



---

# Correction DS 1 - SI

---

## Consignes

- Copies propres et bien présentées: encadrer vos résultats, souligner les applications numériques (avec une règle bien sûr)...
- Uniquement la calculatrice est autorisée.
- Les exercices sont indépendants.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Changements de base</b>	<b>2</b>
1.1	Savoir réaliser une figure de changement de base . . . . .	2
1.2	Savoir utiliser une figure de changement de base . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Graphe de liaison</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Machine à vapeur</b>	<b>4</b>
3.1	Présentation . . . . .	4
3.2	Modélisation . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Réaliser un schéma bloc</b>	<b>7</b>
<b>5</b>	<b>Performances d'un système asservi</b>	<b>8</b>
5.1	Asservissement en position . . . . .	8
5.2	Asservissement en vitesse . . . . .	10

# 1. Changements de base

## 1.1 Savoir réaliser une figure de changement de base

**Question 1:** Réaliser les figures de changement de base pour les transformations définies ci-dessous.

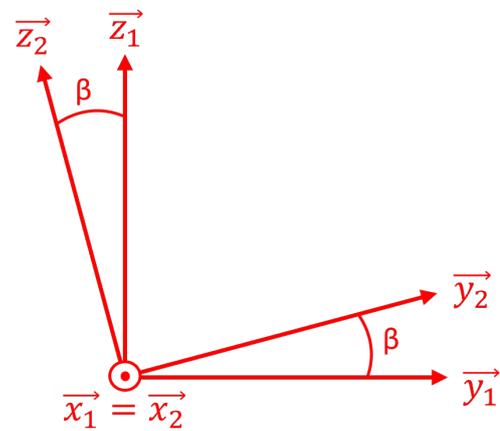
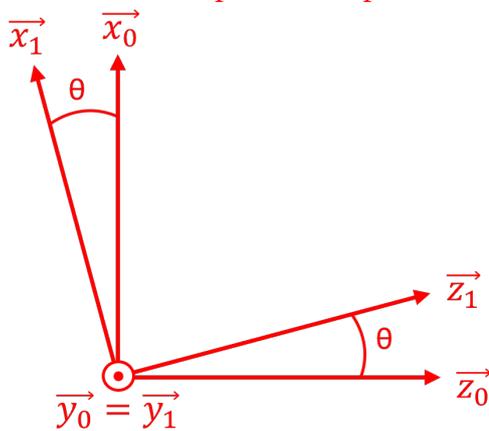
$$(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) \xrightarrow{\vec{y}_0} (\vec{x}_1, \vec{y}_0, \vec{z}_1)$$

C'est à dire  $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$ .

$$(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1) \xrightarrow{\vec{x}_1} (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$$

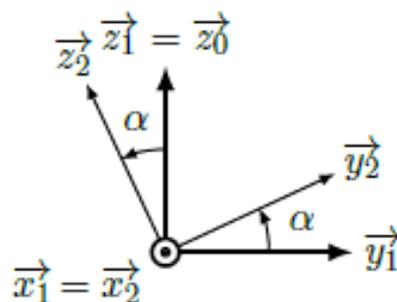
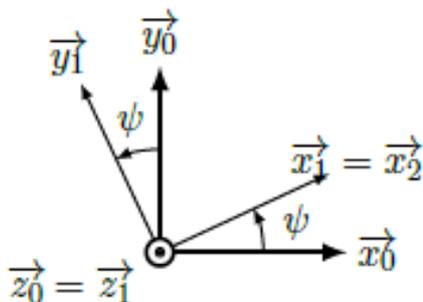
C'est à dire  $\beta = (\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$ .

**Réponse 1:** Il suffit de remplir le template.



## 1.2 Savoir utiliser une figure de changement de base

Cette partie est indépendante de la précédente.



**Question 2:** Exprimer  $\vec{x}_1$  en fonction de  $\vec{x}_0$  et  $\vec{y}_0$ , puis faire de même avec  $\vec{y}_1$ .

**Réponse 2:**  $\vec{x}_1 = \cos(\psi)\vec{x}_0 + \sin(\psi)\vec{y}_0$  et  $\vec{y}_1 = -\sin(\psi)\vec{x}_0 + \cos(\psi)\vec{y}_0$ .

**Question 3:** Exprimer  $\vec{z}_2$  dans la base  $\mathcal{B}_0 = (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ .

**Réponse 3:** Comme  $\vec{z}_2$  n'est pas sur la même figure que  $\mathcal{B}_0$ , il faut d'abord décomposer  $\vec{z}_2$  dans  $\mathcal{B}_1$  :

$$\vec{z}_2 = -\sin(\alpha)\vec{y}_1 + \cos(\alpha)\vec{z}_1$$

Comme  $\vec{z}_1 = \vec{z}_0$ , il suffit de remplacer  $\vec{y}_1$  :

$$\vec{z}_2 = -\sin(\alpha)(-\sin(\psi)\vec{x}_0 + \cos(\psi)\vec{y}_0) + \cos(\alpha)\vec{z}_0.$$

**Question 4:** Calculer, ou lire, les produits scalaires suivants :

(a).  $\vec{y}_1 \cdot \vec{y}_0$

(b).  $\vec{x}_2 \cdot \vec{y}_1$

(c).  $\vec{z}_1 \cdot \vec{x}_0$

(d).  $\vec{z}_2 \cdot \vec{y}_0$

**Réponse 4:** Cela revient à projeter. On peut aussi faire les produits scalaires par leur définition mathématique.

(a)  $\vec{y}_1 \cdot \vec{y}_0 = \cos \psi$

(b)  $\vec{x}_2 \cdot \vec{y}_1 = 0$

(c)  $\vec{z}_1 \cdot \vec{x}_0 = 0$

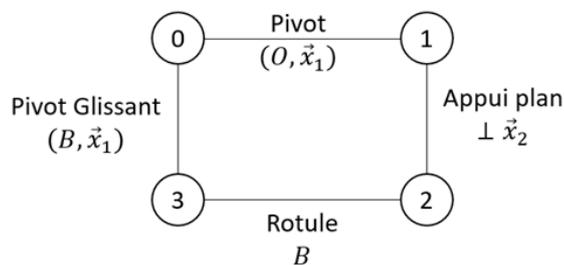
(d) Les deux vecteurs ne sont pas sur la même figure, il faut décomposer (projeter) :  $\vec{z}_2 \cdot \vec{y}_0 = (-\sin(\alpha)(-\sin(\psi)\vec{x}_0 + \cos(\psi)\vec{y}_0) + \cos(\alpha)\vec{z}_0) \cdot \vec{y}_0$  soit

$$\vec{z}_2 \cdot \vec{y}_0 = -\sin(\alpha) \cos(\psi)$$

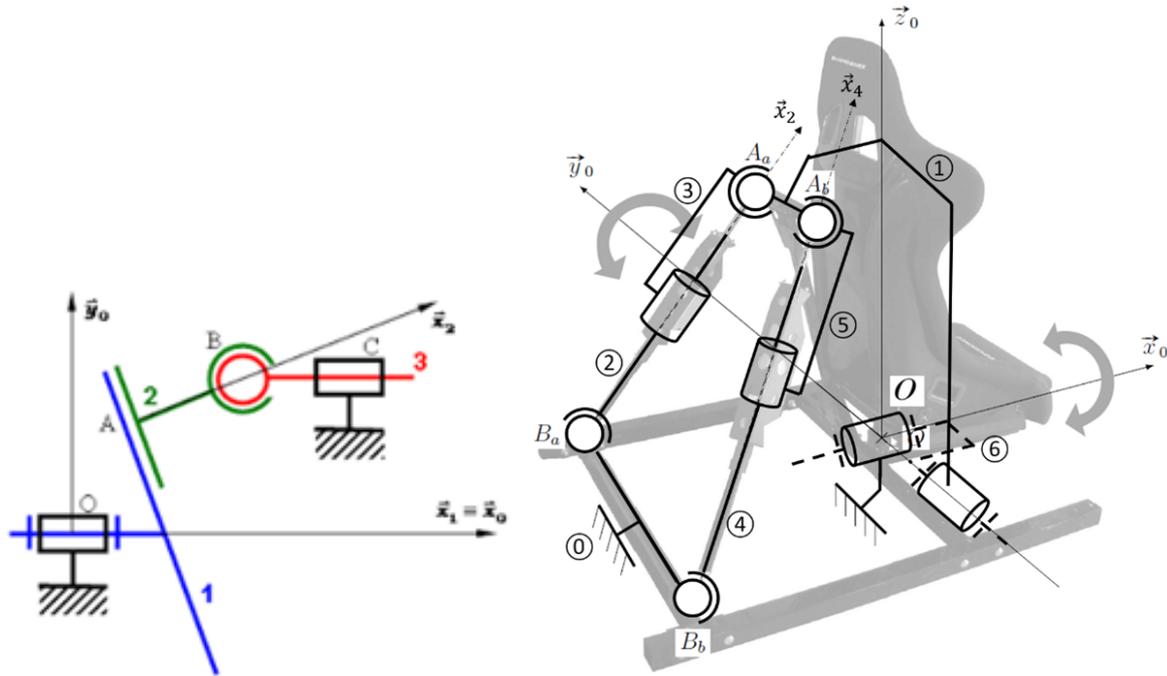
## 2. Graphe de liaison

**Question 5:** Réaliser le graphe de liaison du schéma cinématique de gauche.

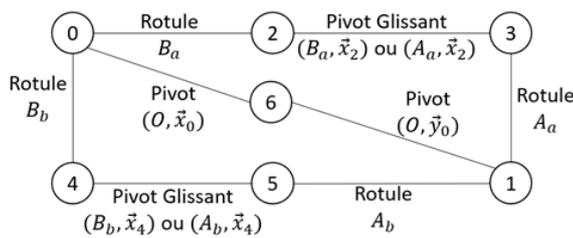
**Réponse 5:**



**Question 6:** Réaliser le graphe de liaison du schéma cinématique de droite.



Réponse 6:



### 3. Machine à vapeur

#### 3.1 Présentation

On étudie le fonctionnement d'une machine à vapeur utilisée sur les maquettes de modèle réduit. Les différentes pièces sont modélisées sur SolidWorks sur la Figure 1. Le mécanisme est constitué de 4 classes d'équivalence cinématique :



- le bâti  $S_0$ , qui est axé sur le bateau, constitué du corps 1 et de la bague 8 ;
- le cylindre  $S_1$ , qui reçoit la vapeur pour déplacer le piston, constitué du cylindre 2 et de l'axe de cylindre ;
- le piston  $S_2$ , qui va mettre en mouvement le volant d'inertie ;

- le volant d'inertie  $S_3$ , dont la rotation sera reliée aux aubes du bateau, qui est composé du volant 4, de l'axe principal et de l'axe de volant.

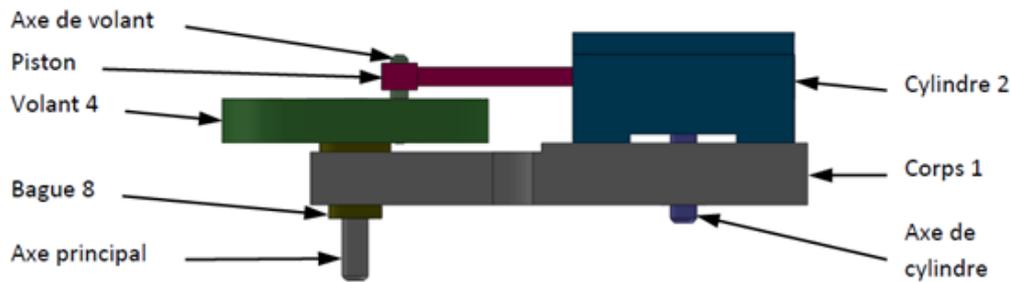


FIGURE 1 – Description du mécanisme de la machine à vapeur

L'objectif est de déterminer le débattement angulaire du cylindre au cours du mouvement de manière à savoir où positionner les entrées/sorties de vapeur d'eau.

### 3.2 Modélisation

La modélisation de la machine à vapeur est donnée sur le schéma cinématique paramétré de la Figure 2.

On associe au bâti  $S_0$  le repère  $\mathcal{R}_0(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  et on pose  $\overrightarrow{AC} = L\vec{x}_0$ .

Le cylindre  $S_1$  est en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z}_0)$  avec le bâti  $S_0$ . La liaison est paramétrée par l'angle  $\theta_{10} = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ .

Le piston  $S_2$  est en liaison pivot glissant d'axe  $(A, \vec{x}_1)$  avec le cylindre  $S_1$ . La liaison est paramétrée par le vecteur  $\overrightarrow{AB} = \lambda(t)\vec{x}_1$ .

Le volant  $S_3$  est en liaison pivot d'axe  $(B, \vec{z}_0)$  avec le piston  $S_2$ . La liaison est paramétrée par l'angle  $\theta_{31} = (\vec{x}_1, \vec{x}_3) = (\vec{y}_1, \vec{y}_3)$ . On pose  $\overrightarrow{CB} = R\vec{x}_3$ .

Le volant  $S_3$  est en liaison pivot d'axe  $(C, \vec{z}_0)$  avec le bâti  $S_0$ . La liaison est paramétrée par l'angle  $\theta_{30} = (\vec{x}_0, \vec{x}_3) = (\vec{y}_0, \vec{y}_3)$ .

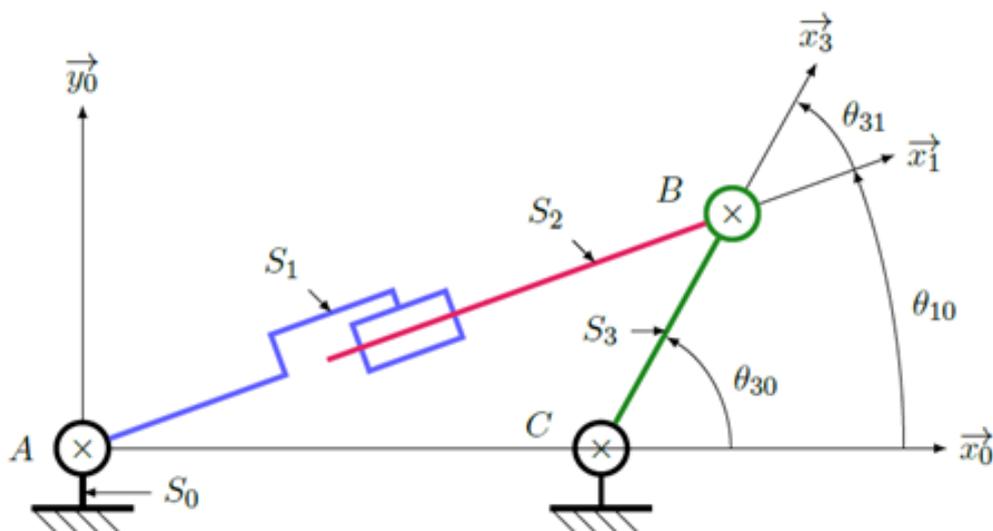
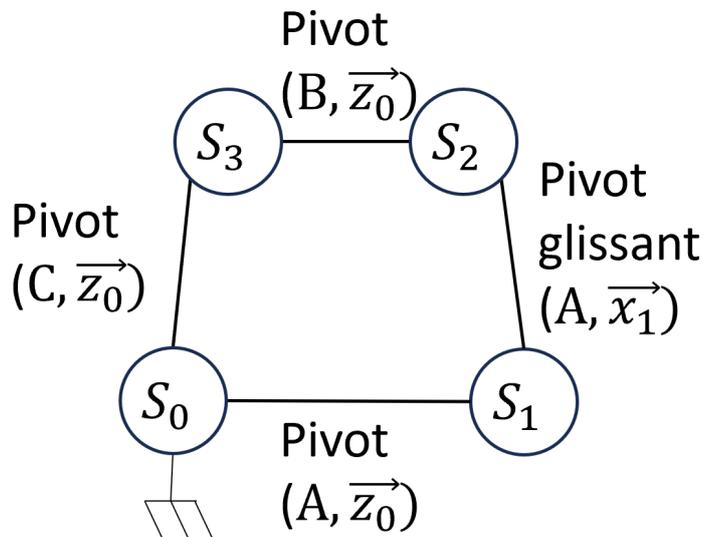


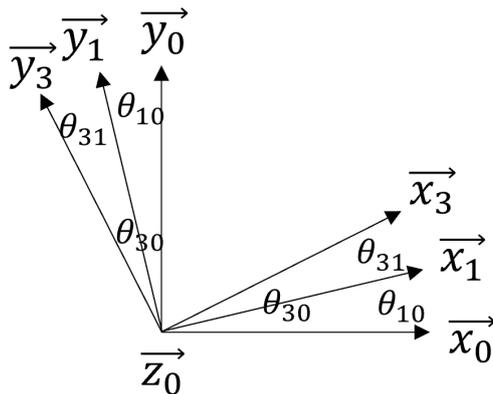
FIGURE 2 – Schéma cinématique de la modélisation de la machine à vapeur

**Question 7:** Réaliser le graphe des liaisons du système.



**Réponse 7:**

**Question 8:** Tracer les figures de changement de base.



**Réponse 8:**

**Question 9:** Écrire la fermeture géométrique du système et en déduire les deux équations scalaires associées par projection dans la base  $\mathcal{B}_0$ . Écrire une relation reliant  $\theta_{30}$  aux grandeurs  $\lambda(t)$ ,  $L$  et  $R$ .

**Réponse 9:** La fermeture géométrique s'écrit :

$$\boxed{\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \vec{0}} \text{ soit } \overline{AB} - \overline{CB} - \overline{AC} = \vec{0}$$

$$\text{En remplaçant : } \lambda(t)\vec{x}_1 - R\vec{x}_3 - L\vec{x}_0 = \vec{0}$$

En projection sur  $\vec{x}_0$  et  $\vec{y}_0$  :

$$\lambda(t)(\cos\theta_{10}\vec{x}_0 + \sin\theta_{10}\vec{y}_0) - R(\cos\theta_{30}\vec{x}_0 + \sin\theta_{30}\vec{y}_0) - L\vec{x}_0 = \vec{0}$$

$$\text{D'où : } \begin{cases} \lambda(t)\cos\theta_{10} - R\cos\theta_{30} - L = 0 \\ \lambda(t)\sin\theta_{10} - R\sin\theta_{30} = 0 \end{cases}$$

On souhaite éliminer  $\theta_{10}$ , donc on isole les termes avec  $\theta_{10}$  :

$$\begin{cases} \lambda(t)\cos\theta_{10} = R\cos\theta_{30} + L \\ \lambda(t)\sin\theta_{10} = R\sin\theta_{30} \end{cases}$$

En passant les deux équations au carré et en les sommant il vient :  $\lambda^2(t) = (L + R\cos\theta_{30})^2 + (R\sin\theta_{30})^2$

$$\text{soit en développant et en simplifiant : } \boxed{\theta_{30} = \arccos\left(\frac{\lambda^2(t) - R^2 - L^2}{2RL}\right)}$$

**Question 10:** Exprimer l'angle du cylindre  $S_1$ ,  $\theta_{10}$ , en fonction de l'angle du volant  $S_3$ ,  $\theta_{30}$ , de  $R$  et de  $L$ .

**Réponse 10:** Cette fois nous voulons éliminer le  $\lambda(t)$ , en faisant le quotient des équations scalaires précédentes (projection sur  $\vec{x}_0$  et  $\vec{y}_0$ ) il vient :

$$\boxed{\theta_{10} = \arctan\left(\frac{R\sin\theta_{30}}{R\cos\theta_{30} + L}\right)}$$

## 4. Réaliser un schéma bloc

On donne le modèle de connaissance du moteur à courant continu suivant :

$$\begin{aligned} u_m(t) &= e(t) + Ri(t) & e(t) &= k_e\omega_m(t) \\ J\frac{d\omega_m(t)}{dt} &= c_m(t) & c_m(t) &= k_m i(t) \end{aligned}$$

**Question 11:** Exprimer ces équations dans le domaine de Laplace.

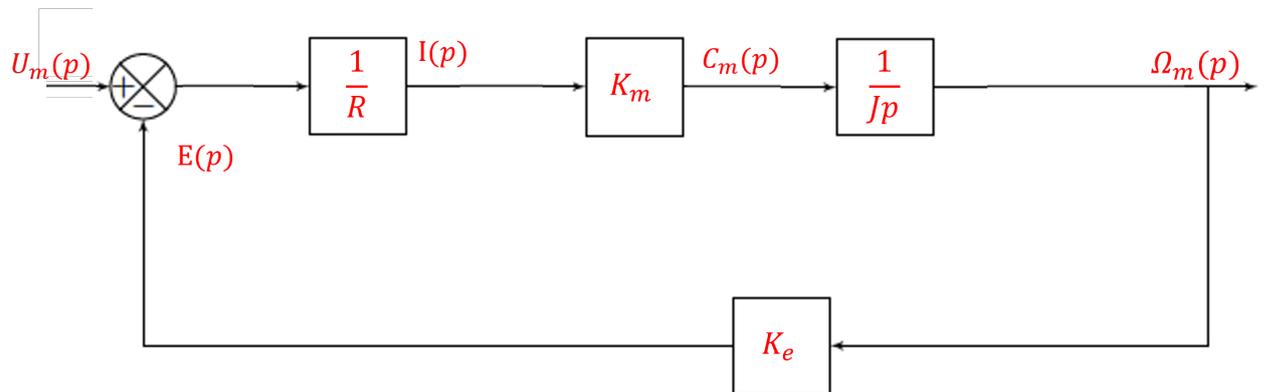
**Réponse 11:**  $U_m(p) = E(p) + RI(p)$

$$E(p) = k_e\Omega_m(p)$$

$$Jp\Omega_m(p) = C_m(p)$$

$$C_m(p) = k_m I(p)$$

**Question 12:** Recopier - *rapidement et proprement* - le schéma bloc suivant puis le compléter en s'aidant des équations du moteur. L'entrée en temporelle est  $u_m(t)$  et la sortie  $\omega_m(t)$ .

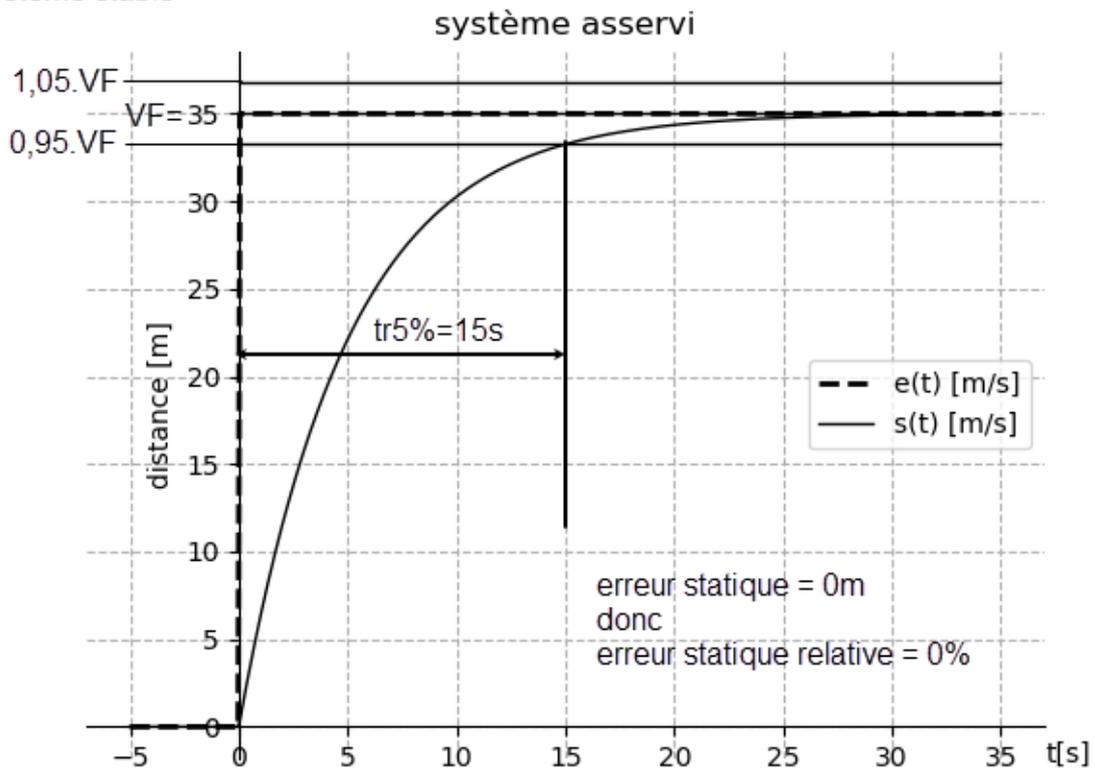
**Réponse 12:****5. Performances d'un système asservi****5.1 Asservissement en position**

Le cahier des charges d'un asservissement en position est proposé ci-dessous :

Critères	Niveaux
Stabilité	Le système doit être stable
Précision	Erreur statique inférieure à 5%
Rapidité	Temps de réponse à 5% inférieur à 20s
Dépassement	Premier dépassement inférieur à 10%

Ce système est soumis à une consigne en échelon. La réponse temporelle de cet essai est proposée ci-dessous.

Système stable



D1 = 0 m donc Dr1=0%

**Question 13:** Le système satisfait-il le cahier des charges ? Il faut bien sûr justifier à l'aide de **tous** les critères.

**Réponse 13:**

- Le système est stable car la sortie est bornée pour une entrée bornée.
- L'erreur statique est nulle, car la valeur finale de la sortie vaut la valeur d'entrée, ce qui est inférieur à 5%.
- Le temps de réponse à 5% vaut à peu près 15s, ce qui est inférieur à 20s (temps pour lequel 0.95% de la valeur finale sont atteints).
- Il n'y a pas de dépassement, ce qui est donc inférieur à 10%.

L'ensemble des critères du cahier des charges sont respectés.

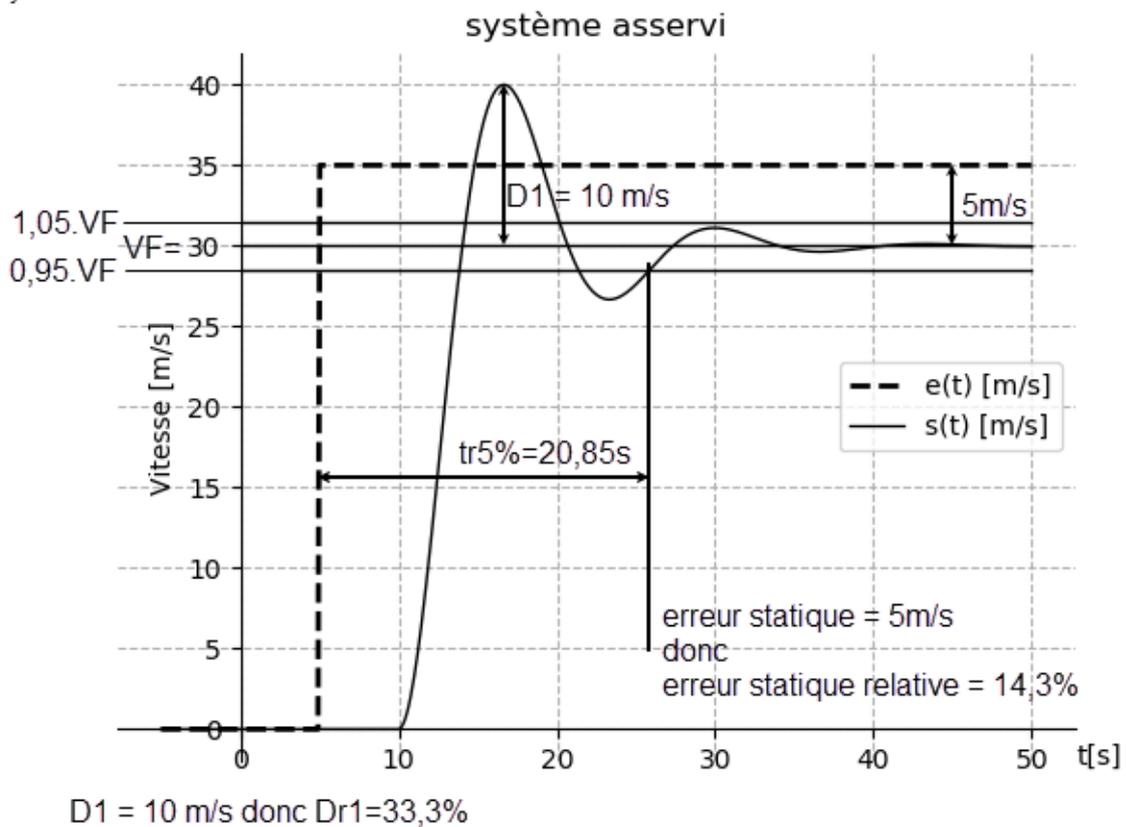
## 5.2 Asservissement en vitesse

Le cahier des charges d'un asservissement en vitesse est proposé ci-dessous :

Critères	Niveaux
Stabilité	Le système doit être stable
Précision	Erreur statique inférieure à 10%
Rapidité	Temps de réponse à 5% inférieur à 25s
Dépassement	Premier dépassement inférieur à 20%

Ce système est soumis à une consigne en échelon. La réponse temporelle de cet essai est proposée ci-dessous.

Système stable



**Question 14:** Le système satisfait-il le cahier des charges ? Il faut bien sûr justifier à l'aide de tous les critères.

**Réponse 14:**

- Le système est stable car la sortie est bornée pour une entrée bornée.
- L'erreur statique est de 5m/s car l'entrée vaut 35m/s et la valeur finale de la sortie est de 30m/s ; ce qui fait un écart de  $\frac{35 - 30}{35} = 14,3\% > 10\%$  spécifiés par le cahier des charges.
- Le temps de réponse à 5% est à peu près de 20,85s (attention de prendre en compte qu'il y a un retard sur la sollicitation en échelon, qui commence à 5s).
- Le dépassement D1 vaut 10m/s, soit  $\frac{10}{30} = 33.3\% > 20\%$  spécifiés par le cahier des charges.

Les critères de précision et de dépassement ne sont pas respectés.  
Le système ne satisfait pas le cahier des charges.