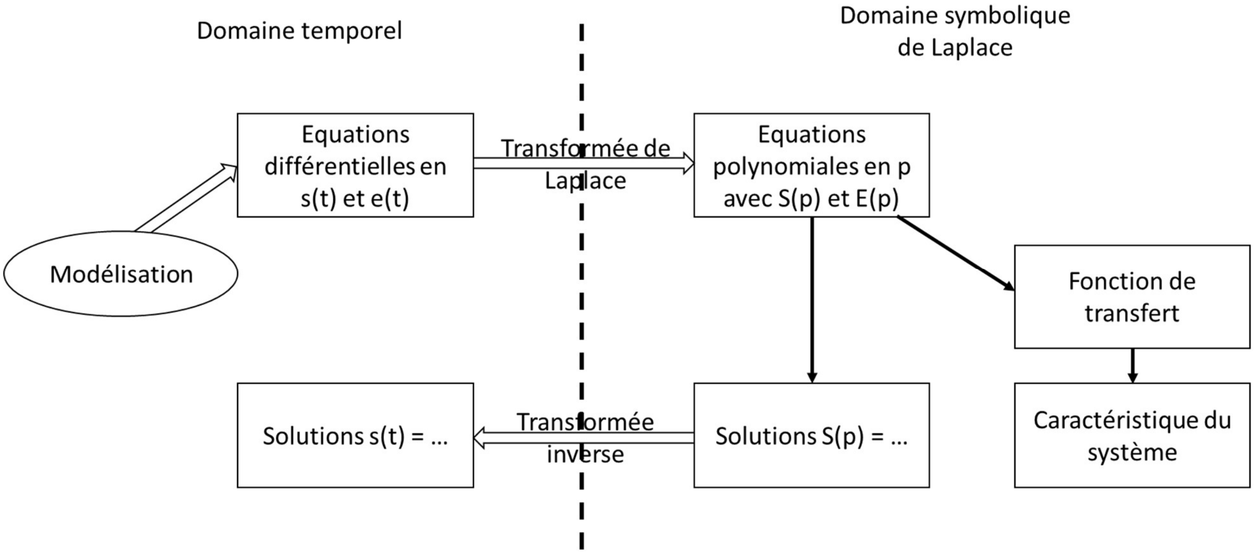
Résoudre les équations différentielles n'est pas toujours simple à réaliser (cf. cours de maths). En SI, on utilisera **la transformée de Laplace** qui permet d'obtenir des informations sur **la stabilité, la précision, la rapidité et le dépassement du système** et même de déterminer la réponse temporelle du système **sans résoudre explicitement l'équation différentielle.**

2. Outil : la transformée de Laplace

La transformée de Laplace est une application mathématique permettant d'exprimer une fonction temporelle dans un domaine virtuel, le **domaine de Laplace**, où la manipulation des expressions sera bien plus simple.

Il s'agit en priorité de **savoir utiliser** l'outil afin de modéliser les systèmes.

La méthode globale est la suivante :



Soit $f \to f(t)$, une fonction temporelle représentant généralement un signal ou une grandeur physique évoluant au cours du temps. Soit $F(p)$ la transformée de Laplace de $f(t)$, où p est la variable de Laplace.

p est parfois noté s, en particulier dans la littérature anglo-saxonne et dans certains logiciels comme Scilab.

On note $F(p) = \mathcal{L}(f(t))$ et la transformée inverse est notée $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p))$.

$$\mathcal{L}\big(f(t)\big) = F(p) = \int_{t=0}^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt \; avec\; p \in \mathbb{C} \; et\; t \;\in\; \mathbb{R}$$

Si les **conditions de Heaviside** sont respectées, c'est-à-dire si les **conditions initiales** sont **nulles**, on a :

$$\boldsymbol{\mathcal{L}\left(\frac{df}{dt}(t)\right) = pF(p)}$$

<u>Démonstration :</u>

$$\mathcal{L}\left(\frac{df}{dt}(t)\right) = \int_{t=0}^{+\infty} \frac{df}{dt}(t)e^{-pt}\,dt = [f(t)e^{-pt}]_0^{+\infty} - \int_{t=0}^{+\infty} f(t)(-p)e^{-pt}\,dt$$

$$= 0 + p\int_{t=0}^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt = pF(p)$$

La dérivée est donc transformée en une multiplication par p. De même, une dérivée seconde sera transformée en une multiplication par p^2 et ainsi de suite…

Ainsi l'équation différentielle d'un système

$$a_0 s(t) + a_1 \frac{ds}{dt}(t) + a_2 \frac{d^2 s}{dt^2}(t) = b_0 e(t) + b_1 \frac{de}{dt}(t)$$

se transforme en :

$$(a_0 + a_1 p + a_2 p^2) S(p) = (b_0 + b_1 p) E(p)$$

Les systèmes complexes sont composés de plusieurs composants dont les comportements sont modélisés par des équations différentielles. La transformée de Laplace permet de combiner efficacement les équations sous forme polynomiale.

3. Notion de fonction de transfert

Définition

Fonction de transfert :

La **fonction de transfert** ou **transmittance** est la fonction H(p), définie par le rapport de l'image de la sortie sur l'image de l'entrée, toutes deux exprimées dans le domaine symbolique de Laplace :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

H(p) représente le comportement du système indépendamment du signal d'entrée.

3.1. Exemple : Moteur électrique

$$\text{Tension} \longrightarrow \boxed{\text{Moteur électrique}} \longrightarrow \text{Vitesse de rotation}$$

Les fabricants de moteur précisent que le comportement d'un moteur peut être modélisé par l'équation différentielle suivante : $\omega(t) + \tau \frac{d\omega}{dt}(t) = K_m u_m(t)$

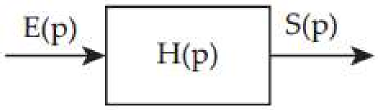
Calcul de la fonction de transfert du moteur :

$$\omega(t) + \tau \frac{d\omega}{dt}(t) = K_m u_m(t) \Leftrightarrow \omega(p) + \tau p\, \omega(p) = K_m U_m(p)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\omega(p)}{U_m(p)} = \frac{K_m}{1 + \tau p}$$

3.2. Généralisation

La relation entre les grandeurs physiques dans le domaine de Laplace peut être décrite sous forme de schéma-bloc :



$H(p)$ s'écrit sous la forme d'un quotient de deux polynômes :

$$H(p) = \frac{a_0 + a_1 p + \cdots + a_n p^n}{b_0 + b_1 p + \cdots + b_d p^d}$$

On appelle **pôles** les racines du dénominateur et **zéros** les racines du numérateur.

La **forme canonique** consiste à imposer une constante unitaire aux polynômes pour mettre la fonction de transfert sous la forme :

$$H(p) = \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + a'_1 p + \cdots + a'_n p^{n'}}{1 + b'_1 p + \cdots + b'_d p^{d'}} = \frac{K}{p^\alpha} \frac{N(p)}{D(p)}$$

Avec $N(p)$ et $D(p)$ des polynômes quelconques avec $N(0) = D(0) = 1$.

K est le gain statique de la fonction de transfert, α la classe du système et $\boldsymbol{d = d' + \alpha}$ l'ordre du système.

4. Modélisation par schéma-blocs

La modélisation par schéma-blocs est très proche de la représentation schématique vue au chapitre précédent.

4.1. Eléments de base

Un schéma-bloc est une représentation graphique d'un système d'équations différentielles liant des grandeurs physiques.

Chaque bloc représente une équation et chaque lien représente une grandeur physique.

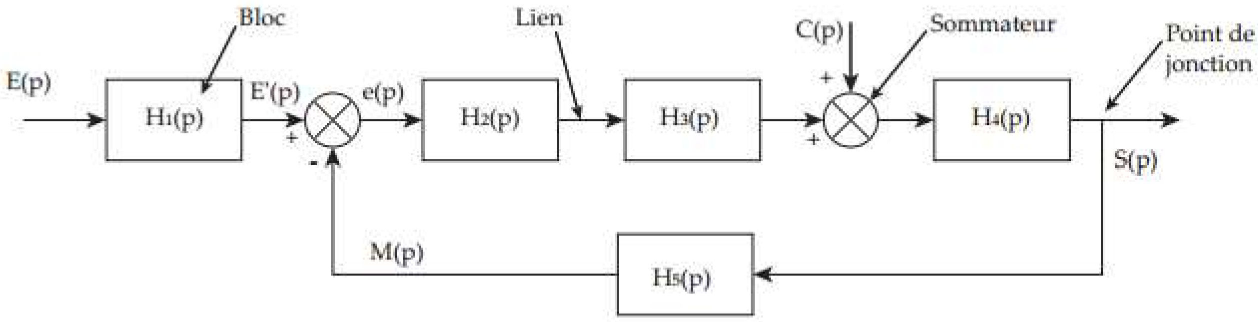
Le schéma-bloc est un outil pour aider à obtenir la fonction de transfert globale du système à partir des fonctions de transferts des différents constituants du système. La fonction de transfert globale engendre un comportement « mathématique » équivalent à celui du système ce qui permet de valider les performances du système mais éloigne le modèle de sa réalité structurelle.

Les blocs peuvent représenter l'équation de comportement d'un composant ou d'un phénomène physique (l'équation décrivant le comportement du moteur électrique par exemple).

La modélisation d'un système sous forme de schéma-blocs consiste à :

- définir l'entrée et la sortie du système et les perturbations qui peuvent s'appliquer au système ;

- décomposer le système en composants élémentaires (schéma-bloc fonctionnel) et déterminer les équations physiques qui les caractérisent ;
- traduire les équations physiques sous forme de schéma-bloc.

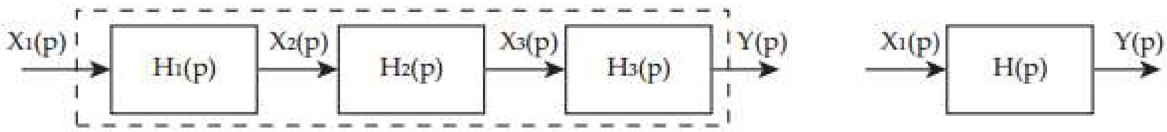


Les blocs : ils contiennent une fonction de transfert caractérisant la relation entre l'entrée et la sortie. **Les liens :** ils représentent une grandeur dans le domaine de Laplace. **Les sommateurs :** ils additionnent (ou soustraient suivant les signes) les différentes entrées. Ils ne peuvent avoir qu'une sortie. **Les points de prélèvement :** une jonction permet de transmettre une grandeur en entrée de plusieurs blocs ou sommateurs.

4.2. Associations de blocs

4.2.1. Association de blocs en série

La fonction de transfert équivalente à l'association en série de plusieurs blocs est égale au produit des fonctions de transfert de ces blocs.



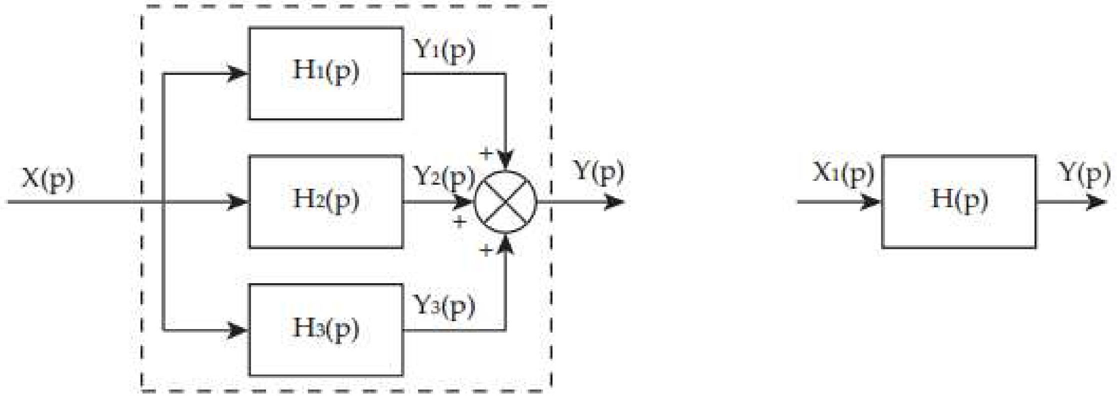
$$\left.\begin{array}{r} X_2(p) = H_1(p).X_1(p) \\ X_3(p) = H_2(p).X_2(p) \\ Y(p) = H_3(p).X_3(p) \end{array}\right\} \Rightarrow Y(p) = H_1(p).H_2(p).H_3(p).X_1(p)$$

La fonction de transfert globale de blocs en série s'écrit donc :

$$\boxed{H(p) = H_1(p) * H_2(p) * H_3(p)}$$

4.2.2. Association de blocs en parallèle

La fonction de transfert équivalente à l'association en parallèle de plusieurs blocs liés par un sommateur avec des signes + est égale à la somme des fonctions de transfert de ces blocs.



$$\left.\begin{array}{l} Y_1(p) = H_1(p).X(p) \\ Y_2(p) = H_2(p).X(p) \\ Y_3(p) = H_3(p).X(p) \end{array}\right\} \Rightarrow Y(p) = [H_1(p) + H_2(p) + H_3(p)].X(p)$$

La fonction de transfert globale de blocs en parallèle s'écrit donc :

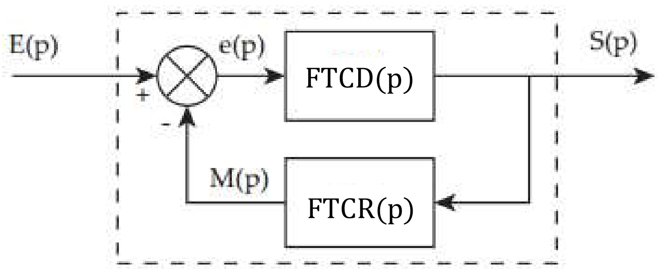
$$\boxed{H(p) = H_1(p) + H_2(p) + H_3(p)}$$

4.3. Fonctions de transfert globales (FTBF et FTBO)

4.3.1. Fonction de Transfert en Boucle Fermée (FTBF)

Les systèmes asservis étudiés sont généralement représentables par un schéma-bloc bouclé. Pour étudier les performances de ce système, il est nécessaire de déterminer la fonction de transfert globale. Celle-ci est appelée fonction de transfert en boucle fermée (attention au +/- dans le comparateur !) :

$$\boxed{\boldsymbol{FTBF(p) = \frac{S(p)}{E(p)}}}$$



$FTCD(p)$ est généralement dénommée chaîne directe ou chaîne d'action tandis que $FTCR(p)$ est dénommée chaîne de retour ou chaîne de mesure.

La **formule de Black** donne :

$$\boxed{\boldsymbol{FTBF(p) = \frac{FTCD(p)}{1 + FTCD(p)FTCR(p)}}}$$

Démonstration :

$$S(p) = FTCD(p)e(p)$$
$$S(p) = FTCD(p) \times (E(p) - M(p))$$
$$S(p) = FTCD(p) \times (E(p) - FTCR(p)S(p))$$
$$S(p) \times (1 + FTCR(p).FTCD(p)) = FTCD(p) \times E(p)$$
$$\boldsymbol{\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{FTCD(p)}{1 + FTCD(p)FTCR(p)}}$$

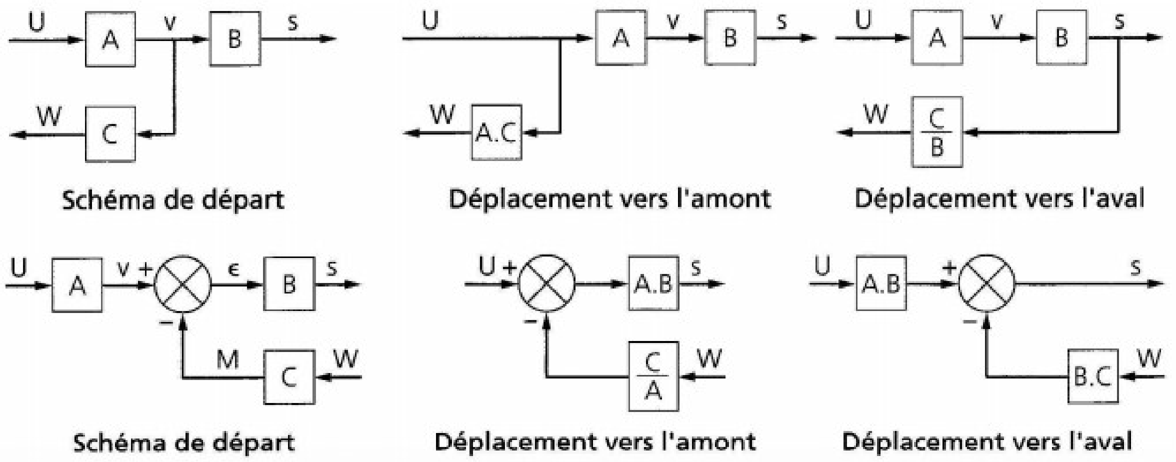
4.3.2. Fonction de transfert en boucle ouverte

La fonction de transfert en boucle ouverte est définie comme la fonction de transfert du système d'entrée ε, lorsque le retour sur le sommateur est coupé. Elle comprend la chaîne directe $FTCD(p)$ et la chaîne de retour $FTCR(p)$.

$$\boxed{\boldsymbol{FTBO(p) = \frac{M(p)}{e(p)} = FTCD(p)FTCR(p)}}$$

4.4. Modification de schéma-blocs

Les schémas blocs peuvent être modifiés pour être capable de calculer la fonction de transfert globale à l'aide de la formule de Black. Les opérations simples de modifications de schéma-blocs à connaître ou à savoir faire sont les suivantes :



Remarque : Les schéma-blocs représentent des équations, on peut les manipuler tant que le nouveau schéma-bloc représente toujours la même équation !

Savoir-faire

Vous devez être capables de :

- Connaitre les caractéristiques d'un système linéaire continu invariant.
- Transposer une équation différentielle linéaire dans le domaine de Laplace.
- Identifier les pôles et les zéros d'une fonction de transfert.
- Manipuler un schéma bloc pour en déduire la fonction de transfert global du système.