

Cinématique du point dans un solide indéformable

Objectif : Résoudre des problèmes de cinématique dans des chaînes fermées.

1. Représentation des champs de vecteurs par un torseur

1.1. Définition

Il existe un outil mathématique pour représenter les ensembles respectant une relation de champ : **le torseur**. La notion de torseur est extrêmement utile dans le cours de mécanique pour permettre de modéliser globalement le comportement cinématique des solides ou encore, on le verra plus tard, les actions transmissibles entre deux solides.

Un torseur est la représentation d'un **champ de vecteurs équiprojectif**, dont les vecteurs $\vec{M}_P$ en chaque point P s'appellent « moments » du torseur. Par les propriétés d'un tel champ, les moments en deux points vérifient la relation de Varignon.

Éléments de réduction d'un torseur

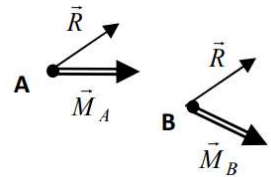
Un torseur est donc déterminé par deux vecteurs, constituant sa « réduction » en un point quelconque P de l'espace, à savoir :

- La résultante $\vec{R}$, ce vecteur est unique et indépendant du point de réduction,
→ **La résultante ne dépend pas du point de réduction.**
- Le moment (de réduction) en P : $\vec{M}_P$.
→ **Le moment dépend du point de réduction.**

$$\{T\}_P = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M}_P \end{array} \right\}_P$$

Remarques :

- Les termes « résultante » et « moment » proviennent du vocabulaire de l'étude des actions mécaniques, domaine où historiquement les torseurs ont été utilisés en premier.
- La résultante est un vecteur caractéristique du champ qui permet, à partir du moment en un point particulier, de retrouver les autres moments en n'importe quel point via la relation de Varignon.
- Usuellement, on représente en chaque point la résultante avec un vecteur simple, et le moment avec un vecteur à double trait.



1.2. Propriétés des torseurs

Égalité de deux torseurs **en un même point** :

$$\{T_1\}_P = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_1 \\ \vec{M}_1 \end{array} \right\}_P = \{T_2\}_P = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_2 \\ \vec{M}_2 \end{array} \right\}_P \Rightarrow \vec{R}_1 = \vec{R}_2 \text{ et } \vec{M}_1 = \vec{M}_2$$

Somme de deux torseurs **en un même point** :

$$\{T_1\}_P + \{T_2\}_P = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_1 \\ \vec{M}_1 \end{array} \right\}_P + \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_2 \\ \vec{M}_2 \end{array} \right\}_P = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_1 + \vec{R}_2 \\ \vec{M}_1 + \vec{M}_2 \end{array} \right\}_P$$

Multiplication d'un torseur par un scalaire :

$$\lambda \cdot \{T_1\}_P = \left\{ \begin{array}{c} \lambda \cdot \vec{R}_1 \\ \lambda \cdot \vec{M}_1 \end{array} \right\}_P$$

2. Le torseur cinématique

2.1. Définition

Le torseur cinématique du solide S_2 par rapport au solide S_1 ou torseur cinématique du mouvement de S_2/S_1 traduit le champ de vitesse du solide S_2 par rapport au solide S_1 et est noté :

$$\{V_{2/1}\}_P = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \\ \overrightarrow{V_{P \in 2/1}} \end{array} \right\}_P$$

- $\overrightarrow{\Omega_{2/1}}$ et $\overrightarrow{V_{P \in 2/1}}$ sont les éléments de réduction du torseur au point M .
- Le vecteur rotation $\overrightarrow{\Omega_{2/1}}$ correspond à la résultante cinématique du torseur, elle est indépendante du point choisi.
- Le vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{P \in 2/1}}$ correspond au moment cinématique du torseur au point P . Il dépend du point P et respecte la relation du champ de vecteurs vitesse ($\overrightarrow{V_{B \in 2/1}} = \overrightarrow{V_{A \in 2/1}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/1}}$)

2.2. Mouvements particuliers de translation et de rotation

2.2.1. Mouvements de translation

Un solide S_2 est en mouvement de translation par rapport à un solide S_1 si et seulement si son vecteur rotation $\overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \vec{0}$. Selon la loi du champ des vecteurs vitesses, ceci implique que tous les points du solide ont le même vecteur vitesse à l'instant t mais attention : ce vecteur vitesse n'est pas nécessairement constant dans le temps.

La forme du torseur cinématique sera donc pour un mouvement de translation: (quel que soit le point de réduction)

$$\{V_{2/1}\}_{\forall P} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \overrightarrow{V_{P \in 2/1}} \end{array} \right\}_{\forall P}$$

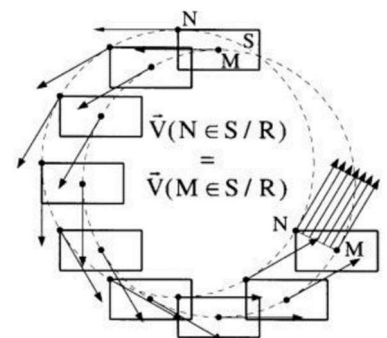
On parle alors de torseur **Couple**.

Remarques :

- $\overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \vec{0}$ signifie aussi que $B_1 = B_2$ (même orientation), mais attention $R_1 \neq R_2$ car les origines se déplacent.
- Dans le cas d'une translation, on détermine le vecteur vitesse par dérivation du vecteur position.

Il existe plusieurs types de mouvement de translation selon la nature de la trajectoire :

- translation rectiligne : les trajectoires des points sont des segments de droite ;
- translation circulaire : les trajectoires des points sont des arcs de cercle de même rayon (voir ci-contre, la grande roue d'une fête foraine) ;
- translation curviligne : les trajectoires des points décrivent des courbes quelconques (cabines de téléphérique).



2.2.2. Mouvements de rotation

Un solide S_2 est en mouvement de rotation autour d'un axe (Δ) par rapport à un solide S_1 , si le torseur cinématique est de la forme suivante en tout point P de l'axe (Δ) :

$$\{V_{2/1}\}_{\forall P \in (\Delta)} = \left\{ \begin{array}{c} \overline{\Omega_{2/1}} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{\forall P \in (\Delta)}$$

- Pour tout point $P \in (\Delta)$, on a $\overrightarrow{V_{P \in 2/1}} = \vec{0}$ (vitesse nulle sur l'axe de rotation)
- $\overline{\Omega_{2/1}}$ est colinéaire à l'axe (Δ) , appelé aussi axe instantané de rotation.
- Tous les points de S_2 ont une trajectoire circulaire par rapport à S_1 : des arcs de cercle de centre un point appartenant à l'axe (Δ) .
- Cette forme de torseur s'appelle un **glisseur**.

Remarque :

Soient $M \notin (\Delta)$ et C le projeté orthogonal de M sur (Δ) , on a :

$$\overrightarrow{V_{M \in 2/1}} = \overrightarrow{V_{C \in 2/1}} + \overrightarrow{MC} \wedge \overline{\Omega_{2/1}} = \overrightarrow{MC} \wedge \overline{\Omega_{2/1}} \Rightarrow \overrightarrow{V_{M \in 2/1}} \perp \overrightarrow{MC}$$

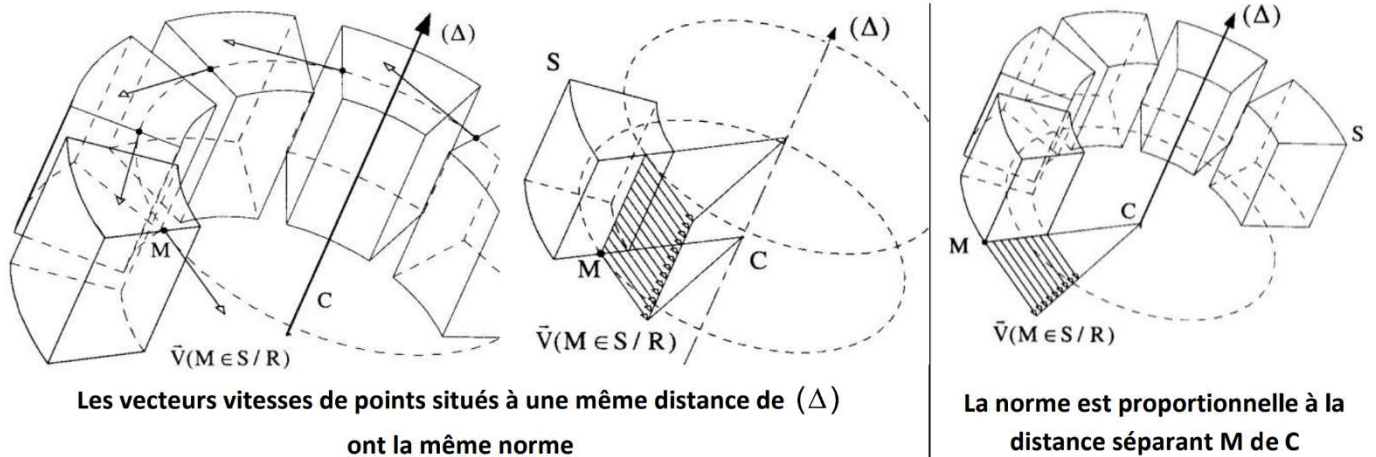
Comme $\overrightarrow{MC} \perp \overline{\Omega_{2/1}}$, on a :

$$\|\overrightarrow{V_{M \in 2/1}}\| = \|\overrightarrow{MC}\| \wedge \|\overline{\Omega_{2/1}}\| \text{ avec } \|\overrightarrow{MC}\| = R \text{ et } \|\overline{\Omega_{2/1}}\| = \omega \Rightarrow \|\overrightarrow{V_{M \in 2/1}}\| = \omega \cdot R$$

Conclusion : Le vecteur vitesse de tout point non situé sur (Δ) est tangent à sa trajectoire circulaire, perpendiculaire au rayon et a une norme proportionnelle à la distance séparant le point de l'axe de rotation pour l'instant considéré.

On parle alors de **répartition linéaire des vitesses** des points d'un solide en rotation.

Répartition linéaire des vitesses :



2.3. Fermeture cinématique

Avec la composition des vecteurs vitesses et la composition des vecteurs vitesse de rotation, on peut écrire l'expression généralisée suivante :

Fermeture cinématique

Soient n solides en mouvement les uns par rapport aux autres. On peut alors écrire le fermeture cinématique suivante :

$$\{V_{n/0}\}_P = \{V_{n/n-1}\}_P + \dots + \{V_{3/2}\}_P + \{V_{2/1}\}_P + \{V_{1/0}\}_P$$

Attention :



- Tous les torseurs doivent être exprimé au même point.
- Projeter les deux équations vectorielles permet d'obtenir 6 équations scalaires (en 3D).

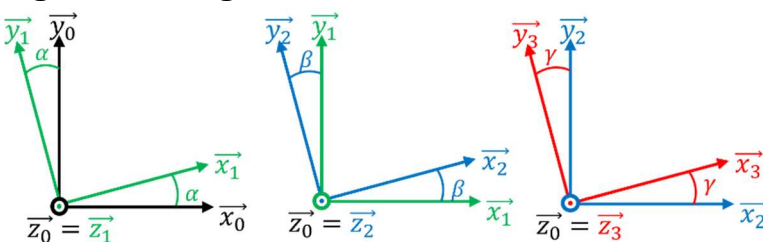
2.3.1. Application : Moteur deux temps

On souhaite déterminer l'expression de $\dot{y}$ en fonction de α , $\dot{\alpha}$ et y .

Données :

- Longueur de la bielle : $L = 30 \text{ mm}$
- Excentrique du vilebrequin : $e = 8,5 \text{ mm}$
- Vitesse de rotation de l'hélice : $\omega_{\text{hélice}} = 5000 \text{ tr. min}^{-1}$

Figures de changement de bases :

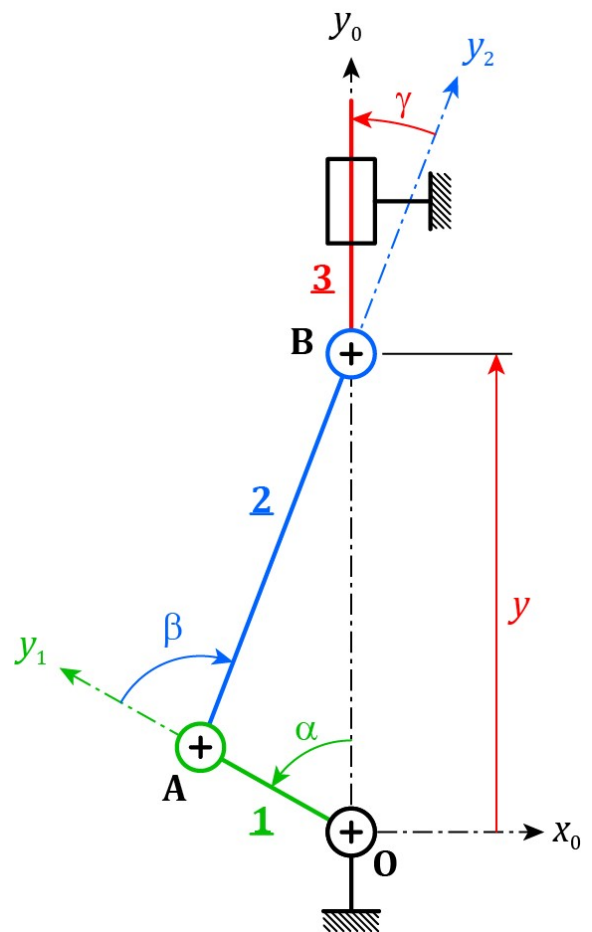


Écriture des différents torseurs :

$$\begin{aligned} \{V_{1/0}\} &= \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_O & \{V_{2/1}\} &= \begin{Bmatrix} \dot{\beta} \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A \\ \{V_{3/2}\} &= \begin{Bmatrix} \dot{\gamma} \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B & \{V_{3/0}\} &= \begin{Bmatrix} \dot{y} \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B \end{aligned}$$

Réaliser la fermeture cinématique en B.

Astuce : Pour déplacer en B le torseur en A, il est préférable de passer par le point O afin de ne faire apparaître que des termes en α .



$$\begin{aligned}\overrightarrow{V_{B \in 1/0}} &= \overrightarrow{V_{O \in 1/0}} + \overrightarrow{BO} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \\ &= -y\overrightarrow{y_0} \wedge \dot{\alpha}\overrightarrow{z} = -y\dot{\alpha}\overrightarrow{x_0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V_{B \in 2/1}} &= \overrightarrow{V_{A \in 1/0}} + (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA}) \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \\ &= (-y\overrightarrow{y_0} + e\overrightarrow{y_1}) \wedge \dot{\beta}\overrightarrow{z} = -y\dot{\beta}\overrightarrow{x_0} + e\dot{\beta}\overrightarrow{x_1} \\ &= (e\dot{\beta} \cos \alpha - y\dot{\beta})\overrightarrow{x_0} + e\dot{\beta} \sin \alpha \overrightarrow{y_0}\end{aligned}$$

Fermeture cinématique :

$$\begin{aligned}\{\mathcal{V}_{3/0}\} &= \{\mathcal{V}_{3/2}\} + \{\mathcal{V}_{2/1}\} + \{\mathcal{V}_{1/0}\} \\ \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \dot{y}\overrightarrow{y_0} \end{array} \right\}_B &= \left\{ \begin{array}{c} \dot{y}\overrightarrow{z} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_B + \left\{ \begin{array}{c} \dot{\beta}\overrightarrow{z} \\ (e\dot{\beta} \cos \alpha - y\dot{\beta})\overrightarrow{x_0} + e\dot{\beta} \sin \alpha \overrightarrow{y_0} \end{array} \right\}_B + \left\{ \begin{array}{c} \dot{\alpha}\overrightarrow{z} \\ -y\dot{\alpha}\overrightarrow{x_0} \end{array} \right\}_B\end{aligned}$$

En déduire l'expression de $\dot{y}$ en fonction de $\alpha, \dot{\alpha}$ et y .

En projection dans B_0 :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \dot{y} + \dot{\beta} + \dot{\alpha} \\ 0 = e\dot{\beta} \cos \alpha - y\dot{\beta} - y\dot{\alpha} \\ \dot{y} = e\dot{\beta} \sin \alpha \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 = \dot{y} + \dot{\beta} + \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} = \frac{y\dot{\alpha}}{e \cos \alpha - y} \\ \dot{y} = \frac{y\dot{\alpha} e \sin \alpha}{e \cos \alpha - y} \end{array} \right. \Leftrightarrow \dot{y}y - \dot{y}e \cos \alpha + y\dot{\alpha}e \sin \alpha = 0$$

3. Mouvements plans et mécanismes plans

3.1. Définition

Mouvement plan

Soient deux solides S_1 et S_2 en mouvement l'un par rapport à l'autre. Le mouvement de S_2 par rapport à S_1 est dit plan, s'il existe un plan π_2 lié à S_2 qui reste constamment en coïncidence avec un plan π_1 lié à S_1 . Ce plan est appelé plan de glissement.

3.2. Particularités d'un mouvement plan sur plan

Soient $R_0 = (O_0, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ et $R_1 = (O_1, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$, deux repères liés respectivement à S_0 et S_1 , tels que les plans $\pi_0(O_0, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0})$ et $\pi_1(O_1, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1})$ soient coïncidents.

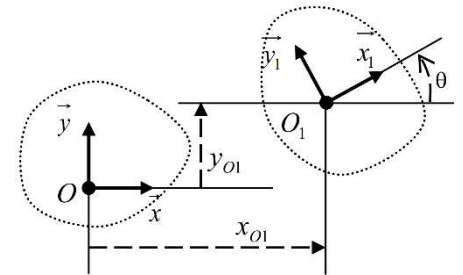
On a donc : $\overrightarrow{z_0} = \overrightarrow{z_1}$.

Le paramétrage de la situation de S_1 par rapport à S_0 nécessite d'introduire 2 paramètres de position (x_{01}, y_{01}) et 1 paramètre d'orientation θ . Le torseur cinématique du mouvement plan sur plan de S_1 par rapport à S_0 parallèlement au plan $(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0})$ se simplifie donc et s'écrit :

$$\{V_{1/0}\}_{O_1} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \dot{\theta} \overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{V_{O_1 \in 1/0}} = \dot{x}_{01} \overrightarrow{x_0} + \dot{y}_{01} \overrightarrow{y_0} \end{array} \right\}_{O_1} = \left\{ \begin{array}{l} - \\ \dot{x}_{01} \\ - \\ \dot{y}_{01} \\ \dot{\theta} \\ - \end{array} \right\}_{O_1, (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})} = \left\{ \begin{array}{l} - \\ \dot{x}_M \\ - \\ \dot{y}_M \\ \dot{\theta} \\ - \end{array} \right\}_{M, (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})}$$

Conclusions :

- le vecteur rotation est perpendiculaire aux plans π_0 et π_1 ;
- les vecteurs vitesses sont tous parallèles aux plans π_0 et π_1 ;
- il ne peut y avoir à la fois une vitesse et une vitesse de rotation portée par le même vecteur ;
- aucun mouvement ne tend à faire sortir des solides du plan.



3.3. Mécanisme cinématiquement plan

Un mécanisme peut être considéré comme cinématiquement plan si toutes les pièces de ce mécanisme sont en mouvement plan les unes par rapport aux autres pour le fonctionnement considéré.

Avantages

Dans une modélisation plane de normale $\vec{z}$, il n'y a que trois composantes « intéressantes » dans le torseur cinématique ce qui permet de réduire la complexité des calculs. Il convient néanmoins de vérifier qu'une modélisation plane peut-être envisagée sans modifier le comportement cinématique du mécanisme.

Les vitesses étant toutes dans le même plan, il devient possible de procéder à certains tracés graphiques qui facilitent l'intuition. La compréhension des méthodes graphiques peut vous aider à mieux assimiler la cinématique des solides.

3.4. Liaisons planes cinématiquement équivalentes

Avec l'hypothèse d'un problème plan les différentes liaisons normalisées peuvent se simplifier et devenir équivalentes à d'autres liaisons. Il est possible de définir n'importe quel mécanisme plan à l'aide de 3 liaisons différentes :

Nom	Représentation plane	Validité	Modélisation des torseurs
Glissière de direction $\vec{x}$		Tout point du plan	$\{v_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} - & V_{x,2/1} \\ - & 0 \\ 0 & - \end{Bmatrix}_{\forall M, (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$
Pivot d'axe $(O, \vec{z})$		En O	$\{v_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} - & 0 \\ - & 0 \\ \omega_{z,2/1} & - \end{Bmatrix}_{O, (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$
Ponctuelle de normale $(O, \vec{y})$		Tout point de la normale $(O, \vec{y})$	$\{v_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} - & V_{x,2/1} \\ - & 0 \\ \omega_{z,2/1} & - \end{Bmatrix}_{O, (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$