Analyse temporelle des systèmes du premier ordre

Compétences

Modéliser :
- Modélisation des systèmes asservis

Résoudre :
- Performances d'un système asservi

Cette séquence est consacrée à l'analyse des réponses temporelles des systèmes simples (en particulier système du premier et du second ordre). Il s'agit de soumettre ces systèmes à des entrées types (souvent l'échelon) de façon à étudier les propriétés et les performances du système. L'objectif est de savoir relier les performances atteintes aux constantes caractéristiques des fonctions de transfert et évaluer leurs influences respectives.

1. Système proportionnel/intégrateur

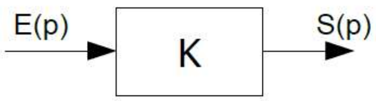
1.1. Système à action proportionnelle

La sortie est proportionnelle à l'entrée. On nomme également ces systèmes gain pur.

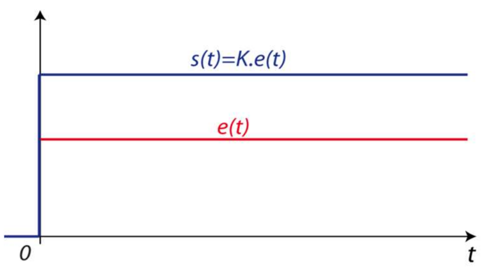
$$s(t) = K.e(t)$$

On appelle K le gain pur.

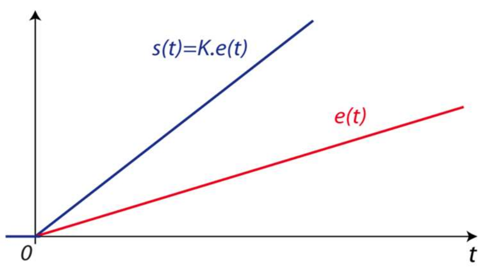
$$s(t) = K.e(t) \xrightarrow{L} S(p) = K.E(p) \quad \Rightarrow \quad H(p) = K$$



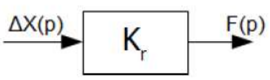
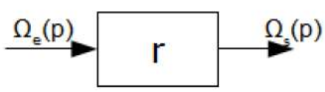
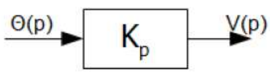
Réponse à un échelon



Réponse à une rampe

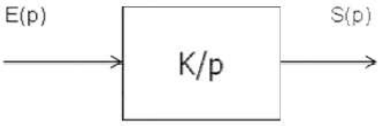


Exemples

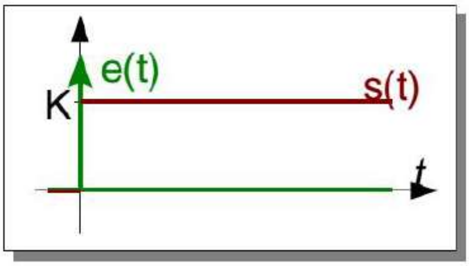
Ressort	Engrenage	Potentiomètre
		
$F(t) = K_r.\Delta x(t)$	$\omega_s(t) = r.\omega_e(t)$ avec $r = \frac{Z_e}{Z_s}$, et Z_i : nombre de dents	$v(t) = K_p.\theta(t)$
		

1.2. Système intégral

$$s(t)=\int K.e(t) \xrightarrow{L} S(p)=\frac{K}{p}.E(p) \quad \Rightarrow \quad H(p)=\frac{K}{p}$$

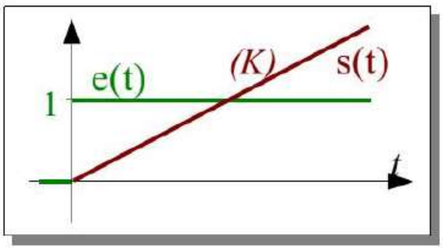


1.2.1. Réponse à une entrée impulsionnelle



Domaine temporel	Domaine de Laplace
$e(t)=\delta(t)$ →	$E(p)=1$
	$S(p)=H(p).E(p)$
$s(t)=K.u(t)$ ←	$S(p)=\frac{K}{p}$

1.2.2. Réponse à une entrée en échelon



Domaine temporel	Domaine de Laplace
$e(t)=u(t)$ →	$E(p)=\frac{1}{p}$
	$S(p)=H(p).E(p)$
$s(t)=K.t.u(t)$ ←	$S(p)=\frac{K}{p^2}$

2. Système du premier ordre

2.1. Définition

Le comportement d'un système du premier ordre est caractérisé par une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants :

$$s(t)+\tau\cdot\frac{ds(t)}{dt}=K.e(t)$$

On appelle K le gain statique et τ la constante de temps.

L'appellation « gain statique » est justifiée par le comportement statique du système : si l'entrée et la sortie sont constantes, l'équation différentielle devient $s+0=K.e$ d'où, en statique, $K=\frac{s}{e}$.

Si les conditions initiales sont nulles (Heaviside), la transformée de Laplace conduit à l'équation :

$$(1+\tau p)S(p)=K.E(p)$$

La fonction de transfert d'un système du premier ordre est donc :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$$

Remarque : Identifier une fonction de transfert du premier ordre revient alors à identifier K et τ.

2.2. Réponse à une entrée impulsionnelle

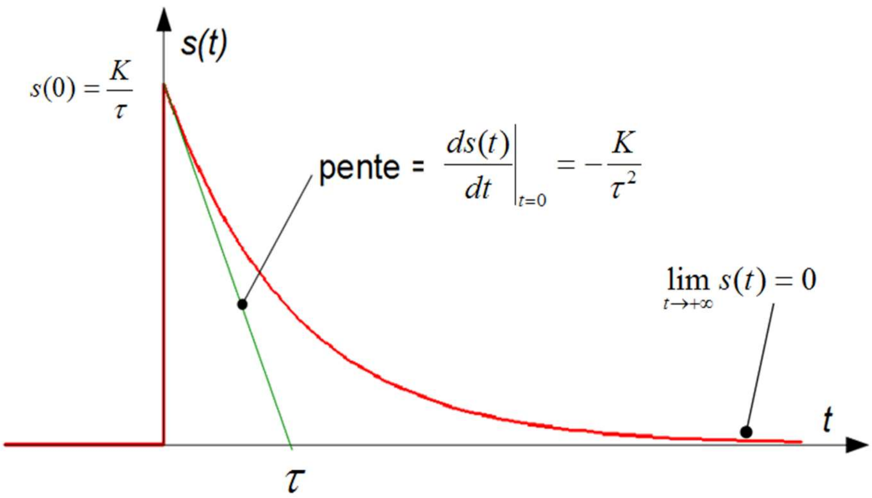
Soit, en entrée du système du premier ordre, la fonction Dirac $e(t) = \delta(t)$. La transformée de Laplace s'écrit $E(p) = 1$ et la sortie dans le domaine de Laplace devient :

$$S(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

La transformée de Laplace inverse de la sortie (pour revenir dans le domaine temporel) se fait à l'aide du tableau des transformées usuelles. La transformée de Laplace inverse est alors :

$$\boxed{s(t) = \frac{K}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}.u(t)}$$

Il s'agit d'une forme exponentielle convergente décroissante.



2.3. Réponse à une entrée en échelon (indicielle)

Soit, en entrée du système du premier ordre, la fonction échelon $e(t) = A.u(t)$. La transformée de Laplace s'écrit $E(p) = \frac{A}{p}$ et la sortie dans le domaine de Laplace devient :

$$S(p) = \frac{KA}{p(1 + \tau p)}$$

La transformée de Laplace inverse de la sortie (pour revenir dans le domaine temporel) se fait à l'aide du tableau des transformées usuelles. Il faut préalablement la décomposer en éléments simples pour faire apparaitre les éléments du tableau :

$$S(p) = \frac{KA}{p(1 + \tau p)} = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{(1 + \tau p)}$$

$$S(p) = \frac{\alpha(1 + \tau p) + \beta p}{p(1 + \tau p)} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = KA \\ \beta = -KA\tau \end{cases}$$

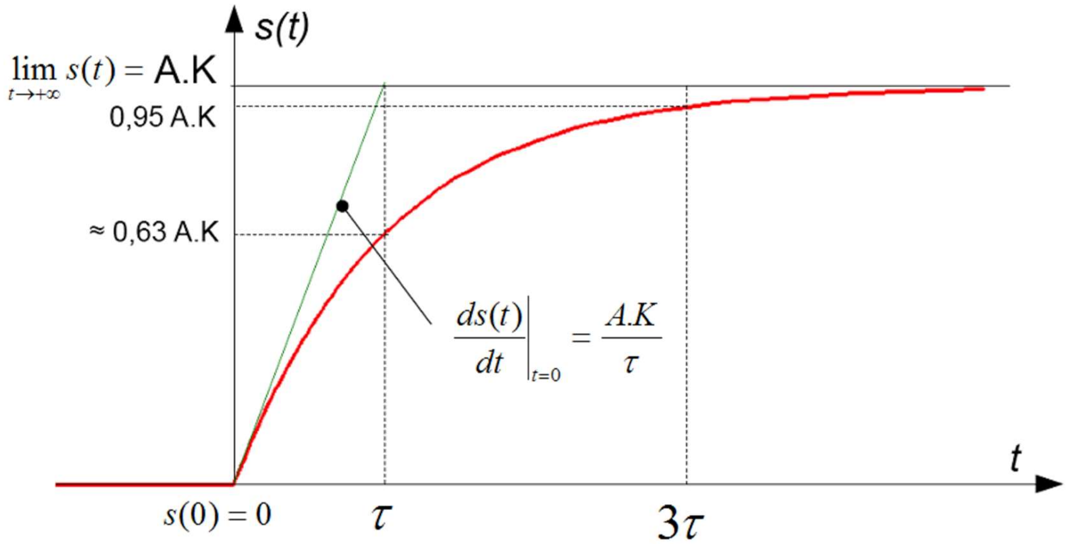
On obtient ainsi :

$$S(p) = KA\left(\frac{1}{p} - \frac{\tau}{1+\tau p}\right)$$

La transformée de Laplace inverse est alors :

$$\boxed{s(t) = KAu(t)\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$$

Il s'agit d'une forme exponentielle convergente.



- Asymptote pour $t \to +\infty$: $s(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} KA$ (réponse statique ou permanente)
- Valeur à l'origine : $s(0) = 0$
- Tangente à l'origine : $\frac{ds}{dt}(0) = \frac{KA}{\tau}$
- La tangente à l'origine $\left(y = \frac{KAt}{\tau}\right)$ coupe l'asymptote $(y = KA)$ en $t = \tau$

L'application numérique pour les valeurs particulières de t conduit à :

- En $t = \tau$, $s(\tau) = 0{,}63 \times KA$ soit 63% de la réponse permanente
- En $t = 3\tau$, $s(\tau) = 0{,}95 \times KA$ soit 95% de la réponse permanente

Pour un système du premier ordre, le temps de réponse à 5% caractérisant la rapidité du système est donc directement lié à τ et vaut 3τ.

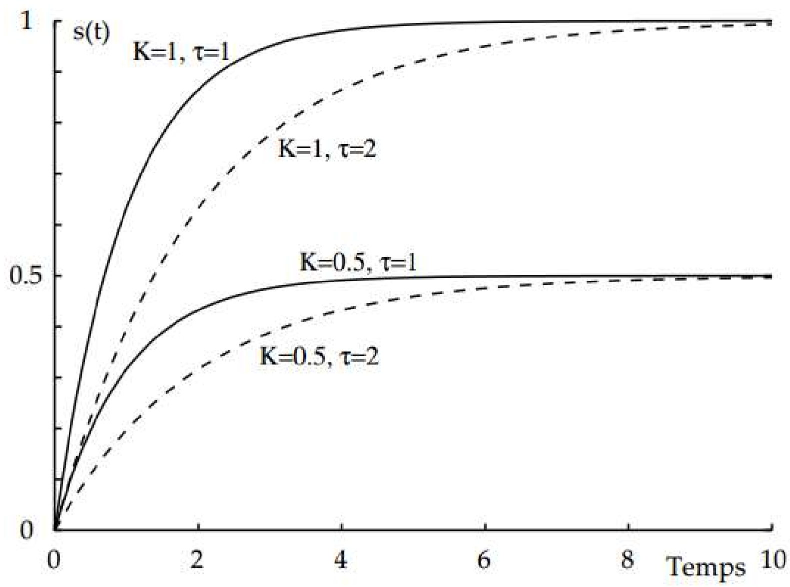
2.4. Performances du système

La réponse d'un système du 1er ordre est toujours non oscillante, la sortie d'un système du 1er ordre ne présente donc jamais de dépassements.

Si τ est positif, le système est stable. Dans ce cas, on peut déterminer la précision du système.

Si K=1, le système est précis par rapport à une entrée en échelon.

Le temps de réponse à 5% valant approximativement 3τ, plus τ est petit plus le système sera rapide.



2.5. Identification d'un modèle du premier ordre

L'identification de modèle consiste à proposer un modèle théorique à partir de la réponse d'un système à une entrée type, mesurée expérimentalement. Le modèle obtenu est appelé **modèle de comportement** puisqu'il traduit le comportement observé en sortie, sans se préoccuper du fonctionnement interne contrairement au **modèle de connaissance**. Ce dernier est celui obtenu grâce aux équations physiques décrivant le comportement d'un composant.

On pourra considérer que le système étudié est du premier ordre si sa tangente à l'origine est non nulle, qu'il ne présente pas d'oscillations et que l'allure de la réponse est celle d'une exponentielle.

Les paramètres caractéristiques K et τ peuvent alors être identifiés sur la courbe mesurée :

- K par l'intermédiaire de la valeur finale qui vaut KA.
- τ en utilisant :
  - la tangente à l'origine coupe l'asymptote en $t = \tau$,
  - le temps où la courbe atteint 63% de la valeur finale vaut τ,
  - le temps où la courbe atteint 95% de la valeur finale vaut 3τ.

2.6. Réponse à une entrée en pente

Soit, en entrée du système du premier ordre, la fonction échelon $e(t) = A.t.u(t)$. La transformée de Laplace s'écrit $E(p) = \frac{A}{p^2}$ et la sortie dans le domaine de Laplace devient :

$$S(p) = \frac{KA}{p^2(1+\tau p)}$$

La transformée de Laplace inverse de la sortie (pour revenir dans le domaine temporel) se fait à l'aide du tableau des transformées usuelles. Il faut préalablement la décomposer en éléments simples pour faire apparaitre les éléments du tableau.

$$S(p) = \frac{KA}{p(1+\tau p)} = \frac{\alpha}{p^2} + \frac{\beta}{p} + \frac{\gamma}{(1+\tau p)}$$

$$S(p) = \frac{KA}{p(1+\tau p)} = \frac{\alpha(1+\tau p) + \beta p(1+\tau p) + \gamma p^2}{p^2(1+\tau p)} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = KA \\ \beta = -KA\tau \\ \gamma = KA\tau^2 \end{cases}$$

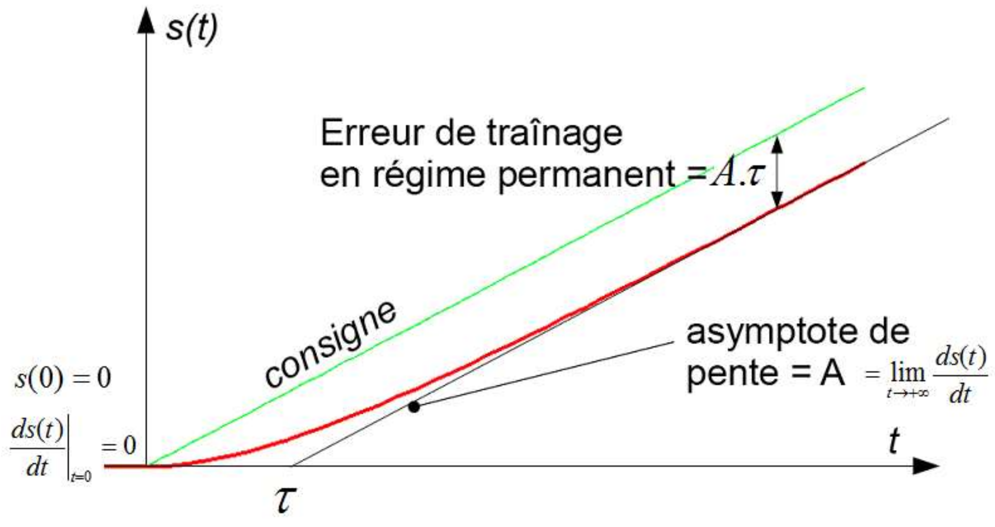
On obtient ainsi :

$$S(p) = KA\left(\frac{1}{p^2} - \frac{\tau}{p} + \frac{\tau^2}{1+\tau p}\right)$$

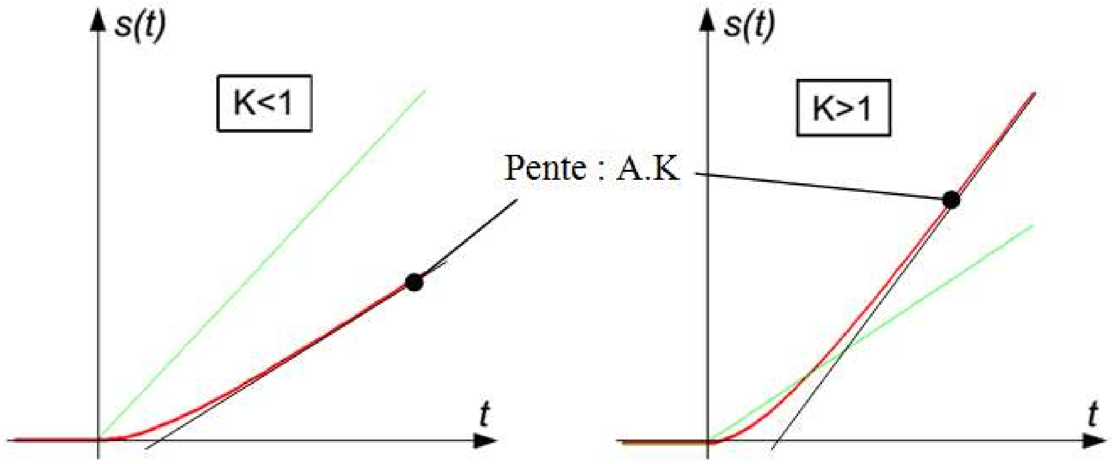
La transformée de Laplace inverse est alors :

$$\boxed{s(t) = KAu(t)\left(t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$$

Dans le cas ou K vaut 1 :



Dans les autres cas :



- Asymptote pour $t \to +\infty$: $s(t)$ suit une asymptote de pente KA
- Valeur à l'origine : $s(0) = 0$
- Tangente à l'origine : $\frac{ds}{dt}(0) = 0$
- L'asymptote coupe l'axe des abscisses en $t = \tau$
- Dans le cas où K=1, l'erreur de trainage vaut $\varepsilon_t = \lim_{t \to +\infty} |e(t) - s(t)| = A\tau$

Pour un système du premier ordre, la réponse à une pente est stable mais pas précise.