



# Correction DM 2 - SI

## Consignes

- Copies propres et bien présentées: encadrer vos résultats, souligner les applications numériques (avec une règle bien sûr)...
- **Aucun retard ne sera accepté.** *Date de rendu au pied des autres pages.*
- Ne pas oublier de rendre les Documents Réponses (DR), avec vos noms. Même s'ils ne sont pas remplis.

## 1. Analyse des performances du système de correction de portée de phare

### 1.1 Présentation du système

L'assiette d'un véhicule se modifie avec sa charge, le profil de la route ou les conditions de conduite (phase de freinage ou d'accélération). Cette modification entraîne une variation d'inclinaison de l'axe du faisceau lumineux produit par les phares du véhicule. Ceux-ci peuvent alors éblouir d'autres conducteurs ou mal éclairer la chaussée (Figure 1).

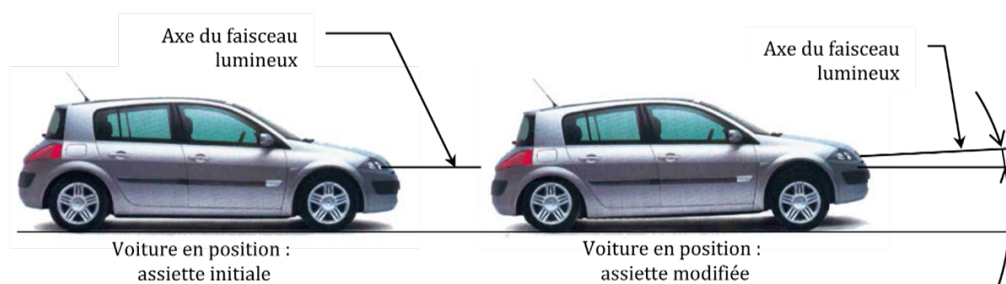


FIGURE 1 – Modification de l'orientation du faisceau lumineux en fonction de l'assiette

Le système de correction de l'assiette de la portée de phare vise à éclairer, de façon optimale, la route (quel que soient l'état de la route et l'état de chargement de la voiture), ce qui est obtenu par la modification automatique de l'orientation du faisceau lumineux en fonction de l'assiette du véhicule.

### 1.2 Structure de l'asservissement

L'angle de consigne  $\theta_{cons}(t)$  est défini par le conducteur. La sortie du système est l'angle  $\theta_{f/r}(t)$  d'inclinaison du faisceau lumineux par rapport à la route. La perturbation principale est l'inclinaison  $\theta_{c/r}(t)$  de la voiture par rapport à la route.

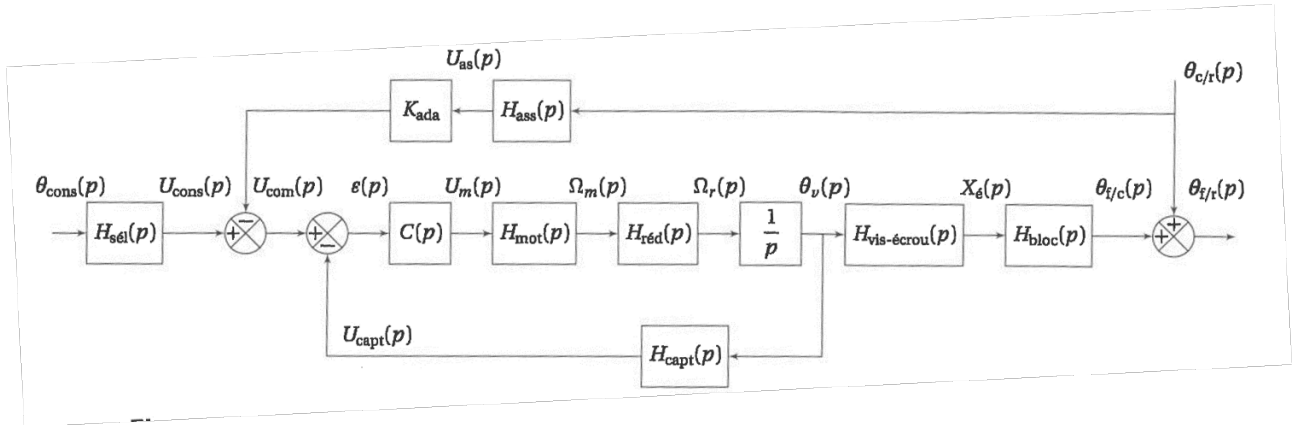


FIGURE 2 – Schéma-blocs de l'orientation du faisceau lumineux en fonction de l'assiette

Les différentes fonctions de transfert sont définies :

$$\begin{aligned}
 H_{sel}(p) &= K_{sel} & H_{red}(p) &= K_{red} = 2,07 \cdot 10^{-3} \\
 H_{ass}(p) &= K_{ass} = 0,14 V \cdot s^{-1} & H_{vis/crou}(p) &= K_{ve} = 9,55 \cdot 10^{-4} m \cdot rad^{-1} \\
 H_{capt}(p) &= K_{capt} = 1,273 V \cdot rad^{-1} & H_{bloc}(p) &\text{ à déterminer} \\
 H_{mot}(p) &= \frac{K_{mot}}{1 + \tau p} & \text{On note } K &= K_{sel} K_{mot} K_{red} K_{ve} H_{bloc}
 \end{aligned}$$

Une fermeture géométrique sur le système mécanique nous permet d'obtenir la loi entrée-sortie  $(h - h \cos(\theta_{f/c}))^2 + (x_{\epsilon}(t) - h \sin(\theta_{f/c}) - l)^2 = l^2$ . En mettant cette expression sous la forme  $\theta_{f/c} = f(x_{\epsilon})$ , on obtient la courbe suivante :

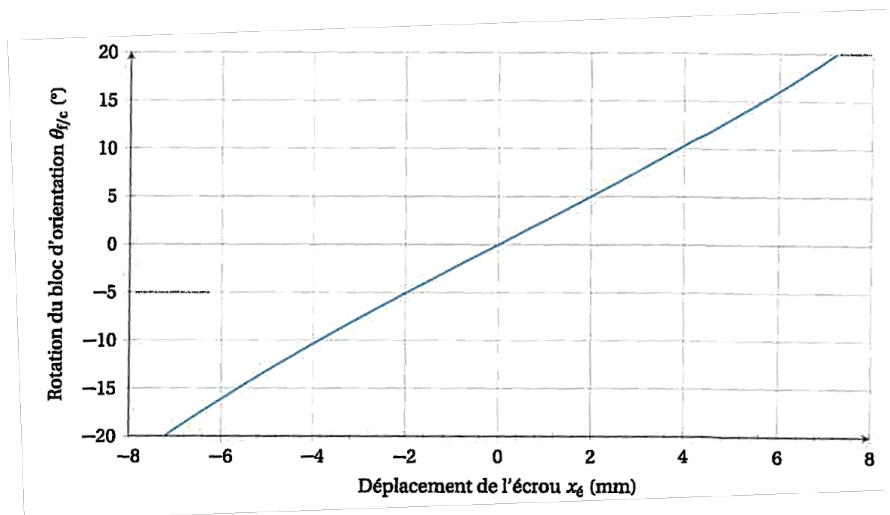


FIGURE 3 – Évolution de l'angle du bloc d'orientation en fonction du déplacement de l'écrou.

**Question 1:** Proposer un modèle simple pour la fonction de transfert  $H_{bloc}$ . Identifier la valeur du paramètre associé en veillant à bien respecter les unités.

**Réponse 1:** La courbe de comportement proposée peut être linéarisée et  $\theta_{f/c} = K_{bloc} X_e$ , d'où

$$K_{bloc} = \frac{40}{14,5 \cdot 10^{-3}} = 2759^\circ \cdot m^{-1}, \text{ ou } 48,5 \text{ rad} \cdot m^{-1}.$$

### 1.3 Cahier des charges

Exigence	Critères
Stabilité	Le système doit être stable
Précision	L'erreur statique, définie pour une entrée échelon, doit être nulle, y compris pour une perturbation.
Rapidité	Le temps de réponse à 5% pour une entrée en échelon doit être inférieur à 0,25 s.

**Question 2:** Afin que le système de correction de phare fonctionne de façon optimale, déterminer l'expression de  $K_{sél}$  en fonction de  $K_{capt}$ ,  $H_{bloc}$  et  $K_{ve}$ ; pour cela  $\theta_{c/r} = 0$ ,  $\theta_{cons} = \theta_{f/r}$  et  $\varepsilon = 0$ . Ensuite en déduire le gain  $K_{ada}$  en fonction de  $K_{capt}$ ,  $H_{bloc}$ ,  $K_{ass}$  et  $K_{ve}$ ; pour cela  $\theta_{cons} = 0$ ,  $\theta_{c/r} = -\theta_{f/r}$  et  $\varepsilon = 0$ .

**Réponse 2:** Avec la première option :  $\varepsilon = U_{cons} - U_{capt}$  soit  $0 = H_{sél} \theta_{cons} - \frac{H_{capt}}{H_{bloc} H_{ve}} \theta_{f/r}$  d'où

$$K_{sél} = \frac{K_{capt}}{H_{bloc} K_{ve}}.$$

Avec la seconde option :  $\varepsilon = -K_{ada} H_{ass} \theta_{c/r} - U_{capt}$  soit  $0 = -K_{ada} H_{ass} \theta_{c/r} -$

$$\frac{H_{capt}}{H_{bloc} H_{ve}} (\theta_{f/r} - \theta_{c/r}) \text{ d'où } K_{ada} = \frac{2K_{capt}}{H_{bloc} K_{ve} K_{ass}}.$$

### 1.4 Identification de la fonction de transfert du moteur

Dans le schéma-bloc de la figure 2, fonction de transfert  $H_{mot} = \frac{K_{mot}}{1 + \tau p}$  est en réalité la fonction du moteur équipé de sa génératrice tachymétrique dont le schéma-blocs est représenté figure 4.

La génératrice tachymétrique est modélisable par un gain pur  $K_{tachy} = \frac{1}{300} \text{ V} \cdot \text{s} \cdot \text{rad}^{-1}$ .

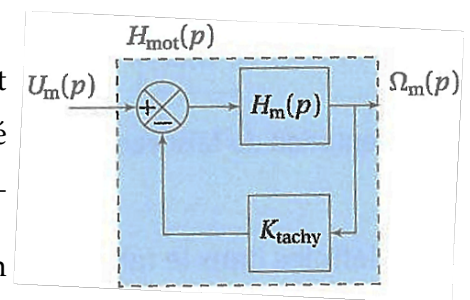


FIGURE 4 – Structure interne du moteur.

Afin de déterminer les coefficients de la fonction de transfert  $H_m(p)$  du moteur seul, une mesure sur une sollicitation en échelon de tension unitaire (amplitude 1 V) est réalisée : cette réponse indicielle unitaire ainsi qu'un zoom à l'origine de cette réponse indicielle sont donnés figure 5.

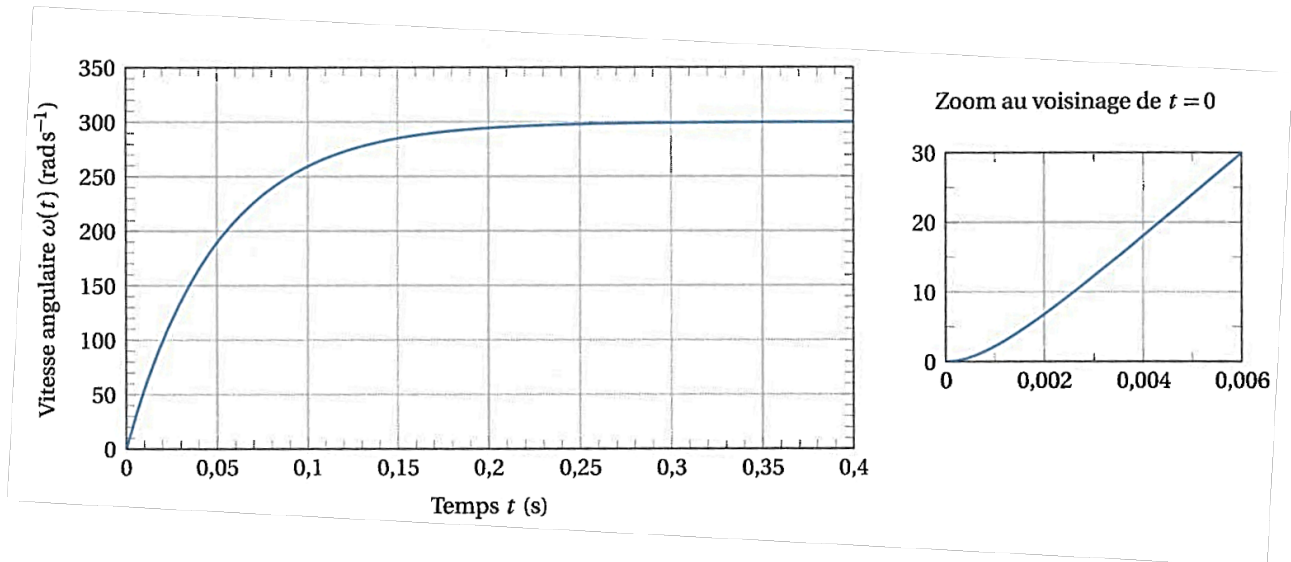


FIGURE 5 – Réponse indicielle unitaire du moteur sans boucle tachymétrique

**Question 3:** À la vue du zoom de la figure 5, proposer un modèle pour  $H_m(p)$ . A quel modèle pouvons nous prendre ce système à la vue de la réponse sur le graphe de gauche ?

**Réponse 3:** Le zoom de la figure 5 montre une tangente à l'origine horizontale et la courbe complète montre une valeur asymptotique constante et une absence de dépassement : le moteur seul peut donc être modélisé par une fonction de transfert du deuxième ordre avec un fort facteur d'amortissement (absence de dépassement). Ce deuxième ordre peut donc être considéré comme le produit des deux premiers ordres avec deux constantes de temps très différentes (l'une très petite, l'autre très grande), soit :

$$H_m(p) = \frac{K_m}{(1 + \tau_m p)(1 + \tau_e p)}$$

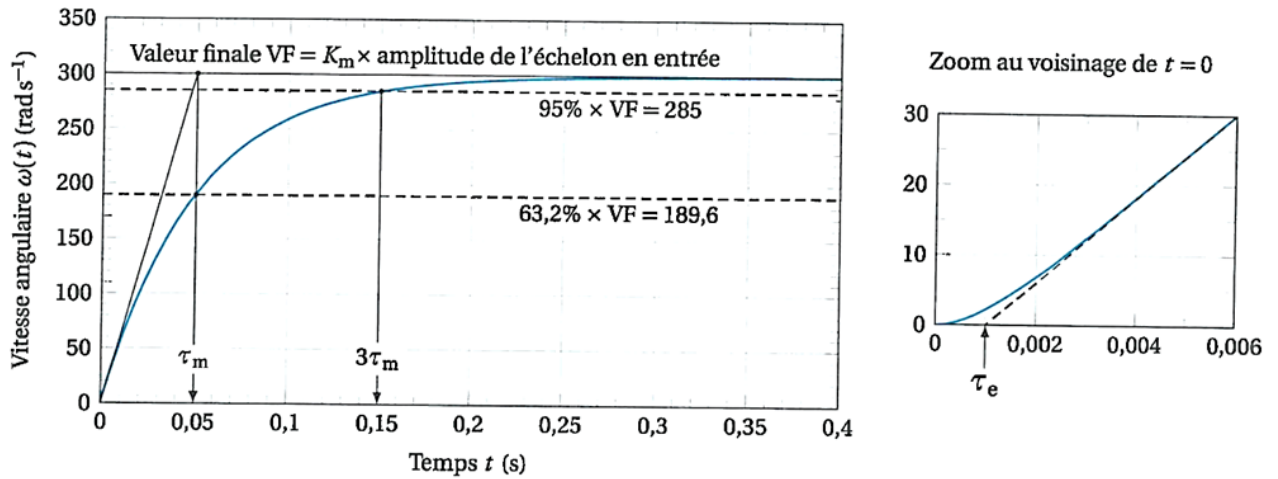
En regardant l'évolution globale, il apparaît qu'il est possible de négliger la plus petite de deux constantes de temps, ce qui permet d'assimiler la réponse à celle

$$\text{d'un premier ordre, soit : } H_m(p) = \frac{K_m}{1 + \tau_m p}$$

**Question 4:** En assimilant cette réponse à un premier ordre, déterminer les paramètres de la fonction de transfert du moteur seul  $H_m(p)$ .

**Réponse 4:**

- Le gain statique est obtenu par la valeur atteinte en régime permanente car l'entrée est unitaire :  $K_m = 300 \text{rad.s}^{-1}.V^{-1}$ .
- La constante de temps est obtenue par l'instant où la sortie atteint 63,2% de la valeur finale, soit une vitesse  $\omega = 189,6 \text{rad.s}^{-1}$ . On estime alors :  $\tau_m = 0,05 \text{s}$ .



**Question 5:** En déduire alors la fonction de transfert de l'ensemble composé du moteur et de sa boucle tachymétrique  $H_{mot}(p)$ . Faire l'application numérique des caractéristiques de la fonction de transfert.

**Réponse 5:** Par une formule de Black sur le schéma bloc de la figure 4, il vient :

$$H_{mot}(p) = \frac{K_m}{1 + \tau_m p + K_m K_{tachy}} \text{ soit } H_{mot}(p) = \frac{K_m}{1 + K_m K_{tachy}} \frac{1}{1 + \frac{\tau_m}{1 + K_m K_{tachy}} p}$$

On identifie  $K_{mot} = \frac{K_m}{1 + K_m K_{tachy}} = 150 \text{rad.s}^{-1}.V^{-1}$  et

$$\tau = \frac{\tau_m}{1 + K_m K_{tachy}} = 26 \text{ms.}$$

**1.5 Calcul des fonctions de transfert**

La grandeur de sortie  $\theta_{f/r}(t)$  du système étudié dépend de l'entrée principale  $\theta_{cons}(t)$  et de la perturbation  $\theta_{c/r}(t)$  : la relation entre l'entrée, la perturbation et la sortie est donnée par la relation issue du théorème de superposition :

$$\theta_{f/r}(p) = H_{poursuite}(p)\theta_{cons}(p) + H_{régulation}(p)\theta_{c/r}(p)$$

**Question 6:** En supposant que la correction est unitaire, c'est à dire avec  $C(p) = 1$ , montrer que les fonctions de transfert  $H_{poursuite}(p)$  et  $H_{régulation}(p)$  peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$H_{poursuite}(p) = \frac{K}{(1 + \tau p)p + K} \text{ et } H_{régulation}(p) = 1 - \frac{K}{(1 + \tau p)p + K}$$

**Réponse 6:** En lisant le schéma bloc par la fin :  $\theta_{f/r} = \theta_{f/c} + \theta_{c/r} = K_{ve}K_{bloc}\theta_v + \theta_{c/r}$

On peut ensuite réaliser une formule de Black avec la boucle interne :

$$\frac{\theta_v}{U_{com}} = \frac{K_{mot}K_{red}}{(1 + \tau p)p + K_{mot}K_{red}K_{capt}}$$

$$\text{On en déduit : } \theta_{f/r} = \frac{K_{ve}K_{bloc}K_{mot}K_{red}}{(1 + \tau p)p + K_{mot}K_{red}K_{capt}} U_{com} + \theta_{c/r}.$$

Par ailleurs  $U_{com} = \theta_{cons}K_{sél} - K_{ass}K_{ada}\theta_{c/r}$ , d'où :

$$\theta_{f/r} = \frac{K_{ve}K_{bloc}K_{mot}K_{red}K_{sél}}{(1 + \tau p)p + K_{mot}K_{red}K_{capt}} \theta_{cons} - \frac{K_{ve}K_{bloc}K_{mot}K_{red}K_{ass}K_{ada}}{(1 + \tau p)p + K_{mot}K_{red}K_{capt}} \theta_{c/r} + \theta_{c/r}$$

Comme  $K = K_{sél}K_{mot}K_{red}K_{ve}K_{bloc}$  or  $K_{sél} = \frac{K_{capt}}{K_{bloc}K_{ve}}$  d'où  $K = K_{capt}K_{mot}K_{red}$ . De

plus  $K_{capt} = \frac{K_{ada}K_{ve}K_{bloc}K_{ass}}{2}$  d'où  $K = \frac{K_{ada}K_{ve}K_{bloc}K_{ass}K_{mot}K_{red}}{2}$ . On en déduit :

$$\theta_{f/r} = \frac{K}{(1 + \tau p)p + K} \theta_{cons} + \left(1 - \frac{2K}{(1 + \tau p)p + K}\right) \theta_{c/r}.$$

## 1.6 Vérification des performances

Dans le cas d'une correction unitaire, la fonction de transfert de poursuite peut se mettre sous la forme :

$$H_{poursuite}(p) = \frac{1}{1 + \frac{1}{K}p + \frac{\tau}{K}p^2}$$

La perturbation  $\theta_{c/r}$  est considérée nulle pour l'instant.

**Question 7:** Calculer l'erreur statique (pour une entrée en échelon unitaire) du système ainsi modélisé. Conclure sur l'exigence de précision.

**Réponse 7:** D'après le théorème de la valeur finale, l'erreur statique est :

$$e_{rs} = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \theta_{cons}(p) (1 - H_{poursuite}(p)) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{p} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{K}p + \frac{\tau}{K}p^2}\right) = 0$$

L'erreur statique est nulle, l'exigence de précision est satisfaite.

Maintenant, la perturbation est non nulle et la consigne  $\theta_{cons}(p)$  est considérée nulle.

**Question 8:** Calculer l'erreur statique liée à une perturbation en échelon unitaire. Conclure sur l'exigence de précision.

**Réponse 8:** D'après le théorème de la valeur finale, l'erreur statique est :

$$e_{rs} = \lim_{p \rightarrow 0} p(\theta_{cons}(p) - H_{régulation}(p)\theta_{c/r}(p)) = \lim_{p \rightarrow 0} p \left( 0 - H_{régulation}(p) \frac{1}{p} \right) = \lim_{p \rightarrow 0} -p \frac{1}{p} \left( 1 - \frac{2K}{(1 + \tau p)p + K} \right) = 1$$

L'erreur est non nulle, l'exigence de précision vis à vis de la perturbation n'est pas respectée.

Les applications numériques conduisent à la fonction de transfert de poursuite suivante :

$$H_{poursuite}(p) = \frac{1}{1 + 2,53p + 65,7 \cdot 10^{-3}p^2}$$

**Question 9:** Calculer la pulsation propre non amortie  $\omega_0$  et le facteur d'amortissement  $\xi$  de la fonction de transfert de poursuite. À l'aide de l'abaque donné figure 6, en déduire le temps de réponse à 5% du système. L'exigence de rapidité est-elle vérifiée?

**Réponse 9:** Par identification avec une forme canonique d'une fonction de transfert du second ordre, on trouve que la pulsation propre est  $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{\tau}} =$

$$\sqrt{\frac{1}{65,7 \cdot 10^{-3}}} = 3,9 \text{ rad.s}^{-1} \text{ et le facteur d'amortissement est } \frac{2\xi}{\omega_0} = 2,53 \iff \xi = \frac{2,53\omega_0}{2} = 4,93.$$

Grâce à l'abaque, on trouve que  $t_r \cdot \omega_0 = 30$  soit  $t_r = 7,7\text{s}$ . L'exigence de rapidité demande un temps de réponse à 5% inférieur à  $0,25\text{s}$ , elle n'est donc pas satisfaite.

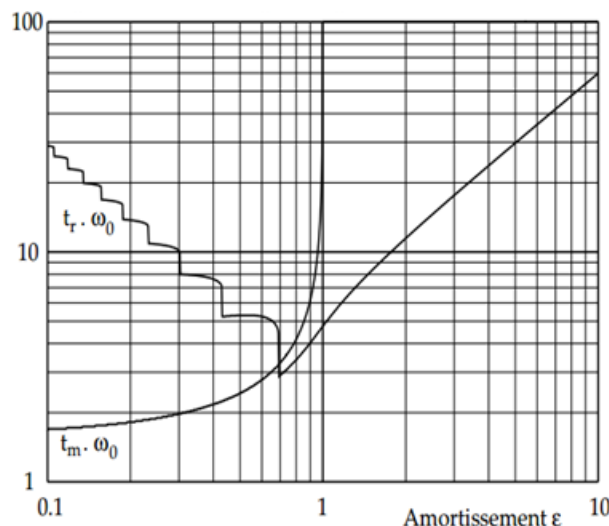


FIGURE 6 – Temps de réponse réduit ( $\omega_0 t_{5\%}$ ) en fonction de la valeur du facteur d'amortissement  $\xi$ .

## 1.7 Synthèse d'une correction proportionnelle

Afin de respecter le temps de réponse à 5%, un correcteur proportionnel est mis en place : sa fonction de transfert est  $C(p) = K_c$ .

**Question 10:** Donner la nouvelle fonction de transfert de poursuite en tenant compte du correcteur proportionnel. Les performances en stabilité et en précision du système sont-elles modifiées ?

**Réponse 10:** En reprenant les calculs précédents, on trouve rapidement que  $H_{poursuite}(p) = \frac{KC(p)}{(1 + \tau p)p + KC(p)}$ , soit  $H_{poursuite}(p) = \frac{1}{1 + \frac{1}{KK_c}p + \frac{\tau}{KK_c}p^2}$ .

Les coefficients du polynôme au dénominateur sont tous positifs, le système reste donc stable. De plus le gain de la fonction de transfert est toujours de 1, le système reste précis.

**Question 11:** Déterminer la valeur de  $K_c$  permettant de vérifier l'exigence du temps de réponse à 5%, dans le cas où les dépassements sont autorisés et dans le cas où ils ne le sont pas.

**Réponse 11:** On a  $\omega_{0corr} = \sqrt{\frac{KK_c}{\tau}}$  et  $\xi_{corr} = \frac{1}{2\sqrt{\tau KK_c}}$  d'où  $K_c = \frac{1}{4\xi^2\tau K}$ . On avait  $K \simeq 0,39$  et  $\tau = 0,026s$ . Dans le cas où les dépassement sont autorisés, on sait que le mode le plus rapide est atteint pour  $\xi = \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0,7$ . On en déduit  $K_c = 51,13$ . De plus d'après l'abaque,  $t_r \cdot \omega_{0corr} = 3$ . Dans ce cas,  $t_r = 107ms < 0,25s$  et l'exigence de rapidité est satisfaite. Dans le cas où les dépassement ne sont pas autorisés, on sait que le mode le plus rapide est atteint pour  $\xi = 1$ . On en déduit  $K_c = 24,3$ . De plus d'après l'abaque  $t_r \cdot \omega_{0corr} = 5$ . Dans ce cas,  $t_r = 260ms > 0,25s$  et l'exigence de rapidité n'est pas satisfaite.

On en conclut qu'il est nécessaire d'accepter les dépassements pour satisfaire l'exigence de rapidité.