

# Analyse fréquentielle des systèmes

## Compétences

### Modéliser :

- Identifier le comportement d'un système pour l'assimiler à un modèle canonique, à partir d'une réponse harmonique
- Etablir un modèle de comportement à partir de relevés expérimentaux

### Résoudre :

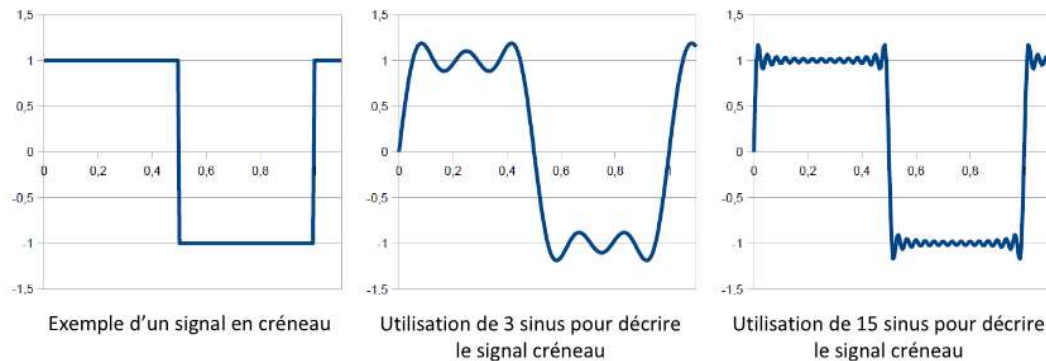
- Déterminer à partir d'un schéma bloc ou d'une fonction de transfert les grandeurs caractérisant les performances du modèle
- Tracer une réponse harmonique

## Problématique

L'objectif de ce chapitre est de prévoir les effets d'une entrée de type sinusoïdale (Un signal quelconque peut se décomposer en somme de fonctions périodiques).

Le signal réel en entrée d'un système est rarement un signal simple (échelon, rampe). La théorie développée par Fourier permet de considérer que tout signal (périodique ou non) résulte de la sommation d'un ensemble de composantes sinusoïdales de fréquences et d'amplitudes différentes.

Par conséquent, pour déterminer la réponse d'un système linéaire à un signal quelconque, on détermine l'ensemble des réponses de ce système à des signaux sinusoïdaux répartis dans une plage de fréquence adaptée au signal quelconque. Cette étude s'appelle **l'analyse fréquentielle**.



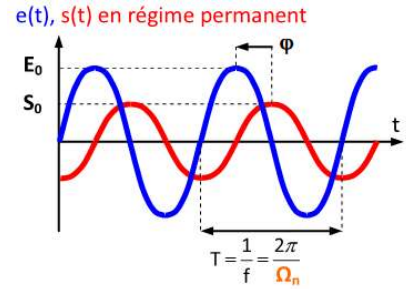
## 1. Réponse harmonique

Soit un Système Linéaire Continu et Invariant d'entrée  $e(t)$  et de sortie  $s(t)$  régi par une équation différentielle à coefficients constants du type :

$$a_0 \cdot s(t) + a_1 \cdot \frac{ds}{dt}(t) + \dots + a_d \cdot \frac{d^d s}{dt^d}(t) = b_0 \cdot e(t) + b_1 \cdot \frac{de}{dt}(t) + \dots + b_n \cdot \frac{d^n e}{dt^n}(t)$$

Lorsque l'entrée d'un SLCI est un signal sinusoïdal du type

$e(t) = E_0 \cdot \sin(\Omega_n \cdot t)$ , il faut chercher une sortie en régime permanent sous la forme  $s(t) = S_0 \cdot \sin(\Omega_n \cdot t + \varphi)$ . On appelle réponse harmonique, la sortie  $s(t)$  en régime permanent d'un système soumis à une entrée  $e(t)$  périodique.



On peut caractériser l'effet du système uniquement avec deux grandeurs qui sont :

- le rapport des amplitudes  $\frac{S_0}{E_0}$  appelé gain du système et qui représente l'amplification du système ;
- le déphasage  $\varphi$  appelé phase et qui représente le décalage de  $s(t)$  par rapport à  $e(t)$ .

Les courbes  $e(t)$  et  $s(t)$  dessinées ne sont valables que pour la pulsation  $\Omega_n$  du signal d'entrée. L'objet d'une étude fréquentielle d'un système est d'étudier l'évolution du gain et de la phase, en fonction de la variation de la valeur de la pulsation  $\omega$  ( $\omega = \Omega_n$  avec  $0 < \Omega_n < +\infty$ ) du signal d'entrée, sur la réponse harmonique du système.

La principale difficulté lors de l'étude des SLCI vient de l'équation différentielle du système qui est généralement trop complexe. Par conséquent, pour réaliser l'étude fréquentielle d'un système, on exploite aussi la fonction de transfert du système  $H(p)$ .

Soit le système représenté par la fonction de transfert  $H(p)$ .

On remplace  $p$  par  $j\omega$ ,  $j$  étant le nombre imaginaire tel que  $j^2 = -1$  et  $\omega$  la pulsation du signal d'entrée (en  $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ ) :

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

$f$  fréquence du signal d'entrée ( $\text{s}^{-1}$ )

$T$  période du signal d'entrée (s)

La fonction de transfert du système s'écrit donc  $H(j\omega)$ .

Les valeurs de  $S_0$  et  $\varphi$  dépendent de la fonction de transfert  $H(j\omega)$ .

En effet, on a :

$$\begin{cases} S_0 = |H(j\omega)|E_0 \\ \varphi = \arg(H(j\omega)) \end{cases}$$

La connaissance de la fonction de transfert d'un système permet donc de connaître très simplement sa réponse à une entrée harmonique.

## 2. Le diagramme de Bode

Modules et arguments d'une fonction de transfert complexe sont représentés graphiquement selon le diagramme de Bode (de gain et de phase).

On parle de lieu de transfert.

Dans tous les cas, ils permettent de déterminer graphiquement et simplement le comportement du système en fonction de la pulsation du signal d'entrée, et de déterminer des valeurs de gain et phase pour des pulsations particulières.

## 2.1. Définition du diagramme de Bode

Le diagramme de Bode est un lieu de transfert, c'est à dire une représentation graphique fréquentielle de la fonction de transfert (ou transmittance)  $H(j\omega)$ .

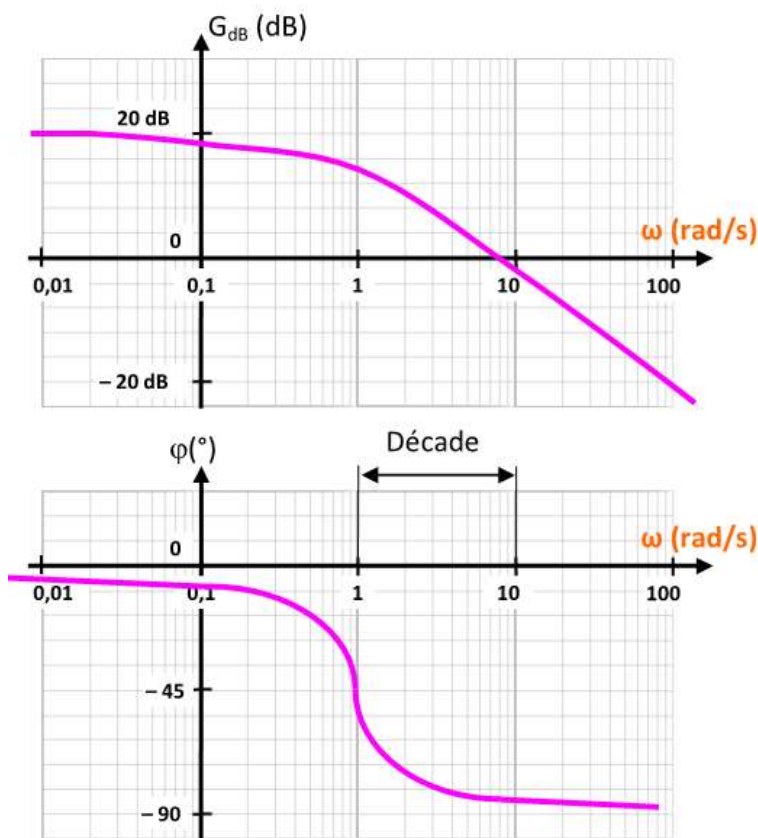
Le diagramme de Bode est constitué de deux courbes correspondant aux tracés du module en décibels et la phase de  $H(j\omega)$  en fonction de la fréquence (ou de la pulsation) sur une échelle logarithmique en base 10.

Le module  $|H(j\omega)|$ , noté  $G_{dB}$ , est exprimé en décibels. La phase est exprimée **en degrés**.

Pour calculer un module en  $G_{dB}$ , on effectue l'opération suivante :  $G_{dB} = 20 \log|H(j\omega)|$ .

On représente donc graphiquement deux courbes :

$$G_{dB} = 20 \log|H(j\omega)| \quad ; \quad \varphi = \arg H(j\omega)$$



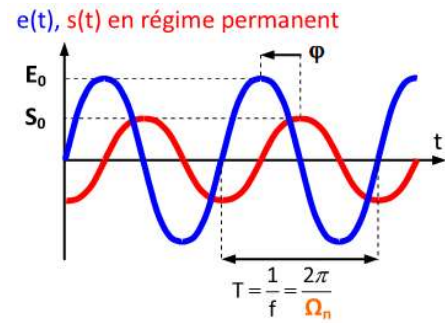
On voit que les tracés sont effectués sur du papier à graduations particulières. On retrouve une graduation logarithmique en base 10 sur 3 ou 4 décades en abscisse et une graduation millimétrée en ordonnée. Le papier étant généralement vierge, il faut construire l'échelle des ordonnées ainsi que son origine puis l'échelle des abscisses.

**Sur l'échelle logarithmique en base 10, il n'y a pas d'origine des abscisses. Par conséquent, il n'y a jamais de 0 sur l'axe des abscisses.**

Souvent, on réalise uniquement les tracés asymptotiques des courbes des systèmes, mais les tracés réels sont parfois nécessaires.

## 2.2. Interprétation du diagramme de Bode

Le diagramme de Bode représente la sortie d'un système sollicité par une entrée périodique dont on fait varier la pulsation (fréquence). Ainsi, le graphe ci-contre se traduit dans le diagramme de Bode par un unique point pour le gain et pour la phase.



Lorsque le gain vaut  $G_{dB} = 0$ ,  $|H(j\omega)| = 1$ , la sortie n'est ni amplifiée, ni atténuée car  $S_0 = E_0$

- Si  $G_{dB} > 0$ , le système amplifie l'entrée
- Si  $G_{dB} < 0$ , le système atténue l'entrée

*Exemple :* un système laisse-t-il passer les hautes ou les basses fréquences ? Connaissant le gain en fonction de la pulsation en entrée, il suffit d'identifier la plage de pulsations où le gain est négatif pour conclure que sur cette plage, il atténue les signaux d'entrée : il les filtre.

## 2.3. Tracé des diagrammes de Bode

Le principe de tracé d'un diagramme de Bode consiste à factoriser le numérateur et le dénominateur de  $H(j\omega)$  suivant la nature des pôles et des zéros. Cette technique permet de décomposer  $H(j\omega)$  en un produit de fonctions de transfert élémentaires bien connues et faciles à tracer dans Bode.

$$H(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^z} \cdot \frac{\prod_m (1 + T_m \cdot j\omega)}{\prod_n (1 + T_n \cdot j\omega)} \cdot \frac{\prod_k \left[ 1 + \frac{2z_k}{\omega_{0k}} \cdot j\omega + \left( \frac{1}{\omega_{0k}} \cdot j\omega \right)^2 \right]}{\prod_p \left[ 1 + \frac{2z_p}{\omega_{0p}} \cdot j\omega + \left( \frac{1}{\omega_{0p}} \cdot j\omega \right)^2 \right]}$$

Labels in the diagram:  
 - Gain pur:  $K$   
 - Intégrateur(s):  $(j\omega)^z$   
 - Produit d'inverses de 1<sup>er</sup> ordre:  $\prod_m (1 + T_m \cdot j\omega)$   
 - Produit de systèmes de 1<sup>er</sup> ordre:  $\prod_n (1 + T_n \cdot j\omega)$   
 - Produit d'inverses de 2<sup>ème</sup> ordre:  $\prod_k \left[ 1 + \frac{2z_k}{\omega_{0k}} \cdot j\omega + \left( \frac{1}{\omega_{0k}} \cdot j\omega \right)^2 \right]$   
 - Produit de systèmes de 2<sup>ème</sup> ordre:  $\prod_p \left[ 1 + \frac{2z_p}{\omega_{0p}} \cdot j\omega + \left( \frac{1}{\omega_{0p}} \cdot j\omega \right)^2 \right]$

En effet, le tracé du lieu de transfert d'un produit de deux fonctions de transfert est obtenu simplement sur un diagramme de Bode par addition :

### Gain

$$H(p) = H_1(p)H_2(p)$$

$$G_{db} = 20 \log|H(j\omega)| = 20 \log|H_1(j\omega)H_2(j\omega)| = 20 \log|H_1(j\omega)| + 20 \log|H_2(j\omega)|$$

$$G_{db} = G_{1db} + G_{2db}$$

### Phase

$$\arg(H(j\omega)) = \arg(H_1(j\omega)H_2(j\omega)) = \arg(H_1(j\omega)) + \arg(H_2(j\omega))$$

### 3. Réponses harmoniques des systèmes élémentaires

Pour réaliser le diagramme de Bode d'une fonction de transfert quelconque, il est donc nécessaire de connaître les diagrammes de Bode des fonctions de transfert élémentaires :

- le gain pur  $K$  ;
- l'intégrateur pur  $\frac{K}{p}$  et son inverse  $K' \cdot p$  ;
- le premier ordre  $\frac{1}{1+\tau p}$  et son inverse  $1 + \tau p$  ;
- le second ordre  $\frac{1}{1+\frac{2\xi}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2}$  et son inverse  $1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2$ .

#### 3.1. Gain pur

$$H(p) = K \text{ soit } H(j\omega) = K$$

Gain en dB :

$$G_{dB} = 20 \log K$$

Phase en degrés :

$$\varphi(\omega) = 0^\circ$$

- Pour le tracé on prendra  $K = 20$ .



#### 3.2. Intégrateur

$$H(p) = \frac{K}{p} \text{ soit } H(j\omega) = \frac{K}{j\omega}$$

Gain en dB :

$$G_{dB} = 20 \log \left| \frac{K}{j\omega} \right| = 20 \log K - 20 \log \omega$$

Phase en degrés :

$$\varphi(\omega) = -90^\circ$$

Car il s'agit d'un complexe pur au dénominateur.

- Pour le tracé on prendra  $K = 10$ .

L'expression du gain montre que la pente est de  $-20dB/decade$ .

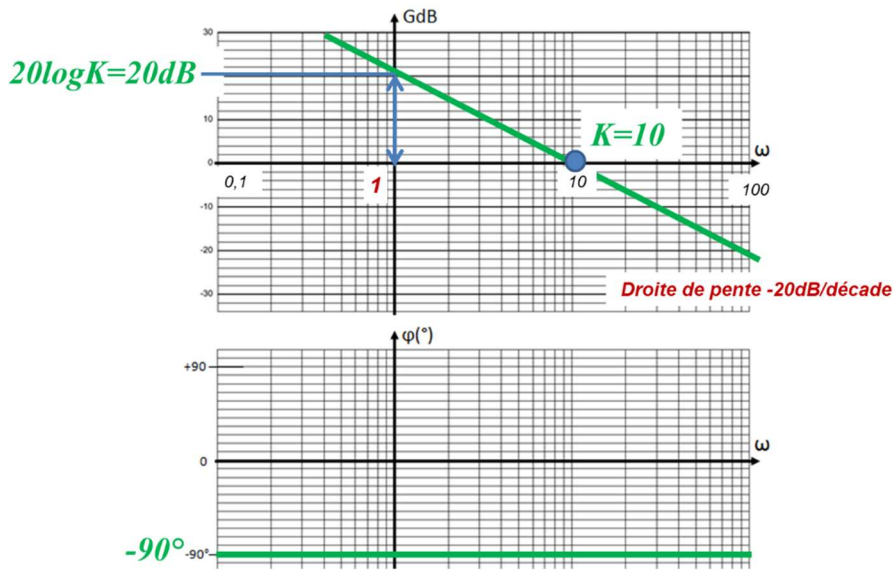
Il reste à déterminer un point pour pouvoir placer la droite, pour cela deux méthodes :

1ère méthode : On prend un  $\omega$  quelconque, simple à calculer et on calcule le gain :

Par exemple  $\omega = 1$  :  $20 \log|K| - 0 = 20dB$  ou pour  $\omega = 10$  :  $20 \log K - 20 \log(10) = 0$ .

2ème méthode : On cherche la pulsation  $\omega_{0dB}$  qui annule le gain :

$$G_{dB} = 20 \log K - 20 \log \omega_{0dB} = 0 \text{ d'où } 20 \log K = 20 \log \omega_{0dB} \text{ soit } \omega_{0dB} = K.$$



### 3.3. Intégrateur double

$$H(p) = \frac{K}{p^2} \text{ soit } H(j\omega) = \frac{K}{-\omega^2}$$

Gain en dB :

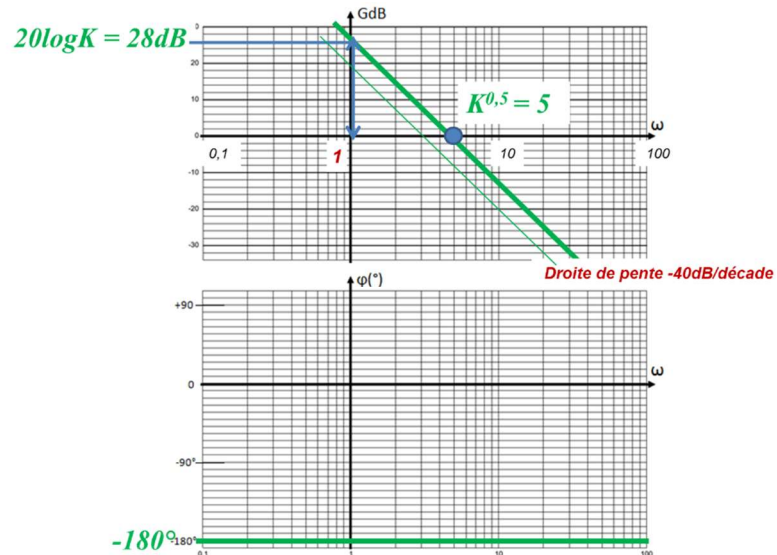
$$G_{dB} = 20 \log \left| \frac{K}{-\omega^2} \right| = 20 \log K - 40 \log \omega$$

Phase en degrés :

$$\varphi(\omega) = -180^\circ$$

- Pour le tracé on prendra  $K = 25$ .

La méthode de tracé est la même que pour l'intégrateur simple.



### 3.4. Dérivateur

$$H(p) = p \cdot K \text{ soit } H(j\omega) = j\omega \cdot K$$

Gain en dB :

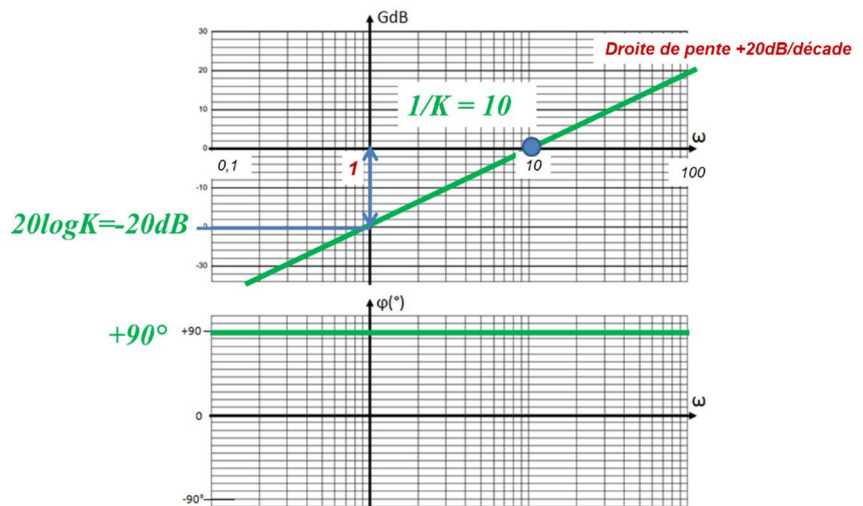
$$G_{dB} = 20 \log |j\omega \cdot K| = 20 \log K + 20 \log \omega$$

Phase en degrés :

$$\varphi(\omega) = +90^\circ$$

- Pour le tracé on prendra  $K = 0,1$ .

Il suffit de déterminer un point pour placer la droite.





### 3.5. Système du premier ordre

#### 3.5.1. Étude du gain

Expression – Tracé – Observations

$$G_{db} = 20 \log |H(j\omega)|$$

$$G_{db} = 20 \log \frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}}$$

$$G_{db} = 20 \log K - 20 \log \sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}$$

$$G_{db} = 20 \log K - 10 \log(1 + \tau^2 \omega^2)$$

$\omega \rightarrow 0$	$\omega \rightarrow +\infty$	Intersection des asymptotes
$G_{db} \underset{\omega \rightarrow 0}{\sim} 20 \log K = G_0$ <b>Asymptote horizontale de valeur</b> $G_0 = 20 \log K$	$G_{db} \underset{\omega \rightarrow +\infty}{\sim} 20 \log K - 20 \log(\tau\omega)$ $G_{db} \underset{\omega \rightarrow +\infty}{\sim} 20 \log \frac{K}{\tau} - 20 \log(\omega)$ Soit $X = \log(\omega)$ $G_{db} \underset{\omega \rightarrow +\infty}{\sim} 20 \log \frac{K}{\tau} - 20X$  En échelle logarithmique, c'est une droite de pente $-20 \text{ dB/décade}$  <b>Asymptote de pente : <math>-20 \text{ dB/dec}</math></b>	Soient les deux équations des asymptotes : $y_{-\infty} = 20 \log K$ $y_{+\infty} = 20 \log K - 20 \log(\tau\omega)$ Leur intersection à lieu à la pulsation $\omega_c$ telle que : $20 \log K = 20 \log K - 20 \log(\tau\omega_c)$ $\Leftrightarrow 20 \log(\tau\omega_c) = 0$ $\Leftrightarrow \tau\omega_c = 1$ $\omega_c = \frac{1}{\tau} = \omega_0$  Calculons le gain réel à cette pulsation : $G_{db} = 20 \log \frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega_0^2}}$ $= 20 \log \frac{K}{\sqrt{2}} = 20 \log K - 20 \log \sqrt{2}$  $G_{db} = G_0 - 3$

**Conclusions :**

- Il existe une asymptote horizontale de valeur  $G_0 = 20 \log K$  en  $\omega \rightarrow 0$
- Il existe une asymptote de pente  $-20 \text{ dB/dec}$  en  $\omega \rightarrow +\infty$
- Les deux asymptotes se coupent à la pulsation  $\omega_c = \frac{1}{\tau}$
- A cette pulsation, le gain réel est égal au gain maximal du système  $G_0 - 3 \text{ dB}$ . On appelle cette pulsation la pulsation de coupure à -3 dB et on la note  $\omega_c$ .

$$\omega_c = \frac{1}{\tau}$$

- On appelle bande passante à -3 dB notée  $BP$  la plage de pulsations pour lesquelles le gain est supérieur au gain maximal diminué de 3 dB.

$$BP = ]0; \omega_c]$$

- On appelle pulsation de coupure à 0 dB la pulsation à laquelle le gain est nul et on la note  $\omega_{c_0}$

$$\omega_{c_0} = \omega_c \sqrt{K^2 - 1}$$

- On appelle bande passante à 0 dB notée  $BP_0$  la plage de pulsations pour laquelle le gain est positif

$$BP_0 = [0; \omega_{c_0}]$$

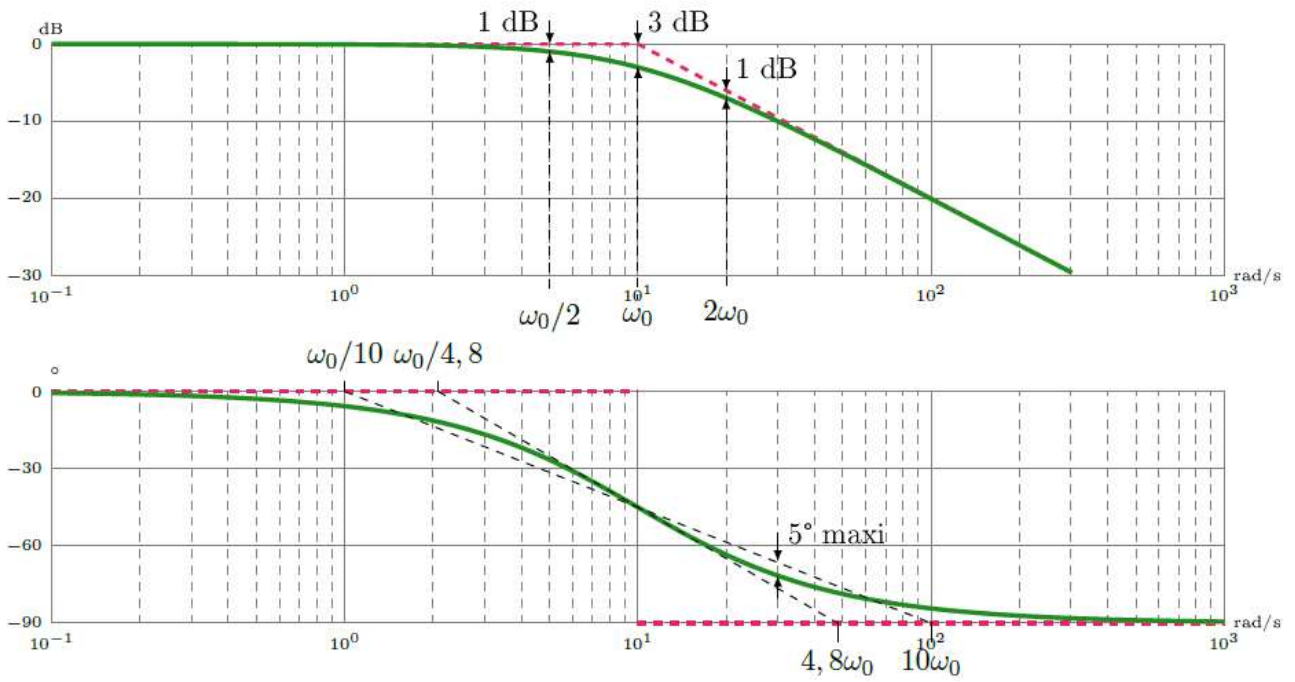
**3.5.2. Étude de la phase**

$$\varphi = \arg(H(j\omega)) = -\arg(1 + \tau \cdot j\omega) = -\arctan(\tau \cdot \omega)$$

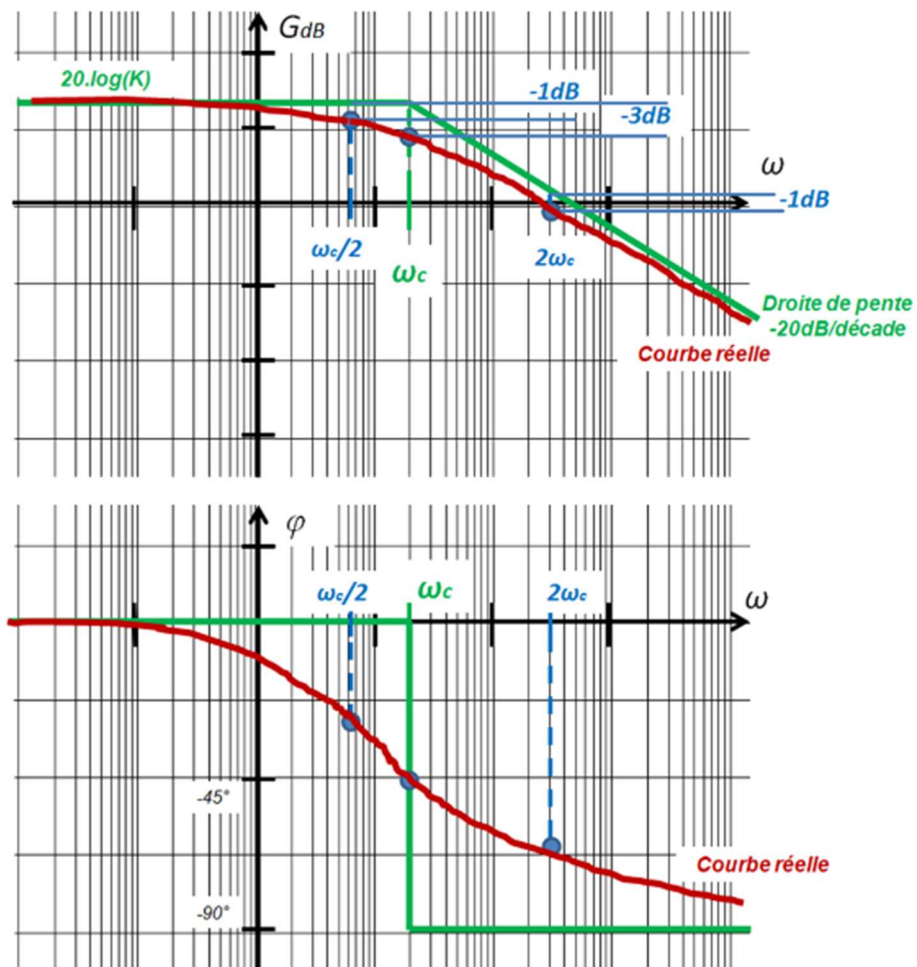
$\omega \rightarrow 0 \rightarrow \log \omega \rightarrow -\infty$	$\omega \rightarrow +\infty \rightarrow \log \omega \rightarrow +\infty$
$\varphi \underset{\omega \rightarrow 0}{\sim} 0 = \varphi_0$ <p>Asymptote horizontale nulle</p>	$\varphi \underset{\omega \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{\pi}{2} = \varphi_\infty$ <p>Asymptote horizontale à <math>-\frac{\pi}{2}</math></p>
<b>Valeur en <math>\omega_c</math></b>	
$\varphi(\omega_c) = -\arctan\left(\frac{1}{\tau} \tau\right) = -\arctan(1) = -\frac{\pi}{4}$	



### 3.5.3. Diagramme de Bode asymptotiques et réels



Application : Tracer le diagramme de Bode de la fonction suivante :  $H(p) = \frac{10}{1+0,5p}$



### 3.6. Système du 2<sup>ème</sup> ordre

Rappel, un système d'ordre 2 a pour fonction de transfert  $H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$ .

#### 3.6.1. Étude asymptotique du gain

On a :

$$|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$G_{dB} = 20 \log |H(j\omega)|$$

$$G_{dB} = 20 \log K - 20 \log \left( \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \right)$$

$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow \log \omega \rightarrow -\infty$	$\omega \rightarrow +\infty \Rightarrow \log \omega \rightarrow +\infty$
$ H(j\omega)  \underset{\omega \rightarrow 0}{\sim} K$ $G_{dB} \underset{\omega \rightarrow 0}{\sim} 20 \log K = G_0$ <b>Asymptote horizontale</b>	$ H(j\omega)  \underset{\omega \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{K}{\sqrt{\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2}} = \frac{K\omega_0^2}{\omega^2}$ $G_{dB} \underset{\omega \rightarrow +\infty}{\sim} 20 \log \frac{K\omega_0^2}{\omega^2} = 20 \log K\omega_0^2 - 40 \log \omega$ $G_{dB} \underset{\omega \rightarrow +\infty}{\sim} 20 \log K\omega_0^2 - 40 \log \omega$ <b>Asymptote décroissante de pente -40dB/décade</b>

L'intersection de ces deux droites asymptotes a lieu pour  $\omega = \omega_c$  :

$$20 \log K = 20 \log K\omega_0^2 - 40 \log \omega_c$$

$$20 \log K = 20 \log K + 20 \log \omega_0^2 - 40 \log \omega_c$$

$$20 \log \omega_0^2 = 20 \log \omega_c^2$$

$$\omega_c = \omega_0$$

Calculons le gain à cette pulsation :

$$G_{dB} = 20 \log \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega_0}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$G_{dB} = 20 \log \frac{K}{2\xi}$$

$$G_{dB} = 20 \log K - 20 \log 2\xi$$

$G_{dB}(\omega_0) = G_0 - 20 \log 2\xi$

### 3.6.2. Étude asymptotique de la phase

$$\varphi = \arg(H(j\omega)) = \arg\left(\frac{K}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + j2\xi \frac{\omega}{\omega_0}}\right)$$

$\omega \rightarrow 0 \rightarrow \log \omega \rightarrow -\infty$	$\omega \rightarrow +\infty \rightarrow \log \omega \rightarrow +\infty$
$\frac{K}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + j2\xi \frac{\omega}{\omega_0}} \underset{\omega \rightarrow 0}{\sim} K$ $\varphi \underset{\omega \rightarrow 0}{\sim} 0 = \varphi_0$ <p>Asymptote horizontale nulle</p>	$\frac{K}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + j2\xi \frac{\omega}{\omega_0}} \underset{\omega \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{K}{\omega^2}$ $\varphi \underset{\omega \rightarrow +\infty}{\sim} -\pi = \varphi_\infty \text{ (réel négatif)}$ <p>Asymptote horizontale à <math>-\pi</math></p>
Valeur en $\omega_c$	
$\varphi(\omega_0) = \arg\left(\frac{K}{j2\xi}\right) = -\frac{\pi}{2}$	

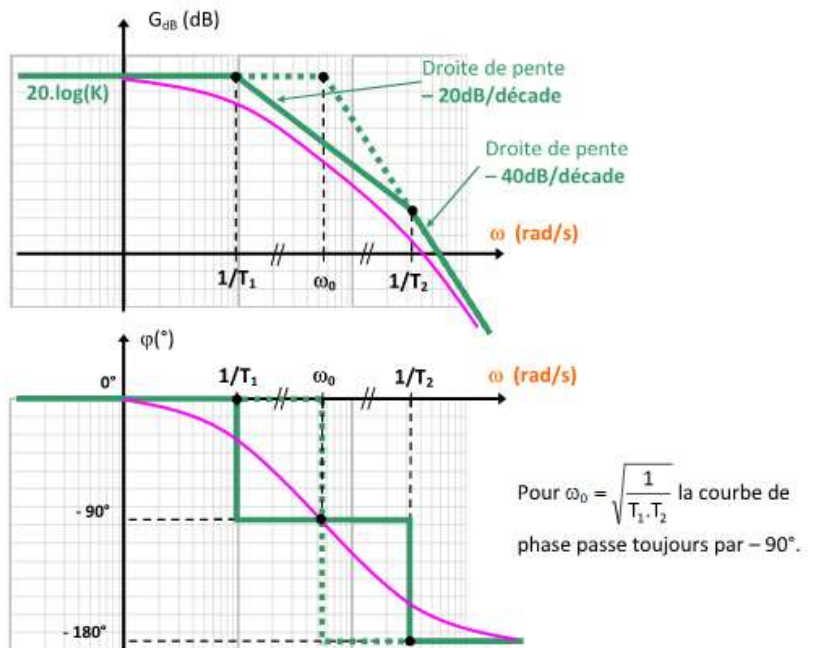
### 3.6.3. Cas $\xi > 1$ ou $\xi = 1$

On sait alors que la fonction présente 2 pôles réels  $p_1$  et  $p_2$ , distincts (ou confondus dans le cas  $\xi = 1$ ).

Le système peut alors être considéré comme le produit de deux systèmes du premier ordre de constantes de temps  $T_1 = -\frac{1}{p_1}$  et  $T_2 = -\frac{1}{p_2}$ .

Le tracé asymptotique se construit alors en ajoutant les tracés du gain et des deux systèmes du premier ordre construits séparément dans un premier temps.

Pour  $\xi = 1$ , la fonction de transfert devient un carré parfait :  $H(j\omega) = \frac{K}{(1+jT\omega)^2}$  avec  $T = \frac{1}{\omega_0}$ . Son tracé asymptotique est représenté en pointillé sur la figure.



### 3.6.4. Cas $\xi < 1$

Dans ce cas les pôles sont complexes conjugués, il ne va pas y avoir de somme de tracés connus.

Si  $\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$ , on montre la présence d'un maximum de  $|H(j\omega)|$  à la pulsation notée  $\omega_r$

Pulsation à la résonance :

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

Ce maximum vaut :

$$|H(j\omega_r)| = \frac{K}{\sqrt{(1 - (1 - 2\xi^2))^2 + 4\xi^2(1 - 2\xi^2)}}$$

$$|H(j\omega_r)| = \frac{K}{\sqrt{4\xi^4 + 4\xi^2 - 8\xi^4}}$$

$$|H(j\omega_r)| = \frac{K}{\sqrt{4\xi^2 - 4\xi^4}}$$

$$|H(j\omega_r)| = \frac{K}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}$$

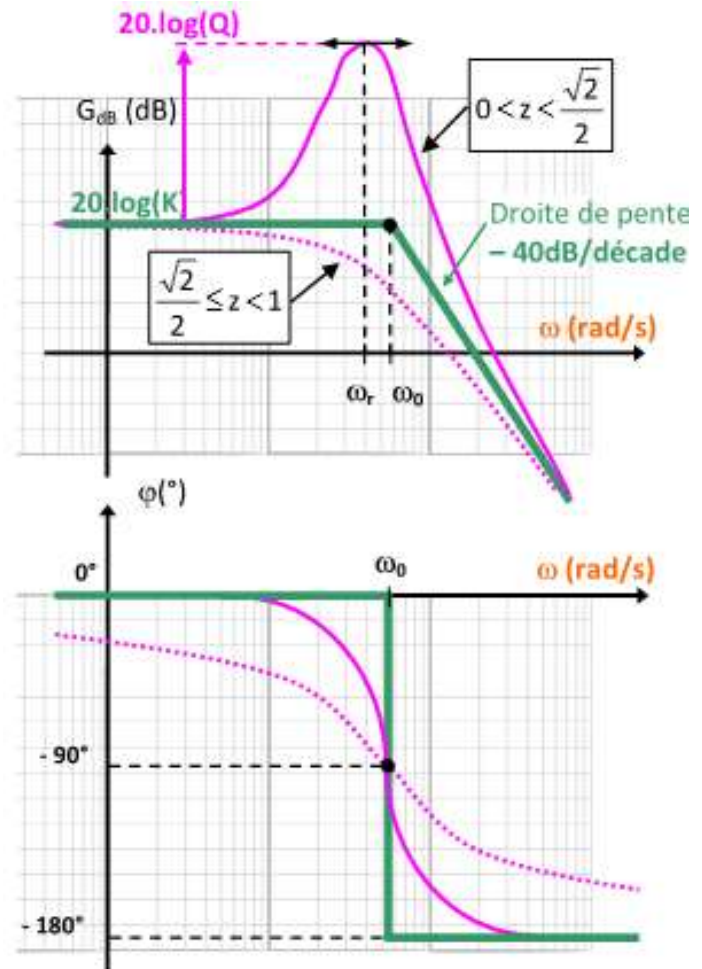
$$G_r = 20 \log \left( \frac{K}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}} \right)$$

On définit le facteur de résonance ou facteur de sur-tension  $Q$  :

$$Q = \frac{|H(j\omega_r)|}{|H(0)|} = \frac{\frac{K}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}}{\frac{K}{K}} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}$$

Plus  $\xi$  est petit, plus ce facteur est grand, plus grande est la résonance.

Attention : Il ne faut pas confondre la pulsation de résonance  $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$  et la pseudo-pulsation  $\omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$ .



### 3.6.5. Conclusion sur le comportement fréquentiel d'un système du second ordre

**Pour la phase :**

- Une asymptote horizontale à la valeur de  $0^\circ$  lorsque  $\omega \rightarrow 0$
- Une asymptote horizontale à la valeur  $-180^\circ$  lorsque  $\omega \rightarrow +\infty$
- Un passage à la valeur de  $-90^\circ$  pour  $\omega = \omega_0$

**Pour le gain :**

- Il existe une asymptote horizontale de valeur  $G_0 = 20 \log K$  en  $\omega \rightarrow 0$
- Il existe une asymptote de pente  $-40 \text{ dB/dec}$  en  $\omega \rightarrow \infty$
- Ces deux asymptotes se coupent à la pulsation  $\omega = \omega_0$
- A cette pulsation, le gain réel est égal au gain maximal du système  $G_0 = 20 \log K$  moins  $20 \log(2\xi)$  dB.
- Si  $\xi \geq 1$ , un 2<sup>nd</sup> ordre se décompose en produit de deux 1<sup>er</sup> ordres.

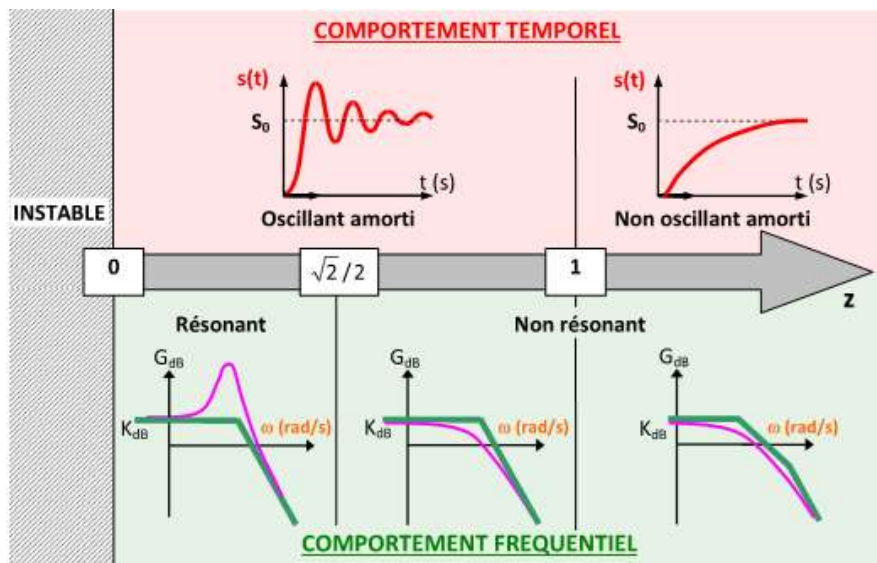
- Si  $\xi > 1$ , il existe une troisième asymptote de pente  $-20$  dB/dec entre les pulsations de coupure de chaque premier ordre le constituant.
- Si  $\xi \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ , il existe une résonance du gain à la pulsation de résonance  $\omega_r$  telle que

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

$$G_r = 20 \log \left( \frac{K}{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}} \right)$$

Pour déterminer le tracé asymptotique de Bode d'un système du 2<sup>nd</sup> ordre, on calcule le discriminant du dénominateur. S'il est positif ou nul alors les racines sont réelles et on est dans le cas  $\xi \geq 1$  sinon les racines sont complexes et on est dans le cas  $\xi < 1$ .

### 3.6.6. Synthèse sur les comportements temporels et fréquentiels du 2<sup>ème</sup> ordre



## 4. Analyse harmonique d'un système d'ordre quelconque

### 4.1. Principe

Comme expliqué dans le paragraphe 2.3, pour déterminer le diagramme de Bode d'une fonction de transfert d'ordre supérieur à deux, il suffit de la décomposer en sous fonction d'ordre au maximum 2. Pour obtenir le diagramme de Bode de la fonction de transfert globale, il suffira alors d'additionner tous les sous-diagramme entre eux en prenant en compte les pulsations de coupure dans l'ordre croissant.

$$H(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^q} \cdot \frac{\prod_{m=1}^m (1 + T_m \cdot j\omega)}{\prod_{n=1}^n (1 + T_n \cdot j\omega)} \cdot \frac{\prod_{k=1}^k \left[ 1 + \frac{2z_k}{\omega_{0k}} \cdot j\omega + \left( \frac{1}{\omega_{0k}} \cdot j\omega \right)^2 \right]}{\prod_{p=1}^p \left[ 1 + \frac{2z_p}{\omega_{0p}} \cdot j\omega + \left( \frac{1}{\omega_{0p}} \cdot j\omega \right)^2 \right]}$$

Gain pur:  $K$   
 Intégrateur(s):  $(j\omega)^q$   
 Produit d'inverses de 1<sup>er</sup> ordre:  $\prod_{m=1}^m (1 + T_m \cdot j\omega)$   
 Produit de systèmes de 1<sup>er</sup> ordre:  $\prod_{n=1}^n (1 + T_n \cdot j\omega)$   
 Produit d'inverses de 2<sup>ème</sup> ordre:  $\prod_{k=1}^k \left[ 1 + \frac{2z_k}{\omega_{0k}} \cdot j\omega + \left( \frac{1}{\omega_{0k}} \cdot j\omega \right)^2 \right]$   
 Produit de systèmes de 2<sup>ème</sup> ordre:  $\prod_{p=1}^p \left[ 1 + \frac{2z_p}{\omega_{0p}} \cdot j\omega + \left( \frac{1}{\omega_{0p}} \cdot j\omega \right)^2 \right]$



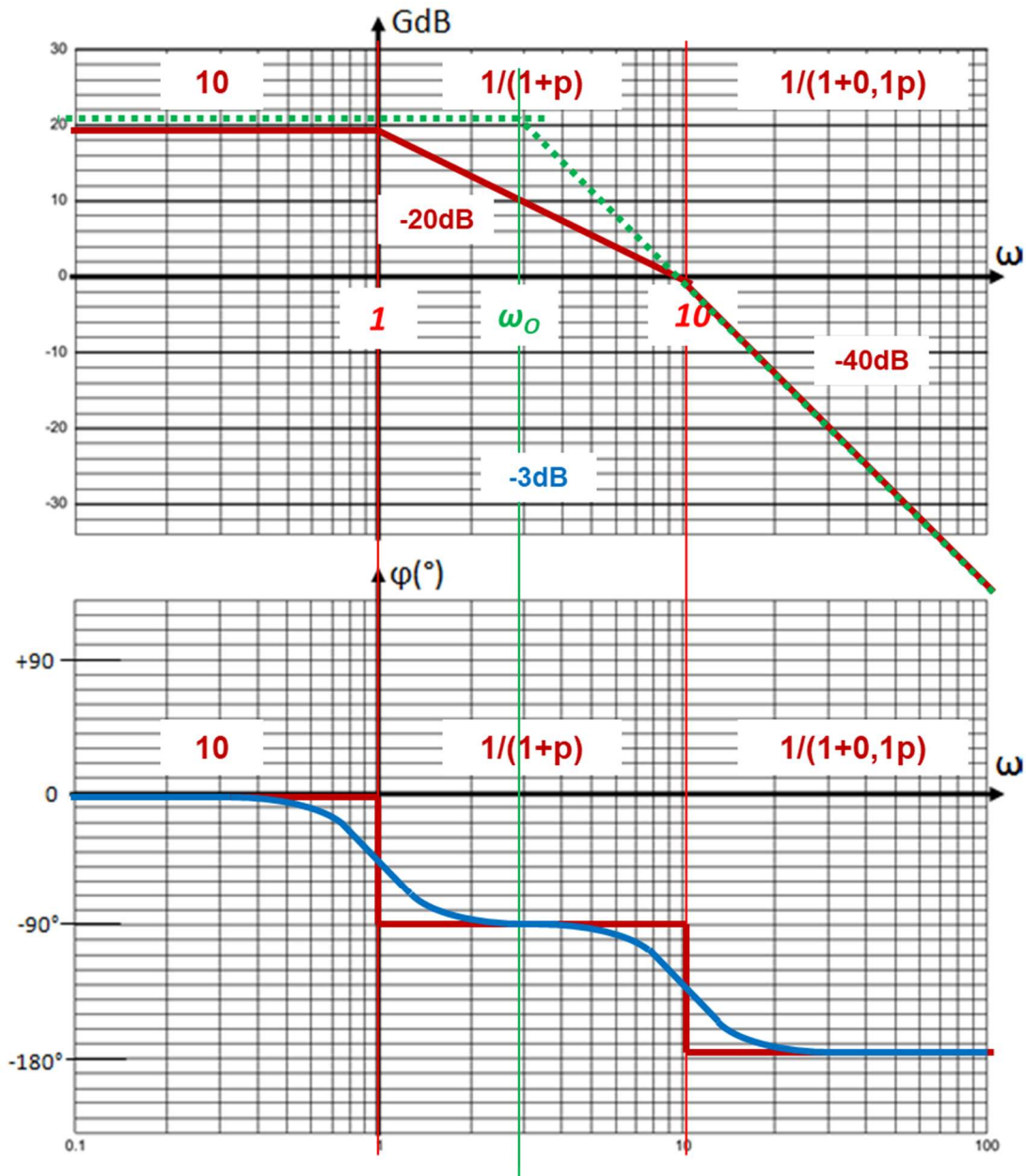
**Tracer le diagramme de Bode d'un ordre quelconque**

1. Décomposer en fonction connue sous forme canonique (intégrateur, 1<sup>er</sup> ordre, 2<sup>nd</sup> ordre et leurs inverses).
2. Déterminer les pulsations de coupure de chaque fonction.
3. Tracer le diagramme de Bode en partant des basses fréquences et en prenant en compte les pulsations de coupure les unes après les autres (ordre croissant).

**4.2. Exercice d'application second ordre**

Tracer les diagrammes de Bode de la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{100}{10 + 11p + p^2} = \frac{10}{1 + 1,1p + 0,1p^2} = 10 \left( \frac{1}{p + 1} \right) \left( \frac{1}{0,1p + 1} \right) = 10 \left( \frac{1}{p + 1} \right) \left( \frac{1}{\frac{p}{10} + 1} \right)$$



### 4.3. Exercice d'application fonction composée

Soit la fonction de transfert suivante :  $H(p) = \frac{10+2p}{p+1,05p^2+0,05p^3}$

Cette fonction de transfert s'exprime aussi :

$$H(p) = \frac{10}{p} \frac{1}{1+p} (1+0,2p) \frac{1}{1+0,05p}$$

$$H(p) = H_1(p) \cdot H_2(p) \cdot H_3(p) \cdot H_4(p)$$

On note les pulsations caractéristiques :

$\omega_{1-0dB} = 10 \text{ rad/s}$ ,  $\omega_2 = 1 \text{ rad/s}$ ,  $\omega_3 = 5 \text{ rad/s}$ ,  $\omega_4 = 20 \text{ rad/s}$

