

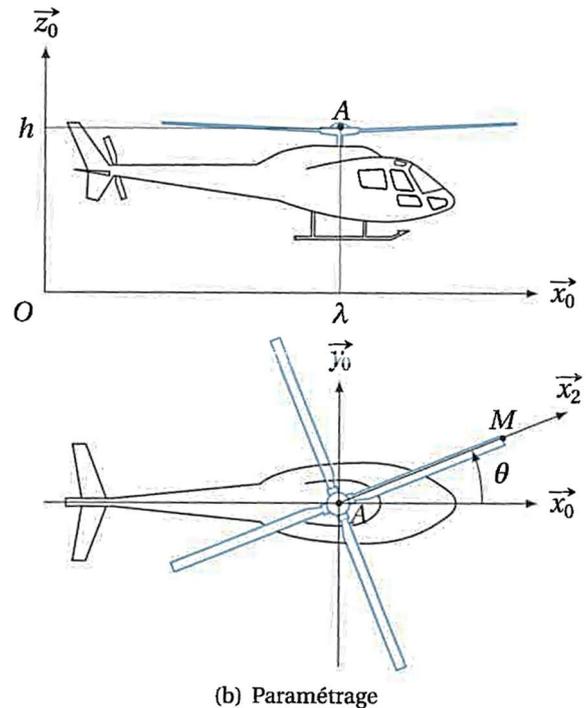
Hélicoptère

La vitesse des hélicoptères est bien inférieure à celle des avions car elle est limitée par la vitesse en bout de pale qui ne doit pas dépasser la vitesse du son, soit environ $340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Le but de cet exercice est de déterminer la vitesse d'avance maximale théorique d'un hélicoptère en fonction de ce critère. Dans tout l'exercice, le vent est supposé nul.

Soit $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère fixe par rapport au sol (0). L'hélicoptère (1) se déplace en translation rectiligne uniforme de direction \vec{x}_0 par rapport au sol (0). Soit $\vec{OA} = h\vec{z}_0 + \lambda\vec{x}_0$ où h est une constante et λ un paramètre variable.

Soit $R_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un repère fixe par rapport à l'hélicoptère (1).

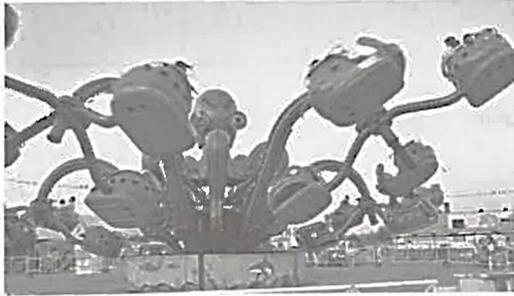
Soit $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ un repère attaché au rotor principal (2) de l'hélicoptère tel que $\vec{AM} = R\vec{x}_2$ avec M un point situé à l'extrémité d'une pale : la grandeur R est appelée « rayon du rotor » dans la suite. Le rotor principal (2) est en rotation d'axe (A, \vec{z}_0) de paramètre θ par rapport à l'hélicoptère (1). La vitesse angulaire de B_2 par rapport à B_1 est supposée constante et notée $\dot{\theta} = \omega$.



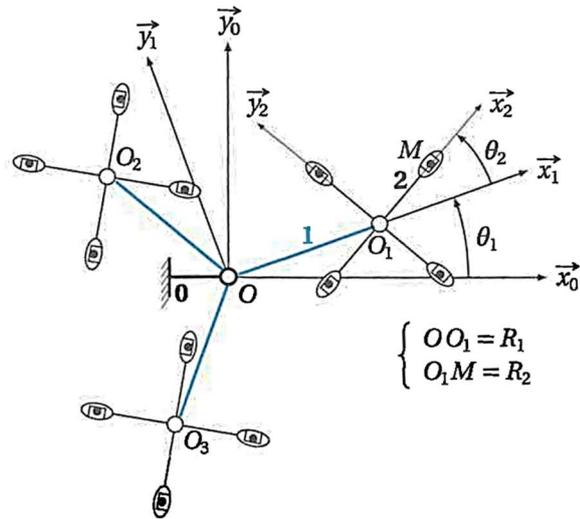
- Q.1.** Donner l'expression du vecteur position du point M par rapport au référentiel R_0 en fonction des paramètres λ , h et R .
- Q.2.** Donner les expressions des vecteurs vitesses angulaires $\vec{\Omega}_{2/1}$ de B_2 par rapport à B_1 , de B_1 par rapport à B_0 et $\vec{\Omega}_{2/0}$ de B_2 par rapport à B_0 en fonction de $\dot{\theta}$.
- Q.3.** Déterminer l'expression du vecteur vitesse $\vec{V}_{M \in 2/0}$ du point M du rotor (2) par rapport au sol (0) en fonction de λ , h et R .
- Q.4.** Déterminer l'expression de la vitesse maximale V_{max} de $\vec{V}_{M \in 2/0}$ au cours du mouvement en fonction de λ , h et R , en précisant pour quelle position ce maximum est atteint.
- Q.5.** Sachant que la vitesse angulaire du rotor vaut $\omega = 384 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$, le rayon du rotor (longueur d'une pale) vaut $R = 4,5 \text{ m}$ et que la vitesse de la pale ne doit jamais dépasser la vitesse du son, déterminer la vitesse maximale $\dot{\lambda}_{max}$ de l'hélicoptère par rapport au sol (le résultat sera donné en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$).

Manège pieuvre

Le manège pieuvre est un classique des fêtes foraines. Par une combinaison de deux rotations, ce manège génère un mouvement épicycloïdal des nacelles dans lesquelles les passagers prennent place, ce qui leur procure des sensations fortes.



(a) Photographie



(b) Schéma cinématique

L'objectif consiste à déterminer les caractéristiques géométriques (dimensions des pièces) et cinématiques (vitesses angulaires des bras) afin de respecter le cahier des charges suivant :

| Fonction | Critères | Niveaux |
|---|-----------------------|-----------------------|
| Assurer des sensations fortes en toute sécurité | Vitesse maximale | 40 km.h ⁻¹ |
| | Accélération maximale | 1,5g |
| | Accélération minimale | 0,5g |

$R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est un repère lié au sol (O).

$R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est un repère lié au bras principal (1), en rotation par rapport à (O) autour de l'axe (O, \vec{z}_0) . Le paramètre angulaire est $\theta_1 = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ et $\vec{OO}_1 = R_1 \vec{x}_1$. Dans cet exercice, la possibilité de rotation des bras (1) autour de l'axe (O, \vec{y}_1) n'est pas prise en compte.

$R_2(O_1, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ est un repère lié au bras secondaire (2) sur lequel les nacelles sont accrochées. Le bras secondaire (2) est en rotation par rapport au bras principal (1) autour de l'axe (O_1, \vec{z}_1) . Le paramètre angulaire est $\theta_2 = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$. Le passager est caractérisé par le point M lié à une nacelle fixée sur (2) tel que $\vec{O_1M} = R_2 \vec{x}_2$.

Afin de répondre à la problématique simplement, la caractérisation de la cinématique des nacelles est restreinte à l'étude du mouvement du point M appartenant au bras secondaire (2) par rapport au sol (O).

Q.1. Déterminer le vecteur position \vec{OM} sous la forme la plus concise possible.

Q.2. En déduire $\vec{V}_{M \in 2/0}$ sous la forme la plus concise possible.

Les deux vitesses de rotation sont telles que $\omega_{1/0} = \dot{\theta}_1 = C^{ste} = \omega$ et $\omega_{2/1} = \dot{\theta}_2 = -2\omega$.

Q.3. Déterminer, sous ces conditions, l'expression de la vitesse $\|\vec{V}_{M \in 2/0}\|$ en fonction de R_1, R_2 et ω et indiquer pour quelle valeur de θ_2 sa norme est maximale. Donner alors l'expression de $\|\vec{V}_{M \in 2/0}\|_{maxi}$.

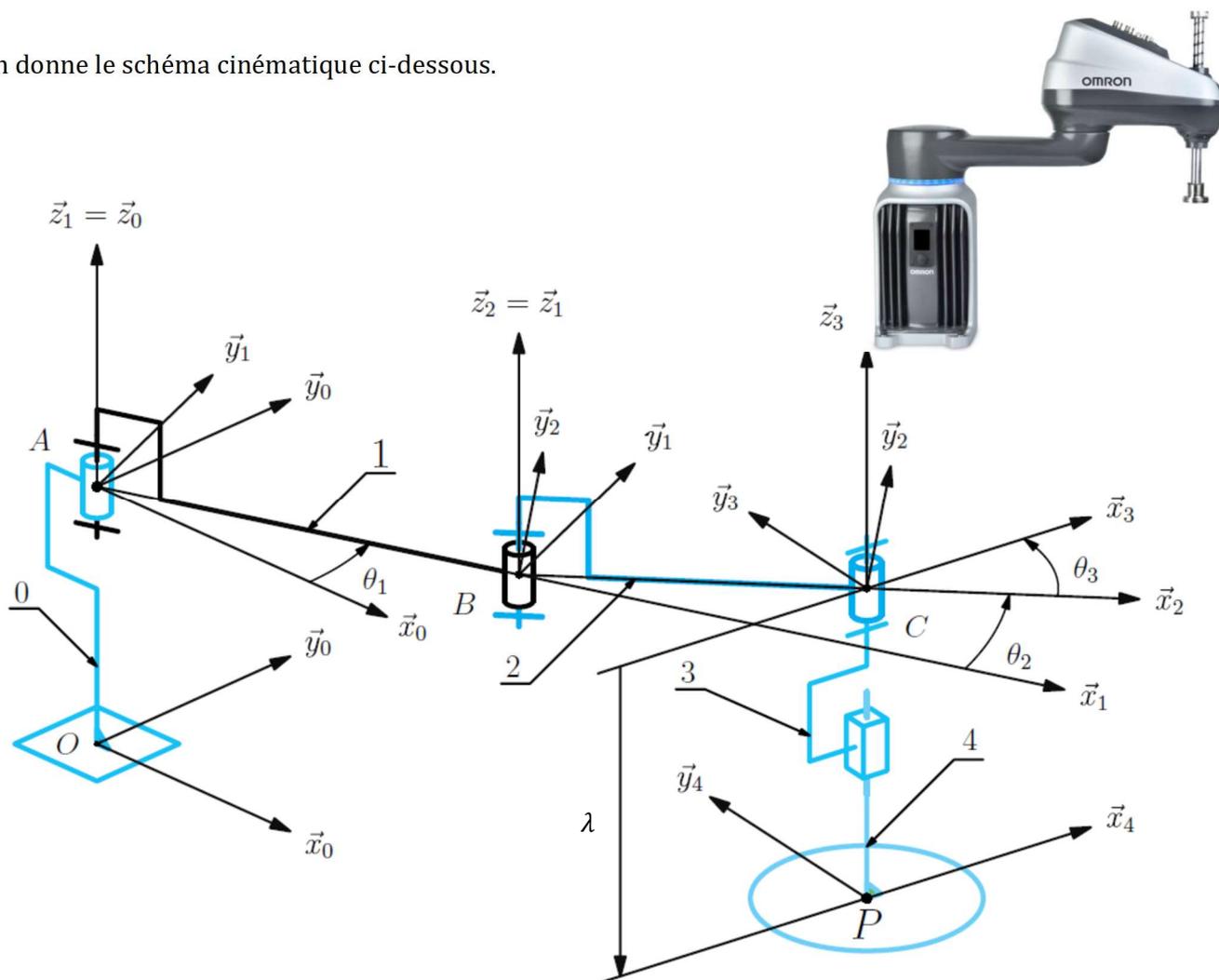
Q.4. Déterminer l'accélération $\vec{\Gamma}_{M \in 2/0}$, en déduire l'expression de la norme de l'accélération. Donner les expressions des normes des accélérations maximale et minimale subies par un passager lors du fonctionnement en cycle continu.

Q.5. À partir des expressions obtenues, déterminer numériquement les valeurs des rayons R_1, R_2 et ω permettant de satisfaire le cahier des charges.

Robot Scara

L'étude porte sur un robot de type SCARA, utilisé pour le pick and place et chaîne de montage (visseuse).

On donne le schéma cinématique ci-dessous.



Ce système est constitué de cinq solides :

- le bâti 0, de repère associé $R_o(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$;
- le bras 1, de repère associé $R_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ tel que $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$;
- l'avant-bras 2, de repère associé $R_2(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ tel que $\vec{z}_1 = \vec{z}_2$;
- le poignet 3, de repère associé $R_3(C, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ tel que $\vec{z}_2 = \vec{z}_3$;
- la visseuse 4, de repère associé $R_4(P, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$ tel que les bases B4 et B3 sont identiques.

On donne les paramètres de mouvement :

- $\theta_1 = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$
- $\theta_2 = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$
- $\theta_3 = (\vec{x}_2, \vec{x}_3)$
- $\vec{CP} = \lambda \vec{z}_0$ avec le point P correspondant à la pointe de la visseuse.

On donne les paramètres caractéristiques :

- $\vec{OA} = a\vec{z}_0$
- $\vec{AB} = r\vec{x}_1$
- $\vec{BC} = r\vec{x}_2$

Le tableau des exigences partielles est le suivant :

| | |
|------|--|
| Ex 1 | La visseuse (le point P) est pilotée non pas par les 4 paramètres de mouvement articulaires (ou directes) $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \lambda$, mais par les 4 paramètres de mouvement inverses x, y, z, γ telles que $\vec{OP} = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 + z\vec{z}_0 \text{ et } (\vec{x}_2, \vec{x}_3) = \gamma.$ |
| Ex 2 | Pour des raisons de sécurité, la norme de la vitesse du point P par rapport au bâti 0, ne doit pas dépasser une valeur notée V_{max} . |
| Ex 3 | P doit se déplacer uniquement selon \vec{x}_0 à la vitesse V . |

- Q.6.** Réaliser un graphe de liaison. S'il existe, préciser le paramètre de mouvement associé à chaque liaison.
- Q.7.** Réaliser la(les) figure(s) de changement de base illustrant les paramètres de mouvement angulaire. En déduire les vecteurs vitesses angulaires.
- Q.8.** Définir les trajectoires $T_{P \in 4/3}, T_{C \in 4/3}, T_{B \in 2/1}, T_{C \in 2/1}, T_{P \in 2/1}, T_{A \in 1/0}$ et $T_{P \in 1/0}$.
- Q.9.** Déterminer un vecteur position du point P dans le repère 0, en fonction des paramètres de mouvement et des paramètres caractéristiques.
- Q.10.** Préciser quatre relations mathématiques qui traduisent l'exigence Ex1 du cahier des charges. En déduire les paramètres de mouvement inverses x, y, z, γ en fonction des paramètres de mouvement articulaires $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \lambda$ et des paramètres caractéristiques. Vérifier l'homogénéité des équations.
- Q.11.** Déterminer $V_{P \in 4/0}$.
- Q.12.** Préciser une relation mathématique qui traduit l'exigence Ex2 du cahier des charges. En déduire une relation sur les paramètres de mouvement et leurs dérivées temporelles.
- Q.13.** Préciser trois relations mathématiques qui traduisent l'exigence Ex3 du cahier des charges. En déduire les relations sur les paramètres de mouvement et leurs dérivées temporelles (NB : La résolution du système ne sera pas effectuée pour déterminer les 3 lois de commande en vitesse).