# Cinématique du point dans un solide indéformable

**Compétences**

**Modéliser :**
Modélisation géométrique et cinématique des mouvements entre solides indéformables

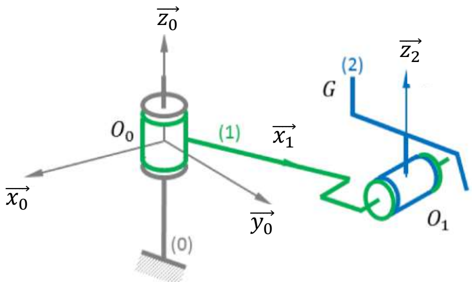
**Objectif :** Déterminer la trajectoire, la vitesse et l'accélération d'un point appartenant à un solide indéformable.

## 1. Introduction

### 1.1. Support d'application récurrent pour ce cours : Centrifugeuse humaine développée par le CNRS

Pour illustrer les différentes propriétés et les différentes méthodes, nous nous appuierons sur le système suivant pendant ce chapitre :

*Centrifugeuse humaine développée par le CNRS / MEDES*




*Modélisation cinématique*

## 2. Trajectoire d'un point appartenant à un solide

**Définition**

**Trajectoire d'un point dans l'espace**

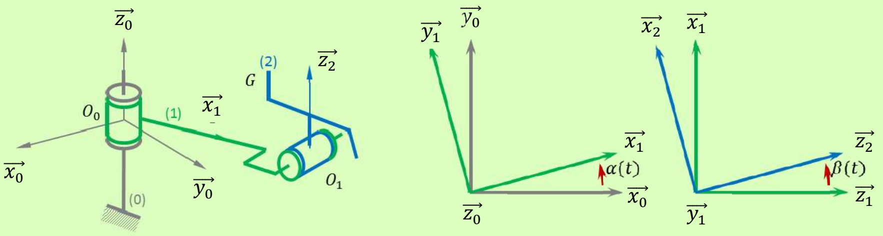
Soit un point $P$ se déplaçant dans un repère $R_0(O,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})$. La trajectoire du point $P$ est définie par la courbe $C(t)$ paramétrée par le temps $t$. On a :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \overrightarrow{OP}(t) = x(t).\overrightarrow{x_0} + y(t).\overrightarrow{y_0} + z(t).\overrightarrow{z_0}$$

**Remarque** : Comme pour les paramètres lors de la séquence précédente de mécanique, on ne note presque jamais la dépendance au temps et la relation précédente devient $\overrightarrow{OP} = x.\overrightarrow{x_0} + y.\overrightarrow{y_0} + z.\overrightarrow{z_0}$.

*Centrifugeuse*

Le paramétrage de la centrifugeuse est donné ci-dessous :




Les paramètres constants du système sont les suivants :

- $\overrightarrow{O_0O_1} = a\,\overrightarrow{x_1}$
- $\overrightarrow{O_1G} = b\,\overrightarrow{x_2} + c\,\overrightarrow{z_2}$

La trajectoire du point $G$ dans le repère $R_0$ est donnée par le vecteur

$$\overrightarrow{O_0G} = \overrightarrow{O_0O_1} + \overrightarrow{O_1G} = a\,\overrightarrow{x_1} + b\,\overrightarrow{x_2} + c\,\overrightarrow{z_2}$$

Il faut alors projeter les vecteurs dans $R_0$ :

$$\overrightarrow{O_0G} = a(\cos(\alpha)\,\overrightarrow{x_0} + \sin(\alpha)\,\overrightarrow{y_0}) + b(\cos(\beta)\,\overrightarrow{x_1} - \sin(\beta)\,\overrightarrow{y_1}) + c(\cos(\beta)\,\overrightarrow{z_1} + \sin(\beta)\,\overrightarrow{x_1})$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O_0G} = {} & a(\cos(\alpha)\,\overrightarrow{x_0} + \sin(\alpha)\,\overrightarrow{y_0}) + b(\cos(\beta)\,(\cos(\alpha)\,\overrightarrow{x_0} + \sin(\alpha)\,\overrightarrow{y_0}) - \sin(\beta)\,\overrightarrow{z_0}) \\ & + c\big(\cos(\beta)\,\overrightarrow{z_0} + \sin(\beta)\,(\cos(\alpha)\,\overrightarrow{x_0} + \sin(\alpha)\,\overrightarrow{y_0})\big)\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{O_0G} = \begin{bmatrix} a\cos(\alpha) + b\cos(\beta)\cos(\alpha) + c\sin(\beta)\cos(\alpha) \\ a\sin(\alpha) + b\cos(\beta)\sin(\alpha) + c\sin(\beta)\sin(\alpha) \\ -b\sin(\beta) + c\cos(\beta) \end{bmatrix}_{R_0}$$

On a ainsi l'équation paramétrique de la position du point $G$.

# 3. Vitesse d'un point appartenant à un solide

## 3.1. Le vecteur vitesse

**Définition**

**Vitesse d'un point appartenant à un solide**

Soit un solide $S_0$ auquel est associé un repère $R_0(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$. Soit un solide $S_1$ auquel est associé un repère $R_1(O_1, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$. Le solide $S_1$ est en mouvement par rapport au solide $S_0$.

Soit un point ***P* appartenant physiquement au solide *S*$_1$**. La vitesse du point $P$ appartenant au solide $S_1$ par rapport au solide $S_0$ se calcule donc ainsi :

$$\overrightarrow{V_{P\in 1/0}} = \left[\frac{d\overrightarrow{O_0P}}{dt}\right]_{R_0}$$

**<u>Attention</u>** :

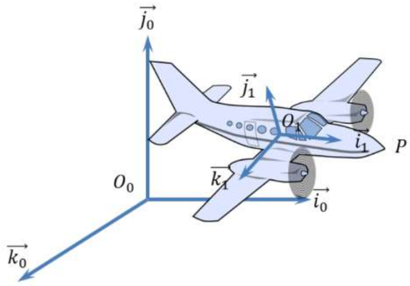
- **Respecter rigoureusement la notation ;**
- **La vitesse dépend du point d'application.**

**Remarques** :

- $\overrightarrow{V_{P\in 1/0}}$ dépend du temps t. On l'appelle la vitesse instantanée.
- $\overrightarrow{V_{P\in 1/0}}$ est tangent à la trajectoire du point P dans $R_0$.
- $\overrightarrow{V_{P\in 1/0}}$ peut s'exprimer dans n'importe quelle base.
- $\overrightarrow{V_{P\in 1/0}}$ se note aussi $\overrightarrow{V_{P,1/0}}$ ou $\overrightarrow{V_P(1/0)}$.

### 3.1.1. Calcul du vecteur vitesse

Soit un avion $S_1$ repéré par le repère $R_1(O_1, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$ en mouvement libre par rapport à un repère $R_0(O_0, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ (le sol). La position de l'avion dans l'espace est repérée par le vecteur $\overrightarrow{O_0O_1} = x.\overrightarrow{x_0} + y.\overrightarrow{y_0} + z.\overrightarrow{z_0}$ ainsi que par 3 angles, un par rotation élémentaire.




Méthode

**Calculer une vitesse par dérivation**

Pour dériver le vecteur $\overrightarrow{O_0O_1}$ par rapport au repère $R_0$ une méthode consiste en exprimer le vecteur $\overrightarrow{O_0O_1}$ dans $R_0$ puis en dériver chacune des composantes.

Calculons la vitesse du point $O_1$ par rapport à $R_0$ :

$$\overrightarrow{V_{O_1 \in 1/0}} = \left[\frac{d\overrightarrow{O_0O_1}}{dt}\right]_{R_0}$$

$$\overrightarrow{V_{O_1 \in 1/0}} = \left[\frac{d(x.\overrightarrow{x_0} + y.\overrightarrow{y_0} + z.\overrightarrow{z_0})}{dt}\right]_{R_0}$$

$$= \left[\frac{d(x.\overrightarrow{x_0})}{dt}\right]_{R_0} + \left[\frac{d(y.\overrightarrow{y_0})}{dt}\right]_{R_0} + \left[\frac{d(z.\overrightarrow{z_0})}{dt}\right]_{R_0}$$

$$= x(t)\left[\frac{d\overrightarrow{x_0}}{dt}\right]_{R_0} + \frac{dx}{dt}\overrightarrow{x_0} + y(t)\left[\frac{d\overrightarrow{y_0}}{dt}\right]_{R_0} + \frac{dy}{dt}\overrightarrow{y_0} + z(t)\left[\frac{d\overrightarrow{z_0}}{dt}\right]_{R_0} + \frac{dz}{dt}\overrightarrow{z_0}$$

On a :

$$\left[\frac{d\overrightarrow{x_0}}{dt}\right]_{R_0} = \begin{bmatrix} \frac{d1}{dt} \\ \frac{d0}{dt} \\ \frac{d0}{dt} \end{bmatrix}_{R_0} = \vec{0}$$

On obtient le même résultat pour $\left[\frac{d\overrightarrow{y_0}}{dt}\right]_{R_0}$ et $\left[\frac{d\overrightarrow{z_0}}{dt}\right]_{R_0}$.

Soit finalement :

$$\overrightarrow{V_{O_1 \in 1/0}} = \dot{x}.\overrightarrow{x_0} + \dot{y}.\overrightarrow{x_0} + \dot{z}.\overrightarrow{z_0}$$

**Remarques** :

- La dérivée d'un vecteur $\overrightarrow{x_i}$ <u>fixe</u> dans un repère $R_i$ exprimé dans une base $B_i$ est nulle. Ainsi, $\left[\frac{d\overrightarrow{x_i}}{dt}\right]_{R_i} = \vec{0}$
- On note par un $\dot{}$ la dérivée d'une fonction par rapport au temps : $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$.

*Centrifugeuse*

Calculer $\overrightarrow{V_{O_1\in 1/0}}$.

Par définition,

$$\overrightarrow{V_{O_1\in 1/0}} = \left[\frac{d\overrightarrow{O_0O_1}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d(a\,\overrightarrow{x_1})}{dt}\right]_{R_0} = a\left[\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt}\right]_{R_0}$$

On a :

$$\left[\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d(\cos(\alpha)\,\overrightarrow{x_0} + \sin(\alpha)\,\overrightarrow{y_0})}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d(\cos(\alpha)\,\overrightarrow{x_0})}{dt}\right]_{R_0} + \left[\frac{d(\sin(\alpha)\,\overrightarrow{y_0})}{dt}\right]_{R_0}$$

$$= \frac{d\cos(\alpha)}{dt}\overrightarrow{x_0} + \cos(\alpha)\left[\frac{d\overrightarrow{x_0}}{dt}\right]_{R_0} + \frac{d\sin(\alpha)}{dt}\overrightarrow{y_0} + \sin(\alpha)\left[\frac{d\overrightarrow{y_0}}{dt}\right]_{R_0}$$

$$= -\dot{\alpha}\sin(\alpha)\,\overrightarrow{x_0} + \dot{\alpha}\cos(\alpha)\,\overrightarrow{y_0} = \dot{\alpha}(-\sin(\alpha)\,\overrightarrow{x_0} + \cos(\alpha)\,\overrightarrow{y_0}) = \dot{\alpha}\overrightarrow{y_1}$$

Ainsi,

$\overrightarrow{V_{O_1\in 1/0}} = a\dot{\alpha}\overrightarrow{y_1}$, ce qui est bien tangent à la trajectoire de $O_1$.

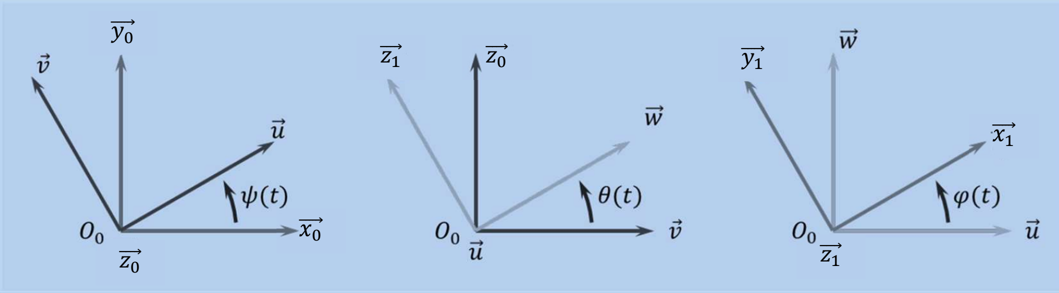
## 3.2. Vecteur instantané de rotation

### 3.2.1. Définition

Définition

**Vitesse d'un point appartenant à un solide**

Soit un solide $S_0$ auquel est associé un repère $R_0(O,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})$. Soit un solide $S_1$ auquel est associé un repère $R_1(O_1,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})$. Le solide $S_1$ est en mouvement par rapport au solide $S_0$.




Les rotations entre le solide $S_0$ et le solide $S_1$ sont paramétrées par les angles d'Euler $\Psi$, $\theta$ et $\varphi$.

On appelle vecteur instantané de rotation entre les solides $S_0$ et $S_1$ le vecteur :

$$\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \dot{\Psi}.\overrightarrow{z_0} + \dot{\theta}.\vec{u} + \dot{\varphi}.\overrightarrow{z_1}$$

$\dot{\Psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$ sont en rad/s.

**Remarques** :

- **Le vecteur instantané de rotation est indépendant du point d'application**.
- On a la relation suivante : $\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = -\overrightarrow{\Omega_{0/1}}$.

#### 3.2.2. Détermination du vecteur vitesse instantanée de rotation dans les liaisons cinématiques

Lorsqu'il n'y a pas de degrés de liberté de rotation dans une liaison ou que les degrés de liberté en rotation sont paramétrés, on a :

- si les solides $S_2$ et $S_1$ sont en liaison pivot de centre O, d'angle α et d'axe $\vec{z}$, alors $\overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \dot{\alpha}\vec{z}$ ;
- si les solides $S_2$ et $S_1$ sont en liaison glissière d'axe $\vec{z}$, alors $\overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \vec{0}$ ;
- toutes combinaisons des deux cas précédents.

*Centrifugeuse*

On a :

$$\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \dot{\alpha}\overrightarrow{z_0} \qquad \overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \dot{\beta}\overrightarrow{y_1}$$

### 3.3. Dérivation vectorielle

**Définition**

**Formule de Bour**

Soit un solide $S_0$ auquel est associé un repère $R_0(O,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})$. Soit un solide $S_1$ auquel est associé un repère $R_1(O_1,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})$. Le solide $S_1$ est en mouvement par rapport au solide $S_0$. On note $\vec{v}$ un vecteur de l'espace. On note $\overrightarrow{\Omega_{1/0}}$ le vecteur instantané de rotation permettant d'exprimer les rotations entre chacune des deux bases.

La dérivée d'un vecteur dans la base mobile donnée par la formule suivante :

$$\left[\frac{d\vec{v}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\vec{v}}{dt}\right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \vec{v} = \left[\frac{d\vec{v}}{dt}\right]_{R_1} + \vec{v} \wedge \overrightarrow{\Omega_{0/1}}$$

On appliquera cette formule **<u>systématiquement</u>** pour calculer la dérivée de vecteurs unitaires.

#### 3.3.1. Rappel : le produit vectoriel

**Définition**

**Produit vectoriel**

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tel que l'angle $(\vec{u},\vec{v}) = \alpha$, le produit vectoriel noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est le vecteur : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\sin(\alpha)\,\vec{w}$ avec $\vec{w}$ vecteur unitaire orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.

**<u>Propriétés du produit vectoriel</u>** :

- Le produit vectoriel est anticommutatif : $\boldsymbol{\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}}$**.**
- Il est distributif sur l'addition des vecteurs : $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$ .
- Le vecteur nul est l'élément absorbant du produit scalaire : $\vec{u} \wedge \vec{0} = \vec{0} \wedge \vec{u} = \vec{0}$ .
- **Le produit vectoriel de deux vecteurs non nuls produit un vecteur orthogonal à ces deux vecteurs.** Donc en notant $\vec{w}$ tel que $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$, on a $\vec{w}.\vec{u} = \vec{w}.\vec{v} = 0$.

**<u>Remarque</u>** : Dans une base orthonormée B($\vec{x}$,$\vec{y}$,$\vec{z}$): $\vec{x} \wedge \vec{y} = \vec{z}$; $\vec{y} \wedge \vec{x} = -\vec{z}$ et $\vec{y} \wedge \vec{z} = \vec{x}$; $\vec{z} \wedge \vec{y} = -\vec{x}$…

Centrifugeuse

On rappelle que :

$$\overrightarrow{V_{O_1\in 1/0}} = a\left[\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt}\right]_{R_0}$$

Le calcul de $\left[\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt}\right]_{R_0}$ peut être fait ainsi :

$$\left[\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt}\right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{x_1} = \dot{\alpha}\overrightarrow{z_0} \wedge \overrightarrow{x_1} = \dot{\alpha}\overrightarrow{y_1}$$

Ainsi

$\overrightarrow{V_{O_1\in 1/0}} = a\dot{\alpha}\overrightarrow{y_1}$, ce qui est extrêmement plus rapide.

### 4.1. Champ de vitesse

Définition

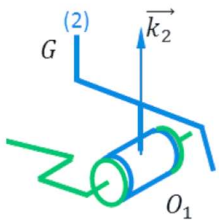
**Formule de Varignon**

En cinématique, la formule de Varignon s'écrit sous la forme suivante :

$$\overrightarrow{V_{B\in 2/1}} = \overrightarrow{V_{A\in 2/1}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/1}}$$

**Remarques** :

- Cette formule est utilisée à chaque fois que la vitesse est connue en un point d'un solide et qu'on veut la calculer en un autre point d'un même solide.
- La formule de Varignon peut être connue par moyen mnémotechnique « BABAR ».
- Lorsqu'un point est confondu pour deux solides et qu'il n'y a pas de mouvement relatif entre les solides, (centre d'une liaison pivot ou d'une liaison rotule par exemple) les vitesses sont égales ainsi, ici :




$\overrightarrow{V_{O_1\in 1/0}} = \overrightarrow{V_{O_1\in 2/0}}$, par composition des vecteurs vitesses (voir plus bas) :

$$\overrightarrow{V_{O_1\in 2/1}} = \vec{0}$$

Centrifugeuse

Calcul de $\overrightarrow{V_{O_1\in 1/0}}$.

$S_1$ et $S_0$ sont en liaison pivot de centre $O_0$, on a donc $\overrightarrow{V_{O_0\in 1/0}} = \vec{0}$

En conséquence,

$$\overrightarrow{V_{O_1\in 1/0}} = \overrightarrow{V_{O_0\in 1/0}} + \overrightarrow{O_1O_0} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \vec{0} - a\,\overrightarrow{x_1} \wedge \dot{\alpha}\overrightarrow{z_0} = a\dot{\alpha}\overrightarrow{y_1}$$

## 5. Composition des mouvements

### 5.1. Composition des vecteurs vitesses

Définition

**Composition des vecteurs vitesses**

Soient $n$ solides $S_1, S_2, \dots, S_n$ en mouvement les uns par rapport aux autres. On peut alors écrire les relations suivantes :

$$\overrightarrow{V_{A\in n/1}} = \overrightarrow{V_{A\in n/n-1}} + \overrightarrow{V_{A\in n-1/n-2}} + \cdots + \overrightarrow{V_{A\in 3/2}} + \overrightarrow{V_{A\in 2/1}}$$

Démonstration avec un seul solide intermédiaire où $A \in 2$ physiquement et $O_i$ fixe dans $R_i$, $i \in [\![0;1]\!]$ :

$$\overrightarrow{V_{A\in 2/0}} = \left[\frac{d\overrightarrow{O_0O_1}}{dt}\right]_{R_0} + \left[\frac{d\overrightarrow{O_1A}}{dt}\right]_{R_0} = \overrightarrow{V_{O_1\in 1/0}} + \left[\frac{d\overrightarrow{O_1A}}{dt}\right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{O_1A}$$

$$\overrightarrow{V_{A\in 2/0}} = \left[\frac{d\overrightarrow{O_1A}}{dt}\right]_{R_1} + \overrightarrow{V_{O_1\in 1/0}} + \overrightarrow{AO_1} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}}$$

$$\overrightarrow{V_{A\in 2/0}} = \overrightarrow{V_{A\in 2/1}} + \overrightarrow{V_{A\in 1/0}}$$

Définition

**Composition des vecteurs rotations**

Soient $n$ solides $S_1, S_2, \dots, S_n$ en mouvement les uns par rapport aux autres. On peut alors écrire les relations suivantes :

$$\overrightarrow{\Omega_{n/1}} = \overrightarrow{\Omega_{n/n-1}} + \overrightarrow{\Omega_{n-1/n-2}} + \dots + \overrightarrow{\Omega_{3/2}} + \overrightarrow{\Omega_{2/1}}$$

Démonstration avec un seul solide intermédiaire :

Pour démontrer ce résultat, prenons un vecteur $\vec{v}$ :

$$\left[\frac{d\vec{v}}{dt}\right]_{R_1} = \left[\frac{d\vec{v}}{dt}\right]_{R_0} + \overrightarrow{\Omega_{0/1}} \wedge \vec{v}$$

$$\left[\frac{d\vec{v}}{dt}\right]_{R_1} = \left[\frac{d\vec{v}}{dt}\right]_{R_2} + \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \wedge \vec{v}$$

$$\left[\frac{d\vec{v}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\vec{v}}{dt}\right]_{R_2} + \overrightarrow{\Omega_{2/0}} \wedge \vec{v} \Leftrightarrow \left[\frac{d\vec{v}}{dt}\right]_{R_0} - \left[\frac{d\vec{v}}{dt}\right]_{R_2} = \overrightarrow{\Omega_{2/0}} \wedge \vec{v}$$

En faisant la soustraction des deux premières équations :

$$\vec{0} = \left[\frac{d\vec{v}}{dt}\right]_{R_2} - \left[\frac{d\vec{v}}{dt}\right]_{R_0} + \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \wedge \vec{v} - \overrightarrow{\Omega_{0/1}} \wedge \vec{v} = \left[\frac{d\vec{v}}{dt}\right]_{R_2} - \left[\frac{d\vec{v}}{dt}\right]_{R_0} + \left(\overrightarrow{\Omega_{2/1}} - \overrightarrow{\Omega_{0/1}}\right) \wedge \vec{v}$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{d\vec{v}}{dt}\right]_{R_0} - \left[\frac{d\vec{v}}{dt}\right]_{R_2} = \left(\overrightarrow{\Omega_{2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}}\right) \wedge \vec{v}$$

En utilisant cette dernière équation et la troisième :

$$\overrightarrow{\Omega_{2/0}} \wedge \vec{v} = \left(\overrightarrow{\Omega_{2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}}\right) \wedge \vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \overrightarrow{\Omega_{2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}}$$

*Centrifugeuse*

Calcul de $\overrightarrow{V_{G\in 2/0}}$.

On a :

$$\overrightarrow{V_{G\in 2/0}} = \overrightarrow{V_{G\in 2/1}} + \overrightarrow{V_{G\in 1/0}}$$

Calculons $\overrightarrow{V_{G\in 1/0}}$ :

$$\overrightarrow{V_{G\in 1/0}} = \overrightarrow{V_{O_1\in 1/0}} + \overrightarrow{GO_1} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = a\dot{\alpha}\overrightarrow{y_1} - (b\,\overrightarrow{x_2} + c\,\overrightarrow{z_2}) \wedge \dot{\alpha}\overrightarrow{z_0}$$

$$\overrightarrow{V_{G\in 1/0}} = \dot{\alpha}(a + b\cos\beta + c\sin\beta)\,\overrightarrow{y_1}$$

Par ailleur calculons $\overrightarrow{V_{G\in 2/1}}$ :

$$\overrightarrow{V_{G\in 2/1}} = \overrightarrow{V_{O_1\in 2/1}} + \overrightarrow{GO_1} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/1}} = -(b\,\overrightarrow{x_2} + c\,\overrightarrow{z_2}) \wedge \dot{\beta}\,\overrightarrow{y_1} = -\dot{\beta}(b\,\overrightarrow{z_2} - c\,\overrightarrow{x_2})$$

Finalement,

$$\overrightarrow{V_{G\in 2/0}} = \dot{\alpha}(a + b\cos\beta + c\sin\beta)\,\overrightarrow{y_1} - \dot{\beta}(b\,\overrightarrow{z_2} - c\,\overrightarrow{x_2})$$

Il est aussi possible de calculer $\overrightarrow{V_{G\in 2/0}}$ ainsi :

$$\overrightarrow{V_{G\in 2/0}} = \left[\frac{d\overrightarrow{O_0G}}{dt}\right]_{R_0}$$

# 6. Accélération d'un point appartenant à un solide

## 6.1. Définition

**Définition**

**Accélération**

Soit un solide $S_0$ auquel est associé un repère $R_0(O,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})$. Soit un solide $S_1$ auquel est associé un repère$R_1(O_1,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})$. Le solide $S_1$ est en mouvement par rapport au solide $S_0$.

Soit un point $P$ appartenant au solide $S_1$. L'accélération du point $P$ appartenant au solide $S_1$ par rapport au solide $S_0$ se calcule donc ainsi :

$$\overrightarrow{\Gamma_{p\in 1/0}} = \left[\frac{d\overrightarrow{V_{P\in 1/0}}}{dt}\right]_{R_0}$$

## 6.2. Champ d'accélération d'un solide en mouvement

Est-ce que le champ d'accélération est un champ de vecteurs dans lequel la formule de Varignon peut s'appliquer ?

<u>Démonstration</u>

La formule de Varignon donne :

$$\overrightarrow{V_{B\in 2/1}} = \overrightarrow{V_{A\in 2/1}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/1}}$$

Si on dérive cette équation, on obtient :

$$\overrightarrow{\Gamma_{B\in 2/1}} = \overrightarrow{\Gamma_{A\in 2/1}} + \left[\frac{d(\overrightarrow{\Omega_{2/1}} \wedge \overrightarrow{AB})}{dt}\right]_{R_1}$$

Or :

$$\left[\frac{d(\overrightarrow{\Omega_{2/1}} \wedge \overrightarrow{AB})}{dt}\right]_{R_1} = \left[\frac{d\overrightarrow{\Omega_{2/1}}}{dt}\right]_{R_1} \wedge \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \wedge \left[\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right]_{R_1}$$

On obtient donc finalement avec une formule de Bour:

$$\overrightarrow{\Gamma_{B\in 2/1}} = \overrightarrow{\Gamma_{A\in 2/1}} + \left[\frac{d\overrightarrow{\Omega_{2/1}}}{dt}\right]_{R_1} \wedge \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{2/1}} \wedge \overrightarrow{AB}\right)$$

En effectuant un produit scalaire par $\overrightarrow{AB}$ de chacun des membres, et en constatant que $\overrightarrow{\Omega_{2/1}} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{2/1}} \wedge \overrightarrow{AB}\right) \cdot \overrightarrow{AB}$ est différent de 0, on en déduit :

$$\overrightarrow{\Gamma_{B\in 2/1}} \cdot \overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{\Gamma_{A\in 2/1}} \cdot \overrightarrow{AB}$$

Par conséquent, **le champ des vecteurs accélérations n'est pas un champ de vecteurs équiprojectif**. Donc la formule de Varignon ne s'applique pas au vecteur accélération. On ne peut pas faire la composition d'accélération.

**Conclusion**

Pour calculer une accélération, on sera obligé de le faire par **dérivation**. Il faudra donc préalablement calculer la vitesse correspondante.

## 7. Bilan

**Comment calculer une vitesse ? Méthode classique de résolution cinématique.**

Pour résoudre un problème de cinématique ou pour trouver la vitesse d'un point d'un solide en mouvement par rapport à un référentiel on adopte souvent la démarche suivante :

Décomposer la vitesse en mouvements élémentaires (rotation ou translation) grâce à la relation de composition des vecteurs vitesses. Par exemple : $\overrightarrow{V_{M\in 3/0}} = \overrightarrow{V_{M\in 3/2}} + \overrightarrow{V_{M\in 2/1}} + \overrightarrow{V_{M\in 1/0}}$

Selon les mouvements élémentaires obtenus :

- Si le mouvement élémentaire est une rotation, utiliser la formule de changement de point en passant par un point appartenant à l'axe de rotation (vitesse nulle sur l'axe de rotation). Par exemple si 1/0 est une rotation et que A appartient à l'axe de rotation de 1/0 alors : $\overrightarrow{V_{M\in 1/0}} = \vec{0} + \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}}$
- Si le mouvement élémentaire est une translation alors la vitesse est la même pour tous les points du solide. On utilise alors la formule de dérivation vectorielle en prenant un point qui appartient réellement au solide et pour lequel le vecteur position est simple à exprimer. Par exemple si 2/1 est une translation, $P$ un point appartenant à 2 et $O_1$ un point fixe dans $R_1$ alors $\overrightarrow{V_{P\in 2/1}} = \left[\frac{d\overrightarrow{O_1P}}{dt}\right]_{R_1}$
- Si le mouvement est une combinaison de rotation et translation et que l'on ne peut pas les décomposer on cherche un point du solide pour lequel on peut trouver la vitesse par dérivation vectorielle (attention aux conditions d'appartenance) ou un point pour lequel la vitesse est donnée puis on utilise la relation de changement de point. Par exemple si je connais la vitesse de $B \in 3$ pour le mouvement de 3/2 alors je peux déterminer $\overrightarrow{V_{M\in 3/2}} = \overrightarrow{V_{B\in 3/2}} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{3/2}}$ . Je peux utiliser la composition des vecteurs angulaires pour $\overrightarrow{\Omega_{3/2}}$.

**Savoir-faire**

Vous devez être capables de :

- Déterminer la trajectoire d'un point appartenant à un solide par rapport à un autre.
- Modéliser le comportement cinématique d'un point appartenant à un solide.
- Déterminer l'accélération en un point.