



# Correction DS 3 - SI

---

## Consignes

- Copies propres et bien présentées: encadrer vos résultats, souligner les applications numériques (avec une règle bien sûr)...
- Uniquement la calculatrice est autorisée.
- Les exercices sont indépendants.

## Table des matières

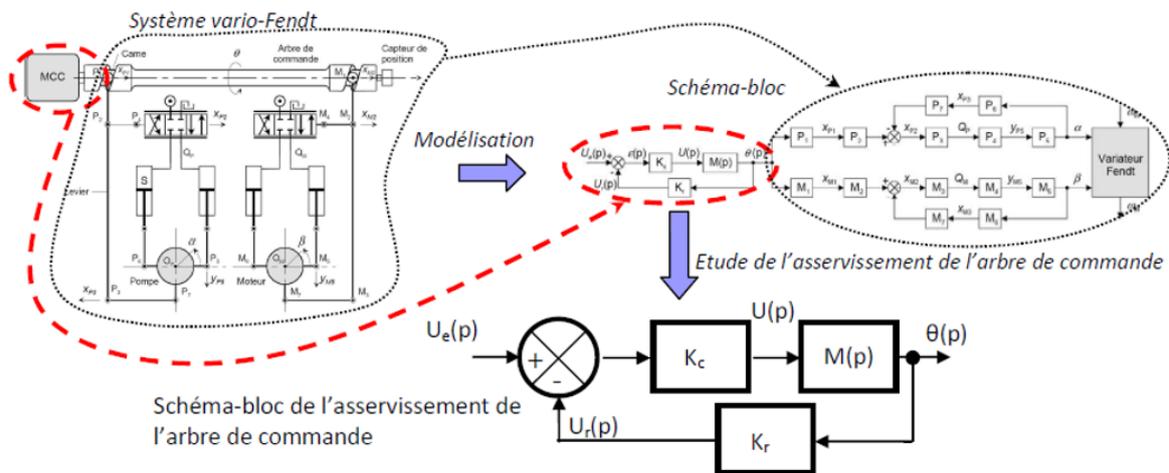
<b>1 Etude de l'asservissement de l'arbre de commande de transmission</b>	<b>2</b>
1.1 Introduction . . . . .	2
1.2 Première approche . . . . .	3
1.3 Amélioration de l'asservissement . . . . .	6
<b>2 Identification de liaison à partir de torseur</b>	<b>7</b>
2.1 Torseur cinématique . . . . .	7
2.2 Torseur statique . . . . .	8
<b>3 Antenne parabolique</b>	<b>9</b>

# 1. Etude de l'asservissement de l'arbre de commande de transmission

Inspiré de CCP MP 2008

## 1.1 Introduction

Le thème proposé concerne la transmission à variation continue développée par la société Fendt qui équipe les gammes de tracteurs "Fendt 300 Vario" à "Fendt 900 Vario". On s'intéresse ici plus particulièrement à l'asservissement de position de l'arbre de commande de cette transmission modélisé sur le schéma.



Sur un engin agricole, la transmission à variation continue remplace les fonctions de l'ensemble boîte de vitesse à commande manuelle + embrayage que l'on retrouve classiquement sur la plupart des voitures. On ne peut pas utiliser la solution boîte de vitesse à commande manuelle + embrayage car l'énergie cinétique d'un engin agricole n'est pas suffisante pour permettre le passage d'une vitesse (fonction de la boîte de vitesse) par désaccouplement de l'arbre moteur (fonction de l'embrayage) sans caler. La transmission à variation continue permet donc d'adapter de façon optimale la vitesse d'avancement du tracteur en fonction de ses conditions d'utilisation sans avoir à désaccoupler le moteur du reste de la chaîne de transmission de puissance. Pour commander le variateur, le conducteur dispose au sein de la cabine d'un joystick. Celui-ci permet d'agir sur l'inclinaison d'éléments hydrostatiques par l'intermédiaire d'un moteur à courant continu asservi en position entraînant un arbre de commande à came. On donne le modèle de connaissance de l'asservissement de l'arbre moteur du système

vario-Fendt :

$$u(t) = Ri(t) + K_e \frac{d\theta(t)}{dt}$$

$$J_e \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = K_a i(t)$$

Avec :

- $u(t)$  la tension appliquée aux bornes du moteur ;
- $i(t)$  le courant induit ;
- $R$  la résistance de l'induit avec  $R = 2\Omega$  ;
- $J_e$  l'inertie de l'arbre de commande avec  $J_e = 6,25.10^{-4}kg.m^2$  ;
- $K_e$  la constante de force contre électromotrice avec  $K_e = 0,05V.s/rad$  ;
- $K_a$  la constante de couple avec  $K_a = 0,05Nm/A$ .

On utilisera les notations et les données suivantes :

- $K_c$  le gain du correcteur à action proportionnelle ;
- $K_r = 2V/rad$  le gain du capteur de position monté sur l'arbre de commande ;
- $M(p)$  fonction de transfert du moteur.

On donne un extrait du cahier des charges :

Exigences	Critères	Niveaux
Le système doit permettre l'asservissement en position de l'arbre de commande du système Vario-Fendt	Temps de réponse pour une entrée en échelon	<1 s

## 1.2 Première approche

**Question 1:** Déterminer la fonction de transfert du moteur électrique  $M(p) = \frac{\theta(p)}{U(p)}$  et montrer qu'elle peut se mettre sous forme canonique  $M(p) = \frac{K_m}{p(1 + \tau_m p)}$ . Donner ainsi les expressions de  $K_m$  et  $\tau_m$ . Faire les applications numériques.

**Réponse 1:** On considère les conditions de Heaviside respectées et on exprime les équations dans le domaine de Laplace :

$$U(p) = RI(p) + K_e p \theta(p) \quad (1)$$

$$J_e p^2 \theta(p) = K_a I(p) \quad (2)$$

Par substitution de  $I(p)$  de (2) dans (1), il vient :

$$U(p) = R \frac{J_e p^2 \theta(p)}{K_a} + K_e p \theta(p)$$

Il reste à isoler  $\frac{\theta(p)}{U(p)} = M(p)$  et il vient :  $M(p) = \frac{K_a}{RJ_e p^2 + K_a K_e p}$  soit

$$M(p) = \frac{1}{K_e} \frac{1}{p \left[ \frac{RJ_e}{K_a K_e} p + 1 \right]}$$

On identifie :  $K_m = \frac{1}{K_e} \approx 20 \text{ rad/s.V}$  et  $\tau_m = \frac{RJ_e}{K_a K_e} \approx 0,5 \text{ s}$ .

**Question 2:** Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte  $T(p)$  du système et en déduire l'expression du gain en boucle ouverte  $K_{BO}$ .

**Réponse 2:**  $T(p) = \frac{K_c K_m K_r}{p(\tau_m p + 1)}$  avec  $K_{BO} = K_c K_m K_r$ .

**Question 3:** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée  $F(p)$  et montrer qu'elle peut se mettre sous la forme d'un système du second ordre :

$$F(p) = \frac{K_{BF}}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2}$$

Donner les expressions de  $K_{BF}$ ,  $\xi$  et  $\omega_0$  en fonction de  $K_{BO}$  et  $\tau_m$ .

**Réponse 3:** D'après la formule de Black :

$$F(p) = \frac{K_c K_m}{p(\tau_m p + 1)} \frac{1}{1 + \frac{K_c K_m K_r}{p(\tau_m p + 1)}} = \frac{K_c K_m}{\tau_m p^2 + p + K_c K_m K_r}$$

$$\text{Soit : } F(p) = \frac{1}{K_r} \frac{1}{1 + \frac{1}{K_{BO}} p + \frac{\tau_m}{K_{BO}} p^2}$$

On identifie  $K_{BF} = \frac{1}{K_r}$  et  $\omega_0 = \sqrt{\frac{K_{BO}}{\tau_m}}$  et on déduit  $\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\tau_m K_{BO}}}$ .

**Question 4:** Déterminer la valeur du gain de boucle ouverte  $K_{BO}$  de telle sorte que la réponse à une entrée de type échelon soit la plus rapide possible sans produire de dépassement. En déduire la valeur du gain  $K_c$  de l'action proportionnelle du correcteur.

**Réponse 4:** Une réponse à une entrée échelon la plus rapide possible sans produire de dépassement est atteinte pour  $\xi = 1$ . D'après l'expression de  $\xi$  précédente, on en déduit  $K_{BO} = \frac{1}{4\tau_m} \approx 0,5s^{-1}$ . Or  $K_{BO} = K_c K_m K_r$ , d'où

$$K_c = \frac{1}{4\tau_m K_m K_r} \approx 0,0125 \text{ (sans dimension)}.$$

**Question 5:** Montrer qu'avec la valeur de  $K_c$  choisie précédemment, la fonction de transfert en boucle fermée peut se mettre sous la forme  $F(p) = \frac{K_{BF}}{(1+pT)^2}$ . Calculer  $K_{BF}$  et  $T$ .

**Réponse 5:** Avec  $\xi = 1$ ,  $F(p)$  devient :  $F(p) = \frac{K_{BF}}{1 + \frac{2}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2}$ .

Le discriminant du polynôme est  $\Delta = \frac{4}{\omega_0^2} - \frac{4}{\omega_0^2} = 0$ . Le polynôme admet une racine double qui vaut  $-\omega_0$ .

Il vient donc  $F(p) = \frac{K_{BF}}{\left(1 + \frac{1}{\omega_0}p\right)^2}$  avec  $K_{BF} = \frac{1}{K_r}$  et  $T = \frac{1}{\omega_0}$

AN :  $K_{BF} = 0,5rad/V$  et  $T = 1s$ .

**Question 6:** La figure1 montre la réponse temporelle du moteur à un échelon d'amplitude 2V. Déterminer graphiquement le temps de réponse à 5% du système.

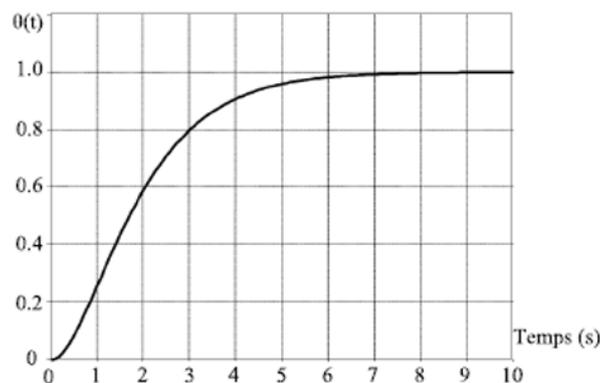


FIGURE 1 – Réponse temporelle du moteur à un échelon d'amplitude 2V.

**Réponse 6:** La valeur finale vaut 1°, le temps de réponse 5% est le temps pour lequel la valeur finale est atteinte  $\pm 5\%$ . Graphiquement, cette valeur est atteinte pour environ 5s, d'où  $t_{5\%} = 5s$ .

**Question 7:** Conclure quant à l'exigence de rapidité du cahier des charges.

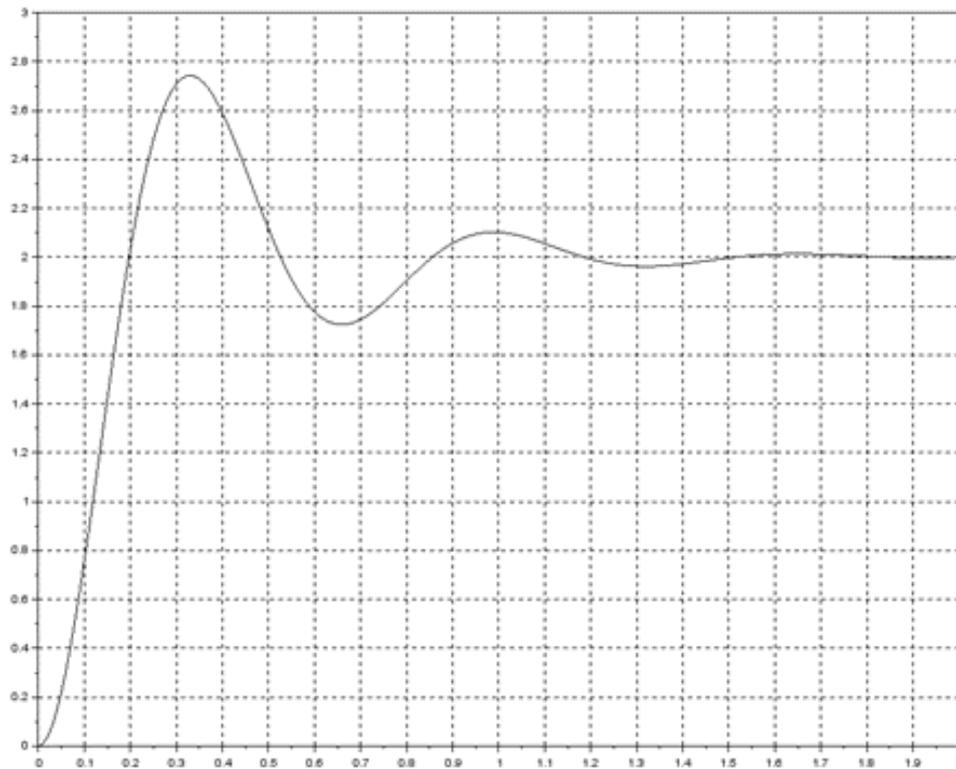


FIGURE 2 – Réponse temporelle du moteur (en seconde) à un échelon d'amplitude 2V avec correction.

**Réponse 7:** Le cahier des charges exige un temps de réponse inférieur à 1s, or  $5s > 1s$ , donc le cahier des charges n'est pas satisfait.

### 1.3 Amélioration de l'asservissement

Afin d'améliorer les performances, des modifications ont été apportées à l'asservissement. La figure 2 montre la réponse temporelle (en seconde) du moteur à un échelon d'amplitude 2V après modification.

**Question 8:** Préciser l'ordre de la fonction de transfert du système, en justifiant.

**Réponse 8:** La fonction de transfert est d'ordre 2 car la pente à l'origine est nulle et il y a des oscillations et des dépassements (un seul argument suffisant).

**Question 9:** Déterminer graphiquement, en utilisant l'abaque fournit la valeur du coefficient d'amortissement  $\xi$ .

**Réponse 9:** La sortie converge vers  $2^\circ$ . Le premier dépassement vaut  $D_1 = \frac{2,75 - 2}{2} = 0,375$  (attention, toujours **dépassement relatif**). D'après l'abaque  $\xi = 0,3$ .

**Question 10:** Déterminer mathématiquement la valeur du coefficient d'amortissement

en utilisant la formule  $D_n = e^{-\frac{n\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$ , où  $D_n$  correspond à la valeur du  $n$ -ième dépassement. Faites le calcul pour deux dépassements différents.

**Réponse 10:** On a  $D_1 = 37,5\%$  et  $D_2 = 13,5\%$ . Déterminons  $\xi$  :

$$D_n = e^{-\frac{n\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \iff \ln(D_n) = -\frac{n\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\iff \ln(D_n)\sqrt{1-\xi^2} = -n\pi\xi \implies \ln(D_n)^2 - \ln(D_n)^2\xi^2 = n^2\pi^2\xi^2$$

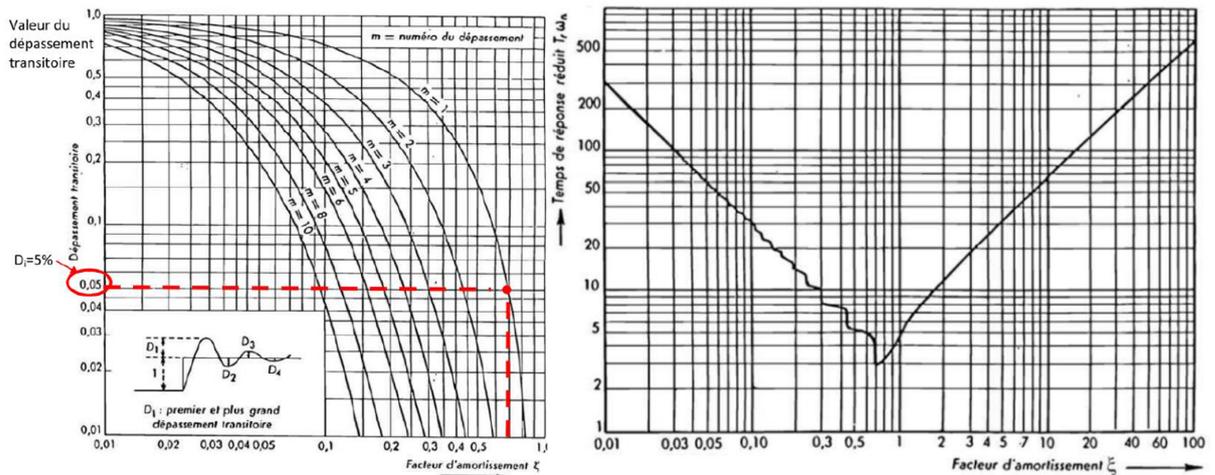
Soit  $\xi = \sqrt{\frac{\ln(D_n)^2}{\ln(D_n)^2 + n^2\pi^2}}$ . D'où  $\xi_{D_1} = 0,298$  et  $\xi_{D_2} = 0,304$ .

**Question 11:** A partir de la formule  $T_p = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$ , où  $T_p$  est la pseudo période, déterminer la pulsation propre non amortie  $\omega_0$ .

**Réponse 11:** Graphiquement,  $T_p = 0,65s$ , d'où  $\omega_0 = 10rad/s$ .

**Question 12:** Déterminer en utilisant l'abaque fournit la valeur du temps de réponse à 5%.

**Réponse 12:** Graphiquement,  $t_{5\%} = 1,07s$



## 2. Identification de liaison à partir de torseur

### 2.1 Torseur cinématique

**Question 13:** Identifier les liaisons correspondantes et représenter leur symbolisations normalisées planes et spatiales.

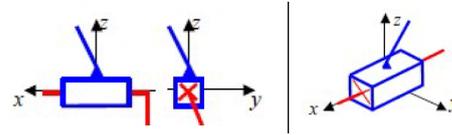
$$(a) \{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & V_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

$$(b) \{V_{3/2}\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{(B, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

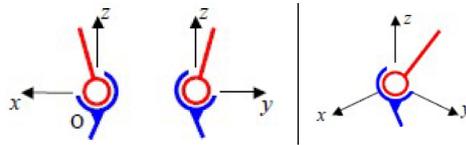
$$(c) \{V_{4/3}\} = \begin{pmatrix} \omega_x & 0 \\ \omega_y & V_y \\ \omega_z & 0 \end{pmatrix}_{(C, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

**Réponse 13:** Il *suffit* de se rappeler du tableau, ou de les retrouver (les points et vecteurs des figures peuvent ne pas correspondre) :

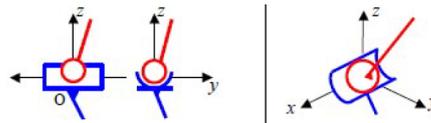
(a) Liaison glissière ( $A, \vec{x}$ )



(b) Liaison rotule ou sphérique ou sphère-sphère ( $B$ )



(c) Liaison linéaire annulaire ou sphère-cylindre ( $C, \vec{y}$ )



## 2.2 Torseur statique

**Question 14:** Identifier les liaisons correspondantes et représenter leur symbolisations normalisées planes et spatiales.

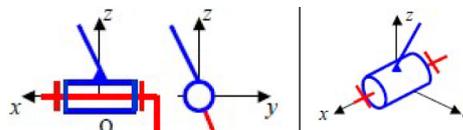
$$(a) \{T_{5 \rightarrow 4}\} = \begin{pmatrix} F_x & M_x \\ F_y & 0 \\ F_z & M_z \end{pmatrix}_{(D, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

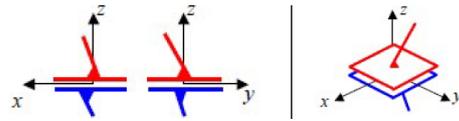
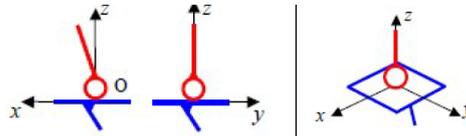
$$(b) \{T_{6 \rightarrow 5}\} = \begin{pmatrix} F_x & 0 \\ 0 & M_y \\ 0 & M_z \end{pmatrix}_{(E, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

$$(c) \{T_{7 \rightarrow 6}\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ F_z & 0 \end{pmatrix}_{(F, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

**Réponse 14:** Il *suffit* aussi de se rappeler du tableau, ou de les retrouver (les points et vecteurs des figures peuvent ne pas correspondre) :

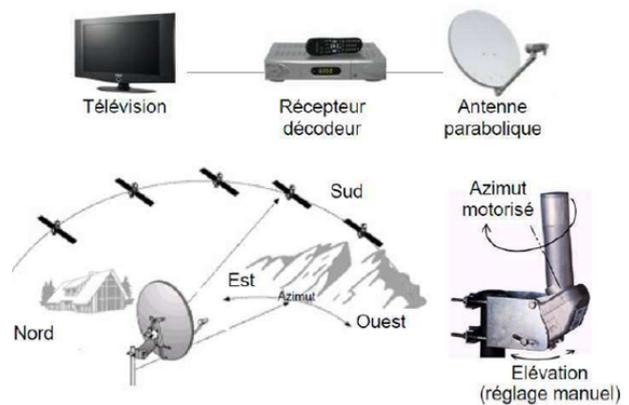
(a) Liaison pivot ( $D, \vec{y}$ )



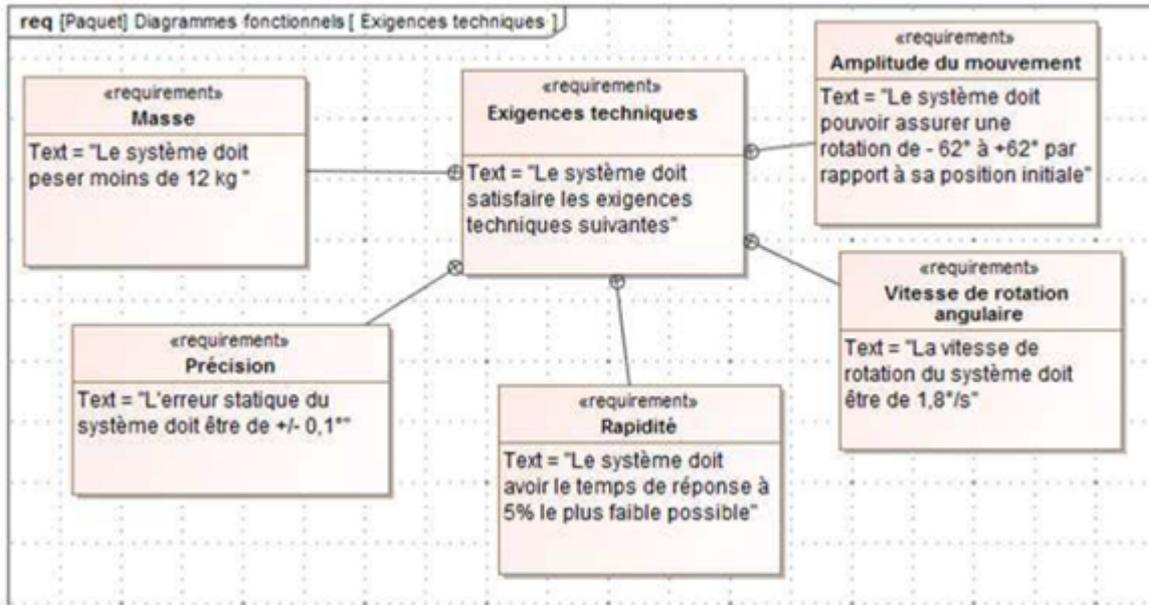
(b) Liaison appui plan ou plan-plan ( $E, \vec{x}$ )(c) Liaison ponctuelle ou sphère-plan ( $F, \vec{z}$ )

### 3. Antenne parabolique

La réception de chaînes de télévision par satellite nécessite un récepteur/décodeur et une antenne parabolique. Pour augmenter le nombre de chaînes reçues, l'antenne doit pouvoir s'orienter vers un ou plusieurs satellites différents. Le satellite choisi dépend de la chaîne demandée. Tous les satellites de radiodiffusion sont situés sur l'orbite géostationnaire à 36 000 km au dessus de l'équateur. Le réglage de l'orientation de l'antenne ne nécessite donc qu'une seule rotation autour d'un axe appelé axe d'azimut.



On donne une description structurelle du système ainsi qu'un extrait partiel de cahier des charges fonctionnel.



L'axe d'orientation d'azimut utilise un dispositif de réduction de vitesse (engrenages et roue-et-vis-sans-fin). Si on note  $\omega_a(t)$  la vitesse de rotation de l'axe de l'orientation et  $\omega_m(t)$  la vitesse de rotation du moteur, on a la relation suivante :

$$\frac{\omega_a(t)}{\omega_m(t)} = \frac{1}{N} = \frac{1}{23328}$$

On donne le modèle de connaissance du moteur à courant continu suivant :

$$u_m(t) = e_m(t) + Ri_m(t) + L \frac{di_m(t)}{dt} \quad e_m(t) = k_e \omega_m(t)$$

$$J \frac{d\omega_m(t)}{dt} = c_m(t) \quad c_m(t) = k_c i_m(t)$$

Avec :

$u_m(t)$  : tension aux bornes du moteur (en V)

$e_m(t)$  : force contre-électromotrice (en V)

$i_m(t)$  : intensité (en A)

$\omega_m(t)$  : vitesse de rotation du moteur (en rad/s)

$c_m(t)$  : couple moteur (en Nm)

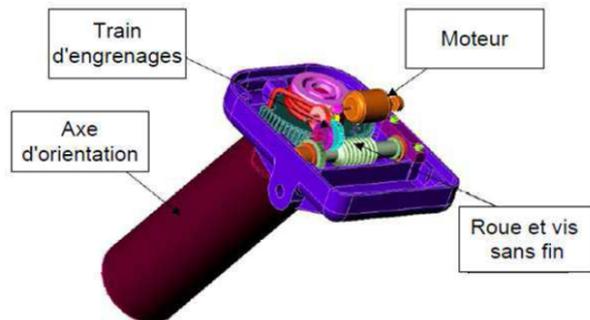
$J$  : inertie équivalente en rotation de l'arbre moteur (en kg.m<sup>2</sup>)

$R$  : résistance électrique du moteur (9,1 Ω)

$L$  : inductance du moteur (en H)

$K_e$  : constante de force contre-électromotrice (0.022Vs/rad)

$K_c$  : constante de couple (0.022Nm/A)

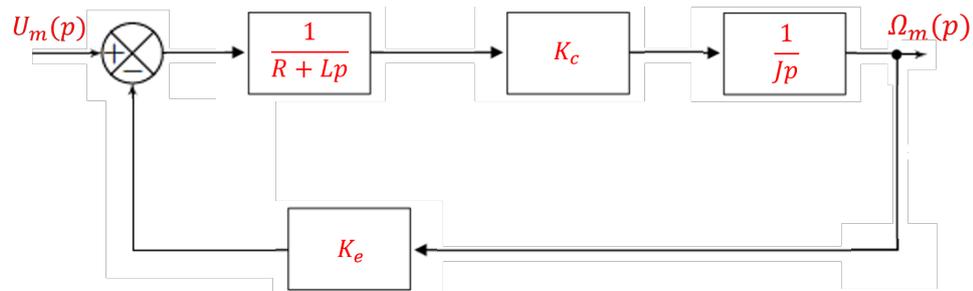


**Question 15:** Exprimer ces équations dans le domaine de Laplace, en considérant que les conditions de Heaviside sont respectées.

**Réponse 15:**  $U_m(p) = E_m(p) + RI_m(p) + LpI - m(p)$   
 $E_m(p) = k_e \Omega_m(p)$   
 $Jp\Omega_m(p) = C_m(p)$   
 $C_m(p) = k_c I_m(p)$

**Question 16:** Réaliser le schéma-bloc du moteur, l'entrée est  $U_m(p)$  et la sortie est  $\Omega_m(p)$ .

**Réponse 16:**



**Question 17:** Déterminer la fonction de transfert  $H(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)}$ . Mettre cette fonction sous forme canonique et donner son ordre et sa classe.

**Réponse 17:** Par une formule de Black on trouve

$$H(p) = \frac{K_c}{(R + Lp)Jp} \frac{1}{1 + \frac{K_c K_e}{(R + Lp)Jp}}$$

Soit sous forme canonique :

$$H(p) = \frac{1}{K_e} \frac{1}{1 + \frac{RJ}{K_c K_e} p + \frac{LJ}{K_c K_e} p^2}$$

On identifie une fonction d'ordre 2 et de classe 0.

On note  $\tau_e = \frac{L}{R}$  la constante de temps électrique du moteur et  $\tau_m = \frac{RJ}{K_e K_c}$ . On suppose que le temps d'établissement du courant est bien inférieur au temps de mise en mouvement des parties mécaniques, ce qui se traduit par  $\tau_e \ll \tau_m$ .

**Question 18:** Montrer que la fonction de transfert du moteur peut s'écrire

$$H(p) = \frac{K}{(1 + \tau_e p)(1 + \tau_m p)}. \text{ Donner l'expression de } K.$$

**Réponse 18:** Il est généralement plus simple de développer que de factoriser, alors :

$$H(p) = \frac{K}{1 + (\tau_m + \tau_e)p + \tau_m \tau_e p^2}, \text{ or } \tau_m \tau_e = \frac{L}{R} \frac{RJ}{K_e K_c} = \frac{LJ}{K_e K_c}.$$

De plus  $\tau_m + \tau_e \simeq \tau_m = \frac{RJ}{K_e K_c}$  car  $\tau_e \ll \tau_m$ .

Le polynôme en  $p$  est donc identifié, en notant  $K = \frac{1}{K_e}$ , on peut écrire

$$H(p) = \frac{K}{(1 + \tau_e p)(1 + \tau_m p)}$$

Grâce à la propriété  $\tau_e \ll \tau_m$ , on admet la simplification  $H(p) = \frac{K}{(1 + \tau_m p)}$ .

**Question 19:** En sollicitant le système par une entrée en échelon de valeur  $U_0$ , déterminer l'expression analytique de  $\omega(t)$  en fonction de  $K$ ,  $\tau_m$  et  $U_0$ .

**Réponse 19:** Comme  $\tau_e \ll \tau_m$ , on peut faire l'approximation  $H(p) = \frac{K}{1 + \tau_m p}$

$$\text{On a } \Omega_m(p) = U_m(p)H(p) = \frac{U_0}{p} \frac{K}{1 + \tau_m p}$$

Une décomposition en éléments simples donne :

$$\Omega_m(p) = \frac{U_0 K}{p} + \frac{-U_0 K \tau_m}{1 + \tau_m p} \text{ soit } \Omega_m(p) = \frac{U_0 K}{p} - \frac{U_0 K}{\frac{1}{\tau_m} + p}$$

Par la transformée inverse de Laplace, il vient :

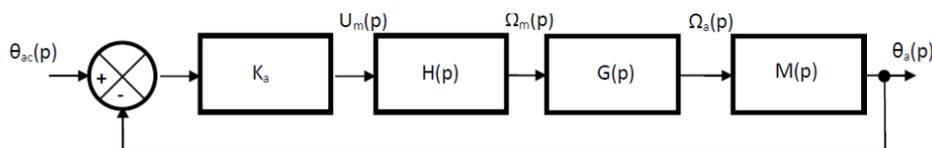
$$\omega(t) = u_0 K u(t) \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_m}} \right).$$

Indépendamment des résultats précédents, on considère pour la suite  $\tau_m = 0.012s$  et  $K = 45 \text{rad.s}^{-1}.V^{-1}$ . La tension nominale d'utilisation est  $U_0 = 18V$ .

**Question 20:** Montrer que le moteur n'excède pas sa valeur limite de rotation de 8000tr/min.

**Réponse 20:** D'après l'expression précédente :  $\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = K U_0$  soit  $\omega(t) = 810 \text{rad/s} \approx 7735 \text{tr/min}$ . Ce qui est effectivement inférieur à 8000tr/min.

La chaîne d'asservissement complète est donnée sur le schéma-bloc suivant, où  $\theta_{ac}$  est l'angle consigne,  $\theta_a$  l'angle réel de l'antenne défini par  $\frac{d\theta_a(t)}{dt} = \omega_a(t)$  et  $K_a$  un gain pur constant.



**Question 21:** Déterminer l'expression de  $G(p)$  et  $M(p)$ .

**Réponse 21:** L'énoncé donne  $\frac{\omega_a(t)}{\omega_m(t)} = \frac{1}{N}$  soit  $\Omega_a(p) = \frac{1}{N} \Omega_m(p)$  d'où  $G(p) = \frac{1}{N}$ .

Comme  $\frac{d\theta_a(t)}{dt} = \omega_a(t)$ , il vient dans le domaine de Laplace  $p\theta_a(p) = \Omega_a(p)$  soit  $M(p) = \frac{1}{p}$ .

**Question 22:** Déterminer la fonction de transfert  $F(p) = \frac{\theta_a(p)}{\theta_{ac}(p)}$ . L'écrire sous forme canonique, déterminer son ordre et son gain. Exprimer les expression du coefficient d'amortissement  $\xi$  et de la pulsation propre amortie  $\omega_0$ .

**Réponse 22:** Par une formule de Black il vient :

$$F(p) = \frac{K_a K}{Np(1 + \tau_m p)} \frac{1}{1 + \frac{K_a K}{Np(1 + \tau_m p)}} = \frac{K_a K}{Np(1 + \tau_m p) + K_a K}.$$

Soit sous forme canonique :

$$F(p) = \frac{1}{1 + \frac{N}{K_a K} p + \frac{N \tau_m}{K_a K} p^2}.$$

On identifie une fonction d'ordre 2 et de classe 0 ainsi que

$$\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{N}{K_a K \tau_m}} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{K_a K}{\tau_m N}}.$$

**Question 23:** Montrer que le système vérifie le critère d'écart de positionnement du cahier des charges.

**Réponse 23:** Le système est du second ordre et son gain vaut  $K = 1$ , on sait alors que le système est précis.

**Question 24:** Déterminer  $K_a$  pour que le système puisse satisfaire le critère de rapidité du cahier des charges.

**Réponse 24:** L'exigence liée à la rapidité stipule un temps de réponse à 5% le plus faible possible. Pour un système du second ordre, on sait que cela revient à un taux d'amortissement  $\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . En reprenant l'expression de  $\xi$ , il vient :

$$K_a = \frac{N}{4\xi^2 K \tau_m} \simeq 22041 \text{ V/rad}.$$