Évaluation des performances d'un système asservi

Compétence

Résoudre :
- Performances d'un système asservi

Pour évaluer les performances d'un système en connaissant sa FTBF, il est possible, à l'aide de la transformée de Laplace inverse, de tracer la réponse temporelle du système. Néanmoins, certaines performances peuvent être étudiées directement grâce à la fonction de transfert, en boucle fermée ou en boucle ouverte.

1. Formalisme et propriétés de la transformée de la place

La transformée de Laplace constitue un outil mathématique largement utilisé en ingénierie pour les études des SLCI. Son utilisation permet :
- de manipuler aisément les équations différentielles de comportement des systèmes ;
- de résoudre facilement les équations différentielles pour des entrées simples ;
- d'obtenir les principales performances des systèmes sans calculer la réponse temporelle.

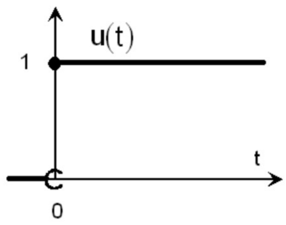
1.1. Rappel et définition

$$\mathcal{L}\big(f(t)\big) = F(p) = \int_{t=0}^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt \; avec \; p \in \mathbb{C} \; et \; t \; \in \; \mathbb{R}$$

Conditions d'Heaviside : $f(0^+) = 0 \ldots \frac{d^n f}{dt^n}(0^+) = 0$

1.2. Transformées de Laplace usuelles

1.2.1. Calcul pour l'échelon unitaire



Soit u(t) l'échelon unitaire défini par :

$$u(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ 1 \text{ si } t \geq 0 \end{cases}$$

Déterminons la transformée de Laplace de cette fonction :

$$\int_{t=0}^{+\infty} 1 \times e^{-pt}\,dt = -\frac{1}{p}\left[e^{-pt}\right]_0^{+\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{p} \times 1\right) = \frac{1}{p}$$

Remarque : Cette fonction est également appelée fonction de Heaviside ou fonction indicielle. *Pour rendre causale une fonction quelconque, on la multiplie par u(t). Une fonction causale est une fonction telle que* $f(x) = 0 \; \forall x < 0$*. (exemple : « sinus causal » : sin(t).u(t))*

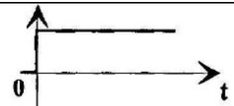
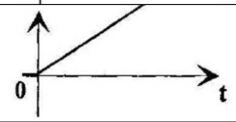
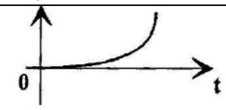
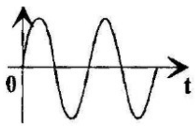
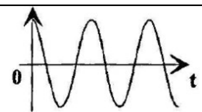
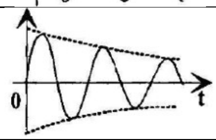
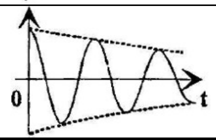
1.2.2. Calcul pour une fonction exponentielle

Même méthode pour la fonction exponentielle suivante :

$$f(t) = e^{-at}u(t)$$

$$\int_{t=0}^{+\infty} e^{-at} \times e^{-pt}\,dt = \int_{t=0}^{+\infty} e^{-(a+p)t}\,dt = -\frac{1}{a+p}\left[e^{-(a+p)t}\right]_0^{+\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{a+p} \times 1\right) = \frac{1}{p+a}$$

Toutes les transformées de Laplace des fonctions usuelles sont regroupé dans le tableaux suivant :

Allure	Fonction $\boldsymbol{f(t)}$	Transformée de Laplace $\boldsymbol{F(p) = \mathcal{L}(f(t))}$	Pôles de $\boldsymbol{F(p)}$
	$t \to \delta(t)$ Impulsion de DIRAC	1	NA
	$t \to f(t) = u(t)$ Echelon unitaire	$F(p) = \frac{1}{p}$	0
	$t \to f(t) = tu(t)$ Rampe	$F(p) = \frac{1}{p^2}$	0 *Double*
	$t \to f(t) = t^n u(t)$ Fonction puissance	$F(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$	0 *D'ordre* $n+1$
	$t \to f(t) = e^{-at}u(t)$ Exponentielle	$F(p) = \frac{1}{p+a}$	$-a$
	$t \to f(t) = \sin \omega t \, u(t)$ Sinus	$F(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\pm j\omega$
	$t \to f(t) = \cos \omega t \, u(t)$ Cosinus	$F(p) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\pm j\omega$
	$t \to f(t) = e^{-at} \sin \omega t \, u(t)$ Sinus amorti	$F(p) = \frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$	$-a \pm j\omega$
	$t \to f(t) = e^{-at} \cos \omega t \, u(t)$ Cosinus amorti	$F(p) = \frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$	$-a \pm j\omega$

« j » est l'élément complexe tel que $j^2=-1$.

1.2.3. Application

Quelle est la transformée de Laplace de $f(t) = K\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)u(t)$ avec K et τ des réels strictement positifs ?

En distribuant il vient : $\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(K.u(t)) - \mathcal{L}\left(Ke^{-\frac{t}{\tau}}.u(t)\right)$

D'après ce qu'on a vu précédemment : $\mathcal{L}(K.u(t)) = K.\mathcal{L}(u(t)) = \frac{K}{p}$

et $\mathcal{L}\left(Ke^{-\frac{t}{\tau}}.u(t)\right) = K.\mathcal{L}\left(e^{-\frac{t}{\tau}}.u(t)\right) = \frac{K\tau}{p\tau+1}$

D'où $\mathcal{L}\left(K\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)u(t)\right) = K.(-\frac{\tau}{p\tau+1} + \frac{1}{p})$

1.3. Transformée de Laplace inverse

La transformée de Laplace étant bijective (propriété d'unicité), la transformée inverse existe et sera nécessaire pour retrouver, à partir de l'étude d'un système dans le domaine de Laplace, son comportement temporel (évolution de la sortie en fonction du temps).

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p))$$

Connaître la fonction de transfert H(p) d'un système

$$H(p) = \frac{K}{p^\alpha}\frac{a_0 + a_1 p + \cdots + a_n p^n}{b_0 + b_1 p + \cdots + b_d p^d}$$

Permet de connaître la sortie S(p) si l'entrée E(p) est connue. Comment revenir à la sortie temporelle s(t) ?

<u>Remarque :</u> On ne cherchera pas à mettre la fonction sous forme canonique pour trouver sa transformée inverse.

Pour calculer analytiquement la transformée inverse f(t) d'une fonction F(p), on procédera généralement par **décomposition en éléments simples** de F(p), puis par identification de ces éléments simples à des fonctions connues.

<u>Exemple</u> : soit un système régit par l'équation différentielle :

$$6.s(t) + 5.\frac{ds}{dt}(t) + \frac{d^2s}{dt^2}(t) = e(t)$$

avec s(0) = 0, s'(0) = 0 et e(t) = 6.u(t)

Les conditions de Heaviside sont respectées, on peut donc écrire :

$$\begin{cases} S(p)(6 + 5p + p^2) = E(p) \\ E(p) = \dfrac{6}{p} \end{cases}$$

soit $S(p) = \frac{6}{p(6+5p+p^2)}$

On remarque que -2 et -3 sont des racines évidentes, on va donc décomposer de la manière suivante :

$$S(p) = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{p+2} + \frac{\gamma}{p+3} = \frac{(\alpha+\beta+\gamma)p^2 + (5\alpha + 3\beta + 2\gamma)p + 6\alpha}{p(6+5p+p^2)}$$

Or $S(p) = \frac{6}{p(6+5p+p^2)}$. Par identification on trouve :

$$\begin{cases} 6\alpha = 6 \\ 5\alpha + 3\beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

D'où : $S(p) = \frac{1}{p} - \frac{3}{p+2} + \frac{2}{p+3}$

On peut donc en déduire à l'aide des transformées usuelles :

$$s(t) = u(t)(1 - 3e^{-2t} + 2e^{-3t})$$

1.4. Propriétés et théorèmes

Linéarité :

$$\mathcal{L}\big(\lambda f(t) + \mu g(t)\big) = \lambda F(p) + \mu G(p) \quad avec \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Transformée d'une dérivée :

$$\mathcal{L}\left(\frac{df}{dt}(t)\right) = pF(p)$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^2f}{dt^2}(t)\right) = p^2F(p)$$

Transformée d'une intégrale dans les conditions d'Heaviside :

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(t)dt\right) = \frac{F(p)}{p}$$

Théorème de la valeur initiale :

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{p\to +\infty} pF(p)$$

Théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t\to +\infty} f(t) = \lim_{p\to 0^+} pF(p)$$

Théorème du retard :

Soit f(t) une fonction dont la transformée de Laplace existe, f(t-T) est la même fonction, mais décalée (retardée) d'un temps T.

$$\mathcal{L}\big(f(t-T)\big) = e^{-Tp}F(t)$$

Remarque : On utilisera les théorèmes des valeurs finale et initiale lorsqu'on veut obtenir des informations sur la fonction temporelle f(t) mais qu'on ne souhaite pas déterminer la transformée inverse de F(p).

2. Évaluation des performances à partir de la fonction de transfert

2.1. Stabilité

La stabilité est intrinsèque au système et est totalement **indépendante** du type d'entrée auquel il est soumis.

Étudions la réponse d'un système asservi dans le cas d'une perturbation impulsionnelle $E(t) = \delta(t)$ soit $E(p) = 1$. Soit un système de fonction de transfert $H(p)$:

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} \text{ avec } D(p) = p^{\alpha}.\prod(p-p_i).\prod(p-p_i)^{n_i}.\ \prod[(p-a_j)^2 + b_j^2]$$

où les p_i sont les pôles réels (simples ou multiples) de $D(p)$ et $p_j = a_j + jb_j$ les pôles complexes.

On a donc $S(p) = H(p) \times 1$. En réalisant la transformée de Laplace inverse, on obtient :

$$s(t) = K_1 \sum \frac{t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} + K_2 \sum e^{p_i t} + K_3 \sum t^{n_i} e^{p_i t} + K_4 \sum e^{a_j t} \sin(b_j t)$$

Le système converge (et donc est asymptotiquement stable) si $s(t)$ tend vers zéro. Donc le système est asymptotiquement stable si et seulement si :

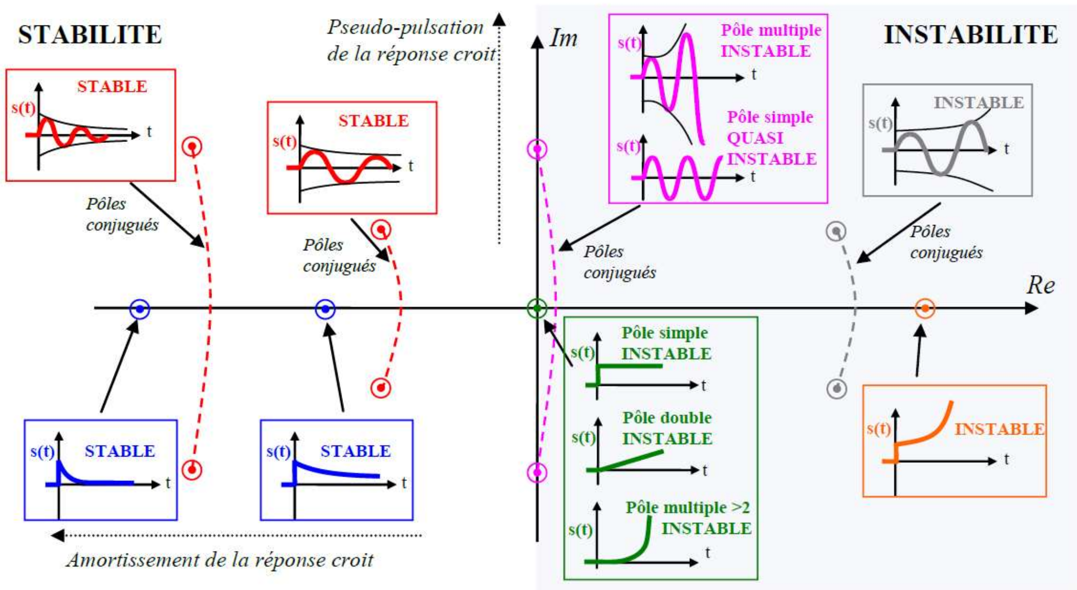
$$p_i < 0 \,;\, a_j < 0 \,;\, \alpha = 0$$

Un système est stable si tous les pôles de sa fonction de transfert en boucle fermée sont à partie réelle strictement négative.

On retiendra que cette condition est respectée dès lors que les signes des coefficients du dénominateur sont identiques.

Remarque : Bien que sa réponse à l'impulsion soit stable, un intégrateur pur $\frac{1}{p}$ (pôle nul) est tout de même considéré comme un système instable puisqu'une entrée en échelon conduit à une sortie en rampe.

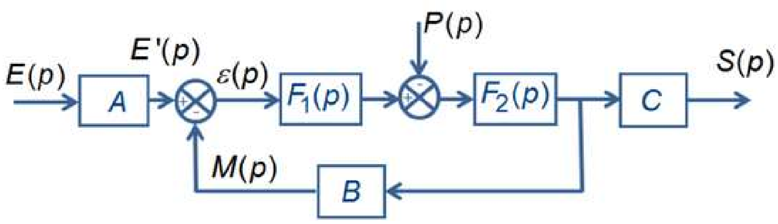
Pour mieux comprendre le rôle des pôles de la FTBF, on représente ci-dessous l'allure de la réponse à l'impulsion de Dirac d'un système selon la position des pôles de sa FTBF.



2.2. Précision

Il est possible d'évaluer la précision d'un système uniquement :

- si l'entrée et la sortie du système sont des grandeurs comparables (homogène);
- le système est stable.



La précision est caractérisée par **l'erreur $e_r(t)$**, différence entre l'entrée $e(t)$ (grandeur de commande) et la sortie $s(t)$ (grandeur commandée) :

$$\boxed{e_r(t) = e(t) - s(t)}$$

L'écart $\varepsilon(t)$ est différent de l'erreur dans le cas général !

L'**erreur statique e_{rs}** (ou erreur permanente) est la valeur de l'erreur quand le régime établi est atteint.

$$\boxed{e_{rs} = \lim_{t \to +\infty} e_r(t)}$$

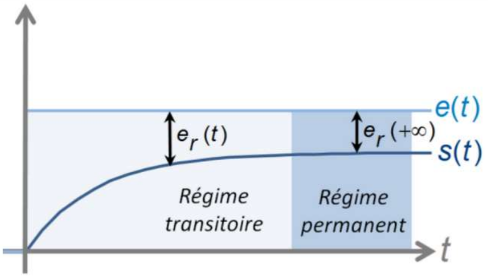
Si l'erreur en régime permanent est nulle, on dit que le système est précis.

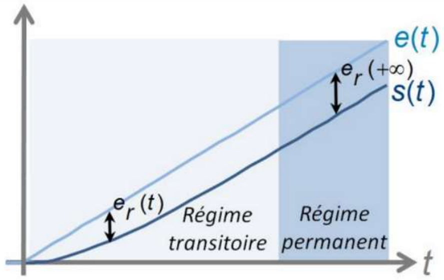
Sinon, il faut comparer sa valeur avec une valeur maximale imposée par le cahier des charges du système afin de conclure si elle est acceptable.

L'erreur se définit vis-à-vis du type d'entrée considérée. On distingue notamment :

- L'écart statique pour une entrée en échelon ;
- L'erreur de poursuite pour une entrée en rampe.

Erreur et *erreur en régime permanent* pour une entrée en échelon.	*Erreur* et *erreur en régime permanent* pour une entrée en rampe.





Pour calculer l'erreur statique, on utilise le **théorème de la valeur finale** :

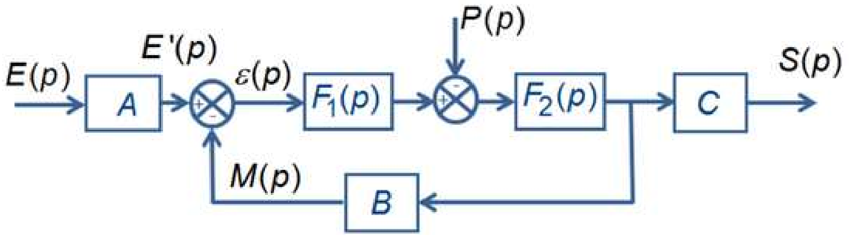
$$e_{rs} = \lim_{t \to +\infty} e_r(t) = \lim_{t \to +\infty} \left(\mathrm{e(t) - s(t)}\right) = \lim_{p \to 0} \mathrm{p(E(p) - S(p))}$$

$$e_{rs} = \lim_{p \to 0} \mathrm{p(E(p) - FTBF(p) \times E(p))}$$

$$\boxed{e_{rs} = \lim_{p \to 0} \mathrm{pE(p)(1 - FTBF(p))}}$$

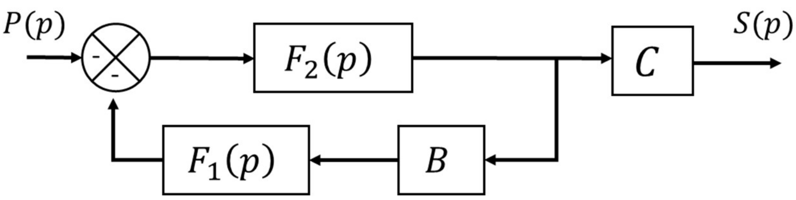
Ainsi il est possible de déterminer directement l'erreur statique en connaissant la FTBF du système.

2.3. Sensibilité aux perturbations



Pour déterminer si un système est sensible aux perturbations, on détermine la FTBF du système en perturbation **en supposant que l'entrée est nulle**, notée ici $FTBF_p(p)$.

Pour déterminer $FTBF_p(p)$, on peut réorganiser le schéma bloc de sorte à mettre $P(p)$ à gauche, et supprimer $E(p)$:



Attention pour utiliser la formule de Black il faut les bons signes dans le comparateur !

Dans le schéma-bloc ci-dessus, on a :

$$\boxed{FTBF_p(p) = -C \times \frac{F_2(p)}{1 + F_1(p) \times F_2(p) \times B}}$$

On calcule ensuite l'erreur statique qui doit être nulle pour que le système soit insensible aux perturbations.

$$e_{rs} = \lim_{t \to +\infty} e_r(t) = \lim_{t \to +\infty} - \mathrm{s(t)} = \lim_{p \to 0} - \mathrm{pS(p)}$$

$$e_{rs} = \lim_{p \to 0} - \mathrm{pFTBF}_p(\mathrm{p}) \times \mathrm{P(p)}$$

Théorème de superposition :

Comme le système est linéaire, il vient :

$$S(p) = FTBF_c(p)E(p) + FTBF_p(p)P(p)$$

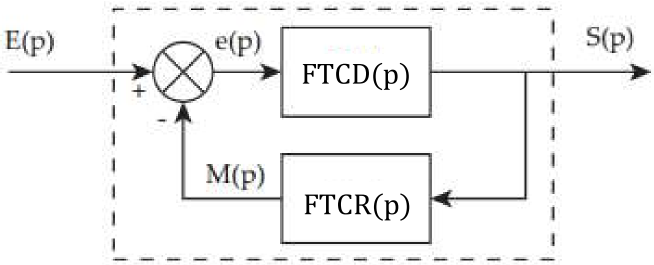
avec $FTBF_c(p)$ la fonction de transfert du système quand la perturbation est nulle.

2.4. Rapidité et dépassement

Dans le cas général, il n'est pas possible de caractériser la rapidité d'un système ou la présence de dépassements en connaissant uniquement sa fonction de transfert. Néanmoins, nous serons capables de les étudier directement à partir de la FTBF pour certaines fonctions de transfert particulières étudiées dans la prochaine séquence.

3. Précision par la fonction de transfert en boucle ouverte

3.1. Rappel FTBO sous forme canonique



$$\boxed{\boldsymbol{FTBO(p) = \frac{M(p)}{e(p)} = FTCD(p)FTCR(p)}}$$

De plus, sous forme canonique la FTBO s'écrit $FTBO = \dfrac{K_{BO}\,N(p)}{p^{\alpha_{BO}}D(p)}$

Avec $N(p)$ et $D(p)$ des polynômes quelconques avec $N(0) = D(0) = 1$. K_{BO} est le gain statique de la fonction de transfert, α_{BO} la classe du système.

3.2. Tableau erreur-classe-entrée (à connaitre)

Nous allons remplir le tableau suivant donnant la précision d'un système en fonction de la classe de sa FTBO et du type d'entrée. Par la suite il sera un résultat de cours et pourra être utiliser sans démonstration. Attention cela n'est valable que pour la **FTBO**.

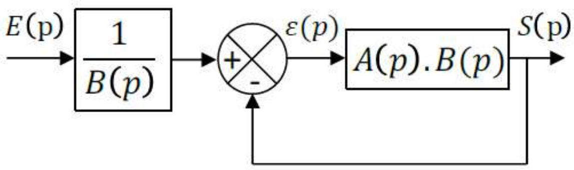
Classe α_{BO}	***Erreur statique ε_s*** **Pour $e(t) = E_0 u(t)$**	***Erreur de trainage ε_t*** **Pour $e(t) = V\,t\,u(t)$**	**Erreur en accélération ε_a** **Pour $e(t) = a\,t^2 u(t)$**
0	$\dfrac{E_0}{1+K_{BO}}$	∞	∞
1	0	$\dfrac{V}{K_{BO}}$	∞
2	0	0	$\dfrac{2a}{K_{BO}}$
3	0	0	0

3.3. Démonstrations

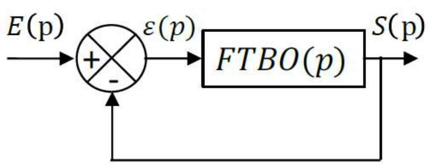
On a vu que :

$$e_{rs} = \lim_{p\to 0} \mathrm{pE(p)(1 - FTBF(p))}$$

On peut montrer que tout système peut se mettre sous forme d'un schéma-bloc à retour unitaire :



Ainsi, en s'intéressant uniquement à la boucle :



L'erreur devient alors :

$$e_{rs} = \lim_{p\to 0} \mathrm{pE(p)}\left(1 - \frac{\mathrm{FTBO(p)}}{1+\mathrm{FTBO(p)}}\right)$$

$$e_{rs} = \lim_{p\to 0} \mathrm{pE(p)}\left(\frac{1+\mathrm{FTBO(p)}-\mathrm{FTBO(p)}}{1+\mathrm{FTBO(p)}}\right)$$

$$e_{rs} = \lim_{p\to 0} \mathrm{pE(p)}\left(\frac{1}{1+\mathrm{FTBO(p)}}\right)$$

Or $FTBO(p) = \frac{K_{BO}\,N(p)}{p^{\alpha_{BO}}D(p)}$

D'où

$$e_{rs} = \lim_{p\to 0} \mathrm{pE(p)}\left(\frac{p^{\alpha_{BO}}D(p)}{p^{\alpha_{BO}}D(p)+K_{BO}N(p)}\right)$$

3.3.1. Erreur pour une entrée en échelon (première colonne)

Pour une entrée en échelon, la transformée de Laplace est :

$$E(p) = \mathcal{L}\big(E_0.u(t)\big) = \frac{E_0}{p}$$

Ainsi

$$e_{rs} = \lim_{p\to 0} \mathrm{p}\frac{E_0}{p}\left(\frac{p^{\alpha_{BO}}D(p)}{p^{\alpha_{BO}}D(p)+K_{BO}N(p)}\right)$$

$$e_{rs} = \lim_{p\to 0} E_0\left(\frac{p^{\alpha_{BO}}D(p)}{p^{\alpha_{BO}}D(p)+K_{BO}N(p)}\right)$$

$$e_{rs} = \lim_{p\to 0} \frac{E_0 p^{\alpha_{BO}}}{p^{\alpha_{BO}}+K_{BO}}$$

En fonction de la classe :

$$\begin{cases} e_{rs} = \frac{E_0}{1+K_{BO}} \text{ si } \alpha = 0 \\ e_{rs} = 0 \text{ si } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

3.3.2. Erreur pour une entrée en rampe (deuxième colonne)

Pour une entrée en rampe, la transformée de Laplace est :

$$E(p) = \mathcal{L}\big(V.t.u(t)\big) = \frac{V}{p^2}$$

Ainsi

$$e_{rs} = \lim_{p\to 0} \mathrm{p}\frac{V}{p^2}\left(\frac{p^{\alpha_{BO}}D(p)}{p^{\alpha_{BO}}D(p)+K_{BO}N(p)}\right)$$

$$e_{rs} = \lim_{p\to 0} \frac{V}{p}\left(\frac{p^{\alpha_{BO}}D(p)}{p^{\alpha_{BO}}D(p)+K_{BO}N(p)}\right)$$

$$e_{rs} = \lim_{p \to 0} \frac{V p^{\alpha_{BO}-1}}{p^{\alpha_{BO}} + K_{BO}}$$

En fonction de la classe :

$$\begin{cases} e_{rs} = \infty \text{ si } \alpha = 0 \\ e_{rs} = \dfrac{V}{K_{BO}} \text{ si } \alpha = 1 \\ e_{rs} = 0 \text{ si } \alpha \geq 2 \end{cases}$$

3.3.3. Erreur pour une entrée en accélération (troisième colonne)

Pour une entrée en rampe, la transformée de Laplace est :

$$E(p) = \mathcal{L}\big(a.t^2.u(t)\big) = \frac{2a}{p^3}$$

On montre de la même manière que :

$$\begin{cases} e_{rs} = \infty \text{ si } \alpha \leq 1 \\ e_{rs} = \dfrac{2a}{K_{BO}} \text{ si } \alpha = 2 \\ e_{rs} = 0 \text{ si } \alpha \geq 3 \end{cases}$$

3.4. Bilan

On remarque que la diagonale présente des valeurs définies pour les erreurs, la partie basse des erreurs nulles et la partie haute des erreurs infinies (système non stable).