Analyse temporelle des systèmes du second ordre

Compétences

Modéliser :
- Modélisation des systèmes asservis

Résoudre :
- Performances d'un système asservi

1. Système du second ordre

1.1. Définition

Le comportement d'un système du second ordre est caractérisé par une équation différentielle du second ordre à coefficients constants :

$$s(t) + \frac{2\xi}{\omega_0} \cdot \frac{ds(t)}{dt} + \frac{1}{{\omega_0}^2} \cdot \frac{d^2s(t)}{dt^2} = Ke(t)$$

On appelle K le gain statique, ξ le coefficient d'amortissement ($\xi > 0$) et ω_0 la pulsation propre non amortie ($\omega_0 > 0$). ξ est parfois noté ε ou z.

Si les conditions de Heaviside sont respectées, la transformée de Laplace conduit à l'équation :

$$\left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{{\omega_0}^2}\right) S(p) = K.E(p)$$

La fonction de transfert du second ordre est donc :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{{\omega_0}^2}}$$

1.2. Réponse indicielle

Soit en entrée du système du premier ordre la fonction échelon $e(t) = A.u(t)$. La transformée de Laplace s'écrit $E(p) = \frac{A}{p}$ et la sortie dans le domaine de Laplace devient :

$$S(p) = \frac{KA}{p\left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{{\omega_0}^2}\right)} = \frac{KA{\omega_0}^2}{p({\omega_0}^2 + 2\omega_0\xi\, p + p^2)}$$

La transformée de Laplace inverse de la sortie (pour revenir au domaine temporel) se fait à l'aide du tableau des transformées usuelles. La décomposition en éléments simples passe en premier lieu par la **recherche des pôles.** On trouve comme pôles 0 et les racines du polynôme du second degré qui dépendent du signe du discriminant $\Delta = 4{\omega_0}^2(\xi^2 - 1)$

On distingue alors les trois cas suivants :

- Si l'amortissement est fort ($\xi > 1$) alors $\Delta > 0$ et il y a deux racines réelles :

$$p_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}$$

- Si l'amortissement est critique ($\xi = 1$) alors $\Delta = 0$ et le polynôme a une racine double :

$$p_{1,2} = -\omega_0 \ \text{car}\ \xi = 1$$

- Si l'amortissement est faible ($\xi < 1$) alors $\Delta < 0$ et les racines du polynôme sont complexes :

$$p_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm i.\omega_0\sqrt{1 - \xi^2}$$

On distingue alors ces trois cas.

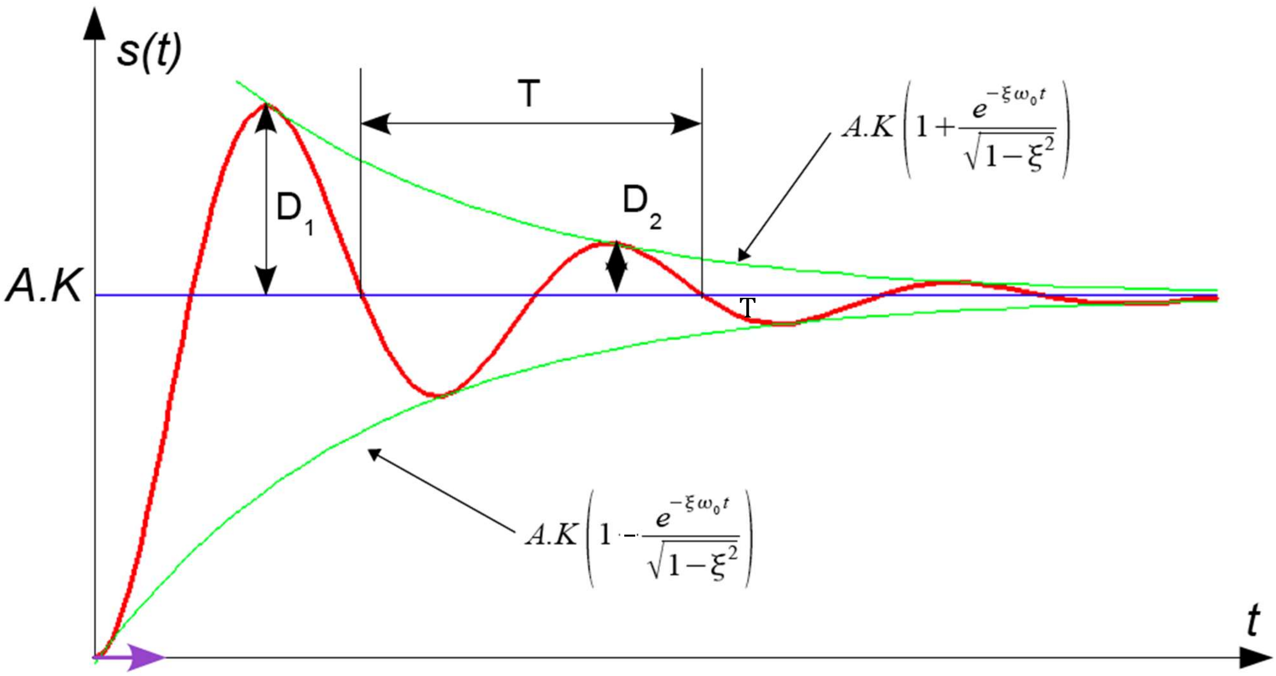
1.2.1. Amortissement faible : réponse oscillante amortie, régime pseudo-oscillant

Dans le cas où $\xi < 1$, on trouve deux racines complexes $p = -\xi\omega_0 \pm i.\omega_0\sqrt{1-\xi^2}$. Sachant que ξ et ω_0 sont positifs, on vérifie que les parties réelles sont négatives ce qui assure un comportement stable. La décomposition en éléments simples dans l'espace des réels conduits à :

$$S(p) = \frac{K.A.\omega_0^{\ 2}}{p(p-p_1)(p-p_2)}$$

Avec la démarche vue précédemment pour repasser dans le domaine temporel, on trouve :

$$s(t) = AK\left[1 - \frac{e^{-\omega_0\xi.t}}{\sqrt{1-\xi^2}}.sin\left(\omega_0\sqrt{1-\xi^2}t + arccos(\xi)\right)\right].u(t)$$



Propriétés de la réponse :

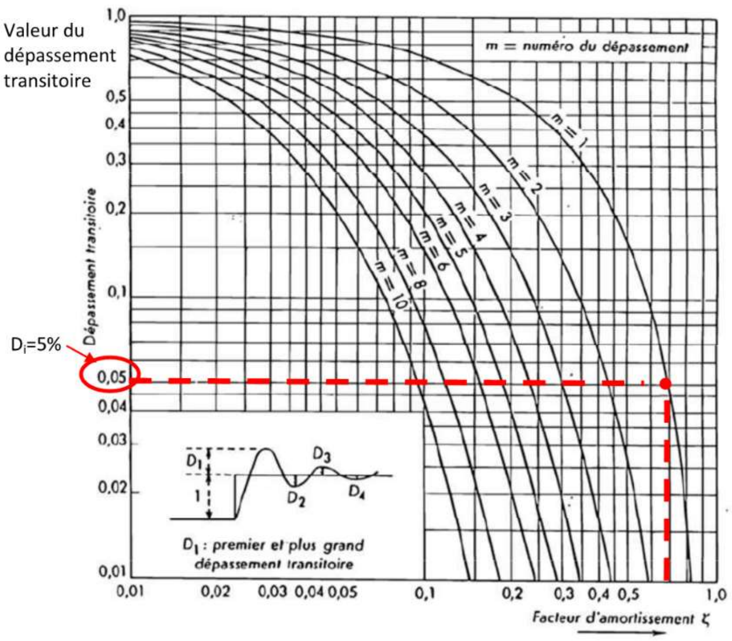
- Fonction oscillante (partie sinusoïdale) amortie (exponentielle décroissante)
- Pour $t \to +\infty$: $s(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} KA$ (réponse statique ou permanente)
- Valeur à l'origine : $s(0) = 0$
- **Tangente à l'origine horizontale :** $\boldsymbol{\frac{ds}{dt}(0) = 0}$
- On note $\omega_p = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$ la pseudo-pulsation qui conduit à la pseudo-période : $T = \frac{2\pi}{\omega_p}$
- Plus ξ est faible, plus les dépassements seront importants

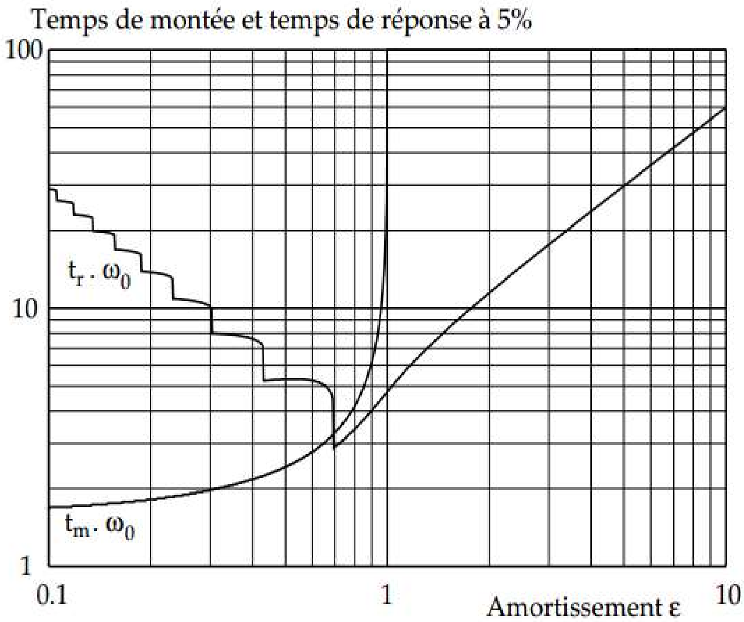
Grâce aux formules suivantes (qui ne sont pas toutes à connaître par cœur), il est possible d'identifier les paramètres caractéristiques du second ordre à l'aide de la réponse temporelle à un échelon.

Dépassement k (pourcentage)	$D_k = \exp\left(\frac{-k\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$
Amortissement (en fonction de D_k)	$\xi = \left(1 + \frac{k^2\pi^2}{\ln^2 D_k}\right)^{-\frac{1}{2}}$
Pseudo-pulsation	$\omega_p = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$
Pseudo-période	$T = \frac{2\pi}{\omega_p} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$
Temps de réponse à $x\%$ pour $\xi \ll 1$	$t_{x\%} = \frac{1}{\xi\omega_0}\log\left(\frac{100}{x}\right)$

__Identification à partir d'un relevé expérimental :__

A partir des fonctions précédentes, on peut obtenir les abaques suivants :





A partir d'une courbe expérimentale, on peut retrouver les différents paramètres dans l'ordre suivant :

- Calcul du gain K à l'aide de la valeur finale ;
- Calcul de l'amortissement ξ à l'aide du premier dépassement en utilisant l'abaque 1 ;
- Calcul de la pulsation propre ω_0 à l'aide de la période des oscillations ou de l'abaque 2.

1.2.1. Amortissement fort : réponse amortie, régime apériodique

Dans le cas où $\xi > 1$, on trouve deux racines réelles $p = -\xi\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}$. Comme précédemment, ξ et ω_0 sont positifs, on vérifie que les parties réelles sont négatives ce qui assure un comportement stable. La décomposition en éléments simples dans l'espace des réels conduits à :

$$S(p) = \frac{K.A.{\omega_0}^2}{p(p-p_1)(p-p_2)}$$

On pose $p_1 = -\frac{1}{\tau_1}$ et $p_2 = -\frac{1}{\tau_2}$, ainsi $H(p)$ peut s'exprimer comme le produit de deux premiers ordres. Ainsi :

$$S(p) = \frac{K.A}{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$$

La réponse temporelle se calcule par la décomposition en éléments simples.

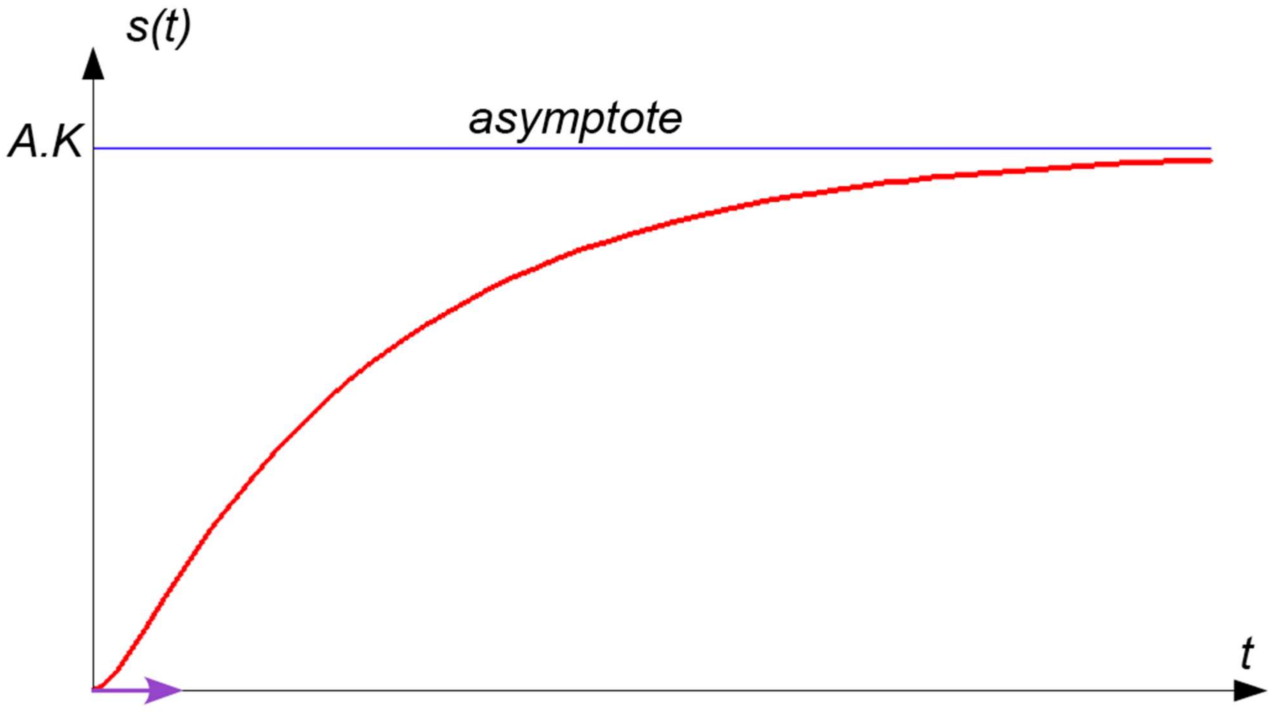
$$S(p) = K.A.\left[\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{1+\tau_1 p} + \frac{\gamma}{1+\tau_2 p}\right]$$

Après réduction au même dénominateur puis identification des coefficients du polynôme, on trouve :

$$S(p) = \frac{K.A}{p} + \frac{K.A}{\tau_2 - \tau_1}\left[\tau_1 \frac{1}{p+\frac{1}{\tau_1}} - \tau_2 \frac{1}{p+\frac{1}{\tau_2}}\right]$$

D'où la réponse temporelle :

$$s(t) = K.A.u(t)\left[1 + \frac{1}{\tau_2 - \tau_1}\left(\tau_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \tau_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right)\right]$$



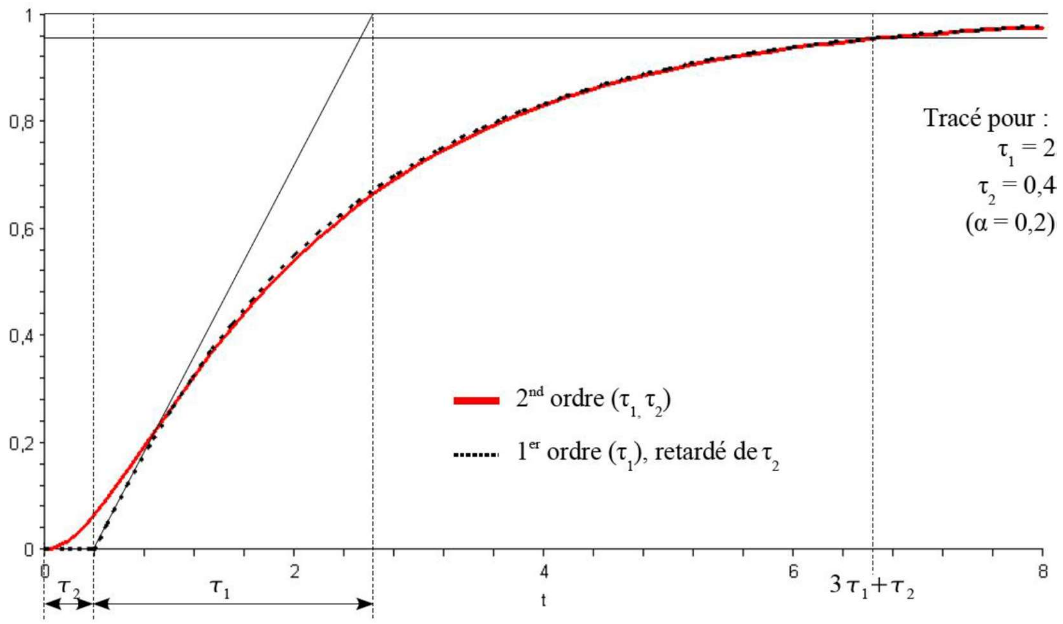
Propriétés de la réponse :

- Fonction croissante de t sur $\mathbb{R}^+$
- Asymptote pour $t \to +\infty$: $s(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} KA$ (réponse statique ou permanente)
- Valeur à l'origine : $s(0) = 0$
- **Tangente à l'origine horizontale :** $\boldsymbol{\frac{ds}{dt}(0) = 0}$

<u>Identification à partir d'un relevé expérimental :</u>

$$H(p) = \frac{K}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$$

Si τ_1 et τ_2 sont assez éloignés, le comportement du système s'apparente à un premier ordre de constante de temps τ_1 retardé de τ_2 .



Et si on a τ_1 et τ_2, on peut retrouver ξ *et* ω_0 :

$$\begin{cases} \tau_1 + \tau_2 = \dfrac{2\xi}{\omega_0} \\ \tau_2\tau_1 = \dfrac{1}{{\omega_0}^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi = \dfrac{\tau_1+\tau_2}{2\sqrt{\tau_2\tau_1}} \\ \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\tau_2\tau_1}} \end{cases}$$

1.2.1. Amortissement critique : réponse amortie, régime apériodique critique

Dans le cas où $\xi = 1$, on trouve une racine double $p = -\omega_0$. Cette valeur étant strictement négative, le système est stable et la réponse temporelle se calcule par la décomposition en éléments simples.

$$S(p) = \frac{K.A.{\omega_0}^2}{p(p^2 + 2.\omega_0 p + {\omega_0}^2)} = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{p+\omega_0} + \frac{\gamma}{(p+\omega_0)^2}$$

Après réduction au même dénominateur puis identification des coefficients du polynôme, on trouve :

$$S(p) = K.A.\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p+\omega_0} - \frac{\omega_0}{(p+\omega_0)^2}\right]$$

D'où la réponse temporelle :

$$s(t) = K.A.u(t).\left[1 - (1 + t.\omega_0).e^{-t.\omega_0}\right]$$

Propriétés de la réponse :

- Fonction croissante de t sur $\mathbb{R}^+$
- Asymptote pour $t \to +\infty$: $s(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} KA$ (réponse statique ou permanente)
- Valeur à l'origine : $s(0) = 0$

Tangente à l'origine horizontale : $\boldsymbol{\frac{ds}{dt}(0) = 0}$

Ici encore, la réponse est apériodique. C'est le régime limite du cas $\xi > 1$. Il est appelé régime apériodique critique.

1.3. Performances d'un système du second ordre

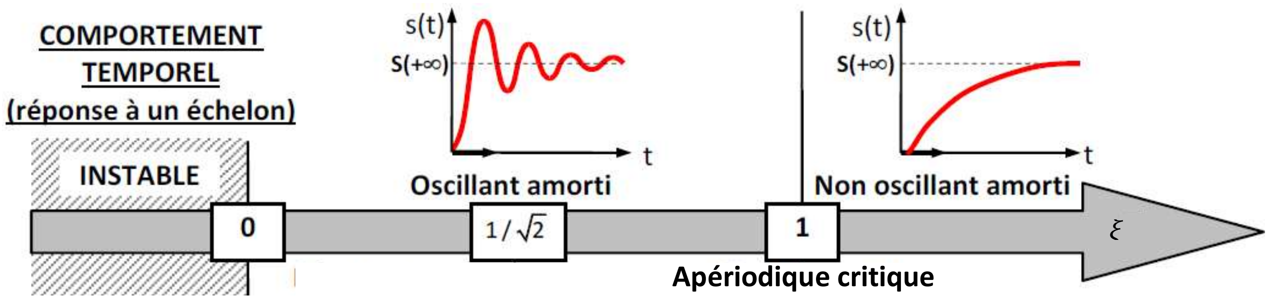
Un système physique du second ordre est toujours stable.

L'écart statique de la réponse d'un système du second ordre est $\varepsilon_s = A(1-K)$. Le système est donc précis si $K = 1$, sinon l'erreur est non nulle et il faut se référer au cahier des charges.

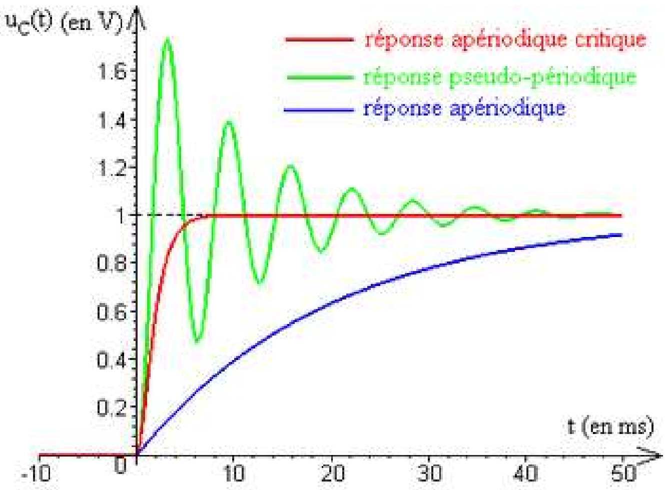
Si $\xi \geq 1$, la réponse ne présente pas de dépassement ni d'oscillations.

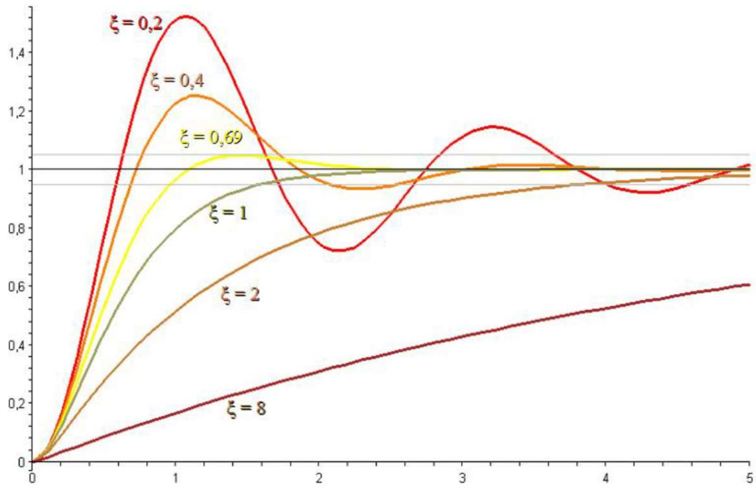
Si $\xi < 1$, la réponse présente des dépassements et des oscillations.

Pour un système du second ordre, le temps de réponse à 5% d'une réponse indicielle dépend du facteur d'amortissement. **Le régime le plus rapide sans dépassement est obtenu pour $\boldsymbol{\xi = 1}$. Le régime le plus rapide (avec dépassement) est obtenu pour $\boldsymbol{\xi = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7}$.**



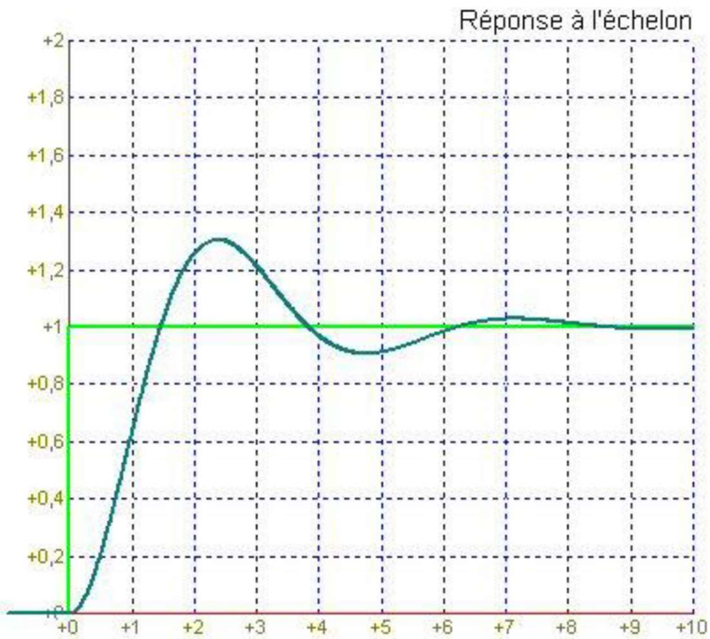
Visualisation des trois régimes - Évolution de la réponse temporelle en fonction de ξ.





1.4. Application

A partir du relevé expérimental ci-contre, et à l'aide de l'abaque des dépassements, déterminer par identification la fonction de transfert H(p) = S(p) / E(p)



- Détermination de K :

$$\lim_{t \to +\infty} s(t) = KA \Rightarrow 1 = K * 1 \Rightarrow 1 = K$$

- Détermination de ξ :

$$D_{1\%} = \frac{1,3 - 1}{1} = 0,3$$

Avec l'abaque $\xi = 0,35$

- Détermination de ω_0 :

Avec l'autre abaque $t_{5\%}.\omega_0 = 8 \Rightarrow \omega_0 = \frac{8}{5,7} = 1,4 rad/S$

Avec la formule $\omega_0 = \frac{2\pi}{T\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{2\pi}{4,8\sqrt{1-0,35^2}} = 1,4 rad/S$

Savoir-faire

Vous devez être capables de :
- Mettre des fonctions de transfert sous forme canonique
- Reconnaitre et identifier les paramètres d'une fonction du second ordre.
- Connaitre les caractéristiques d'une réponse temporelle pour un 2nd ordre.
- Identifier une fonction du 2nd ordre à partir d'une réponse temporelle.