Correction DM 3 - SI

Consignes

— Copies propres et bien présentées: $\boxed{\text{encadrer vos résultats}}$, souligner les applications numériques (avec une règle bien sûr)...

— **Aucun retard ne sera accepté.** *Date de rendu au pied des autres pages.*

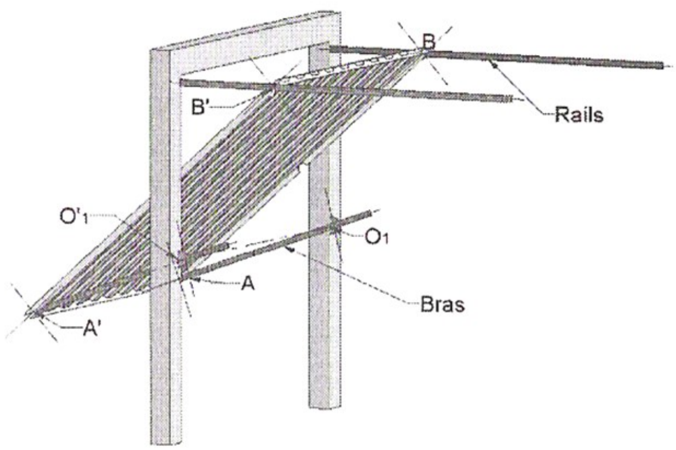
1. Portail basculant

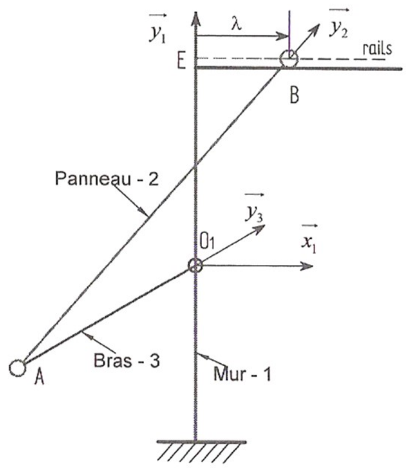
1.1 Présentation

Le portail basculant est articulé par rapport au mur grâce à deux bras (3). Les deux bras (3) pivotent par rapport au mur (1) en O_1 et O'_1. Ils sont articulés en A et A' sur le panneau (3). Le panneau (3) coulisse en B et B' sur deux rails fixés sur le plafond, grâce à des galets.

Pour l'étude nous utiliserons le paramétrage suivant :

- le repère R_1 est lié au mur (1);
- le repère R_2 est associé au panneau (2);
- le repère R_3 est associé au bras (3).





Données

On donne : $\overrightarrow{O_1A} = -a\vec{y_3}$; $\overrightarrow{AB} = 2a\vec{y_2}$; $\overrightarrow{O_1E} = a\vec{y_1}$; $\overrightarrow{EB} = \lambda\vec{x_1}$; $(\vec{x_1}, \vec{x_2}) = (\vec{y_1}, \vec{y_2}) = \beta$ et $(\vec{x_1}, \vec{x_3}) = (\vec{y_1}, \vec{y_3}) = \theta$.

On considère que la liaison entre le panneau (2) et le rail est une ponctuelle en B de normal $\vec{y_1}$. On pose $\vec{z} = \vec{z_1} = \vec{z_2} = \vec{z_3}$.

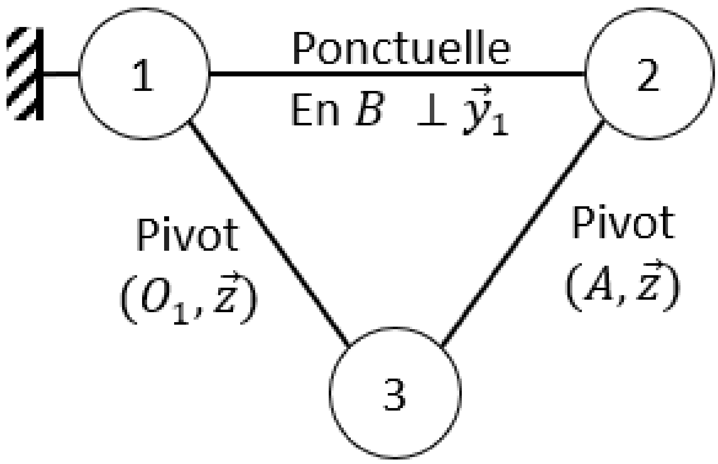
Question 1: Quelle hypothèses simplificatrices avons nous faites/pouvons nous faire ?

Réponse 1: Le système est symétrique, nous considérons qu'une partie du système. Aussi nous considérons le problème plan.

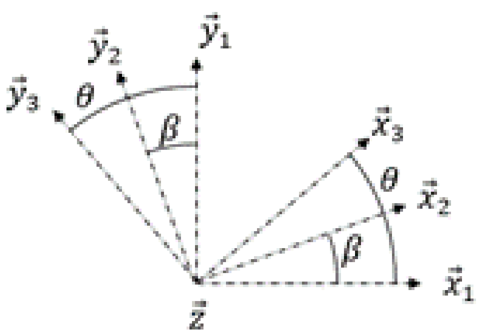
1.2 Étude

Question 2: Tracer le graphe des liaisons du système.

Réponse 2:



Question 3: Tracer la ou les figure(s) de changement de base.



Réponse 3:

Question 4: Donner les vecteurs rotation $\overrightarrow{\Omega_{3/1}}$, $\overrightarrow{\Omega_{2/1}}$ et $\overrightarrow{\Omega_{3/2}}$.

Réponse 4: Les vecteurs sont : $\boxed{\overrightarrow{\Omega_{3/1}} = \dot{\theta}\vec{z}\,;\, \overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \dot{\beta}\vec{z} \text{ et } \overrightarrow{\Omega_{3/2}} = (\dot{\theta}-\dot{\beta})\vec{z}}$

Question 5: Écrire les torseurs sans définir de nouvelles inconnues, *c'est à dire qu'il faut déterminer les expressions des éléments de réduction.*

Réponse 5:

$$\{\mathcal{V}_{3/1}\} = \left\{\begin{array}{cc} - & 0 \\ - & 0 \\ \dot{\theta} & - \end{array}\right\}_{O_1(-,-,\vec{z})}$$

$$\{\,\mathrm{V}_{2/1}\} = \left\{\begin{array}{cc} - & \dot{\lambda} \\ - & 0 \\ \dot{\beta} & - \end{array}\right\}_{B(\vec{x_1},-,\vec{z})}$$

$$\{\,\mathrm{V}_{3/2}\} = \left\{\begin{array}{cc} - & 0 \\ - & 0 \\ \dot{\theta}-\dot{\beta} & - \end{array}\right\}_{A(-,-,\vec{z})}$$

Question 6: Déterminer les relations entre les paramètres géométriques :

(a). λ en fonction de θ.
(b). β en fonction de θ.

Réponse 6: Il s'agit de réaliser une fermeture géométrique puis d'éliminer à tour de rôle β et λ : $\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AO_1}+\overrightarrow{O_1E}=\vec{0}$
Soit $\overrightarrow{EB}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{O_1A}+\overrightarrow{O_1E}=\vec{0} \iff \lambda\vec{x_1}-2a\vec{y_2}+a\vec{y_3}+a\vec{y_1}=\vec{0}$
En décomposant sur $\vec{x_1}$ et $\vec{y_1}$:
$\lambda\vec{x_1}-2a(\cos(\beta)\vec{y_1}-\sin(\beta)\vec{x_1})+a(\cos(\theta)\vec{y_1}-\sin(\theta)\vec{x_1})+a\vec{y_1}=\vec{0}$
En projection sur ces deux vecteurs on obtient le système suivant :
$$\left\{\begin{array}{l} \lambda+2a\sin(\beta)-a\sin(\theta)=0 \\ -2a\cos(\beta)+a\cos(\theta)+a=0 \end{array}\right.$$

(a) On souhaite éliminer β, pour cela on l'isole. Comme il s'agit d'un angle, on passe les équations au carré puis on les somme :
$4a^2(\cos^2(\beta)+\sin^2(\beta))=(a\sin(\theta)-\lambda)^2+(a\cos(\theta)+a)^2$
$\iff \underline{4a^2=(a\sin(\theta)-\lambda)^2+(a\cos(\theta)+a)^2}$
Si on sait que $\theta \leq 0$ et $\lambda \geq 0$, on peut en déduire : $\boxed{\lambda = a\sin(\theta)+a\sqrt{4-(1+cos(\theta))^2}}$.

(b) Cette fois-ci, on souhaite éliminer λ, pour cela on l'isole. L'équation scalaire issue de la projection sur $\vec{y_1}$ donne directement : $\boxed{\cos(\beta)=\dfrac{1+\cos(\theta)}{2}}$.

Question 7: Déterminer $\overrightarrow{V_{A\in 2/1}}$ en fonction de $\dot{\theta}$.

Réponse 7: La composition des vitesses donne : $\overrightarrow{V_{A\in 2/1}}=\overrightarrow{V_{A\in 2/3}}+\overrightarrow{V_{A\in 3/1}}$. Or $\overrightarrow{V_{A\in 2/3}}=\vec{0}$ car A est le centre de la liaison pivot entre 2 et 3.
Calculons $\overrightarrow{V_{A\in 2/1}}=\overrightarrow{V_{A\in 3/1}}$:
$\overrightarrow{V_{A\in 3/1}}=\overrightarrow{V_{O_1\in 3/1}}+\overrightarrow{AO_1}\wedge\overrightarrow{\Omega_{3/1}}$
$\iff \overrightarrow{V_{A\in 3/1}}=\vec{0}+a\vec{y_3}\wedge\dot{\theta}\vec{z}$
$\iff \overrightarrow{V_{A\in 3/1}}=a\dot{\theta}\vec{x_3}$
D'où $\boxed{\overrightarrow{V_{A\in 2/1}}=a\dot{\theta}\vec{x_3}}$.

Question 8: Déterminer $\overrightarrow{V_{B\in 3/1}}$ en fonction de $\dot{\theta}$.

Réponse 8: D'après la formule de Varignon : $\overrightarrow{V_{B\in 3/1}} = \overrightarrow{V_{O_1\in 3/1}} + \overrightarrow{BO_1} \wedge \overrightarrow{\Omega_{3/1}}$

$\iff \overrightarrow{V_{B\in 3/1}} = \vec{0} + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AO_1}) \wedge \dot{\theta}\vec{z}$

$\iff \overrightarrow{V_{B\in 3/1}} = \vec{0} + (-2a\vec{y_2} + a\vec{y_3}) \wedge \dot{\theta}\vec{z}$

$\iff \boxed{\overrightarrow{V_{B\in 3/1}} = a\dot{\theta}(-2\vec{x_2} + \vec{x_3})}$.

Question 9: Soit G_2 tel que $\overrightarrow{AG_2} = a\vec{y_2}$, déterminer $\overrightarrow{V_{G_2\in 2/1}}$ puis l'accélération $\overrightarrow{\Gamma_{G_2\in 2/1}}$, en fonction de θ, β et de leur dérivée.

Réponse 9: D'après la formule de Varignon : $\overrightarrow{V_{G_2\in 2/1}} = \overrightarrow{V_{A\in 2/1}} + \overrightarrow{G_2A} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/1}}$

$\iff \overrightarrow{V_{G_2\in 2/1}} = a\dot{\theta}\vec{x_3} - a\vec{y_2} \wedge \dot{\beta}\vec{z}$

$\iff \boxed{\overrightarrow{V_{G_2\in 2/1}} = a(\dot{\theta}\vec{x_3} - \dot{\beta}\vec{x_2})}$.

L'accélération est obtenue (uniquement) par dérivation du vecteur vitesse :

$\overrightarrow{\Gamma_{G_2\in 2/1}} = \left.\dfrac{d\overrightarrow{V_{G_2\in 2/1}}}{dt}\right|_{R_1}$

$\iff \overrightarrow{\Gamma_{G_2\in 2/1}} = a\ddot{\theta}\vec{x_3} - a\ddot{\beta}\vec{x_2} + a\dot{\theta}\left.\dfrac{d\vec{x_3}}{dt}\right|_{R_1} - a\dot{\beta}\left.\dfrac{d\vec{x_2}}{dt}\right|_{R_1}$

D'après la formule de Bour : $\left.\dfrac{d\vec{x_3}}{dt}\right|_{R_1} = \left.\dfrac{d\vec{x_3}}{dt}\right|_{R_3} + \overrightarrow{\Omega_{3/1}} \wedge \vec{x_3} = \vec{0} + \dot{\theta}\vec{z} \wedge \vec{x_3} = \dot{\theta}\vec{y_3}$

De même $\left.\dfrac{d\vec{x_3}}{dt}\right|_{R_1} = \dot{\beta}\vec{y_2}$

On en déduit $\boxed{\overrightarrow{\Gamma_{G_2\in 2/1}} = a\ddot{\theta}\vec{x_3} - a\ddot{\beta}\vec{x_2} + a\dot{\theta}^2\vec{y_3} - a\dot{\beta}^2\vec{y_2}}$.