



Correction DM 4 - SI

Consignes

- Copies propres et bien présentées: encadrer vos résultats, souligner les applications numériques (avec une règle bien sûr)...
- **Aucun retard ne sera accepté.** *Date de rendu au pied des autres pages.*

1. Commande en position d'un robot porte-sonde

1.1 Mise en situation

Grâce à la télé-échographie robotisée, il devient possible de réaliser une échographie sur un patient situé sur un site isolé (appelé site patient, (a) de le Figure 1), alors même que le spécialiste en imagerie médicale se trouve sur un site distant de celui où est pratiqué l'examen (appelé site expert, (b) de le Figure 1).



(a) Site patient



(b) Site expert

FIGURE 1 – Principe de la télé-échographie

La Figure 2 décrit le robot porte-sonde constitué :

- o d'une structure porteuse 0 ;
- o d'un module de rotation, composé des sous-ensembles 1, 2 et 3, permettant d'orienter la sonde en lui imposant trois rotations suivant les axes 1 à 3 ;
- o du porte-sonde 4 sur lequel est fixé la sonde échographique S. La translation suivant l'axe 4 permet de contrôler l'effort de contact sonde/peau du patient.

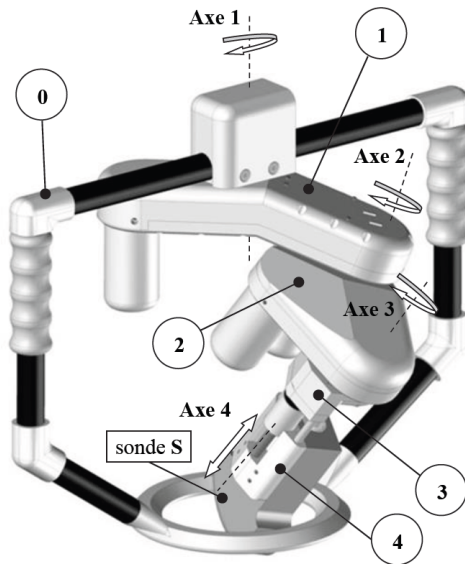


FIGURE 2 – Robot porte-sonde

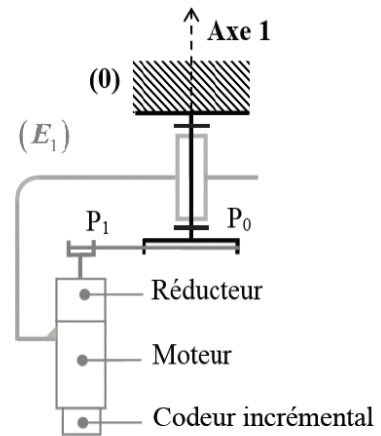


FIGURE 3 – Chaîne cinématique associée à l'axe 1

1.2 Commande en position du robot porte-sonde

On se limite ici à l'étude de la commande du premier axe, dont la structure est présentée en Figure 3. Le principe associé à cette commande est décrit par la Figure 4. La structure de commande de la position angulaire θ_1 est composée de deux boucles imbriquées disposant chacune d'un réseau correcteur :

- o une boucle interne de vitesse, gérée par le variateur ;
- o une boucle externe de position, gérée par la carte d'axes.

Un codeur incrémental, solidaire de l'axe moteur permet après traitement numérique d'obtenir une image de la position angulaire θ_1 et de la vitesse angulaire ω_1 de l'axe 1, grandeurs mises en oeuvre au niveau des deux boucles d'asservissement. La consigne de position est élaborée par la carte d'axes, par intégration du profil de vitesse généré.

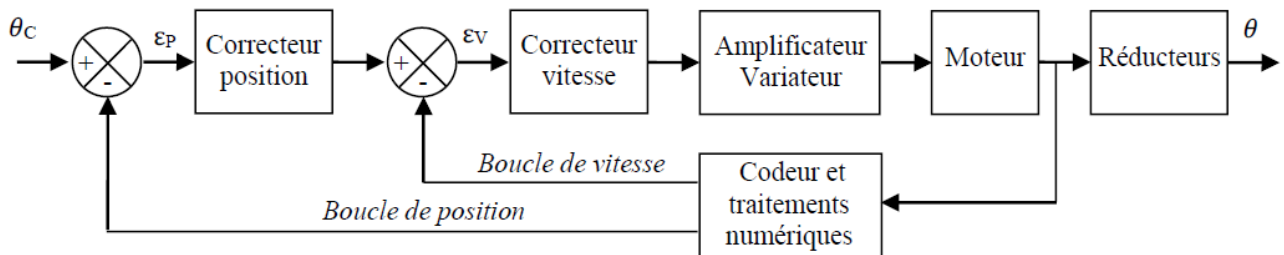


FIGURE 4 – Structure de l'asservissement d'un axe

1.2.a Modélisation de l'axe 1

L'objectif est d'élaborer un modèle de connaissance de l'axe 1 et de réaliser la synthèse de la commande.

Modélisation de la motorisation

La motorisation de l'axe 1 est réalisée à l'aide d'un moteur électrique à courant continu et aimants

$$u_m(t) = e(t) + Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} \qquad e(t) = k_e \omega_m(t)$$

$$J_{eq} \frac{d\omega_m(t)}{dt} = C_m(t) - C_r(t) \qquad C_m(t) = k_c i(t)$$

permanents, dont le comportement peut être modélisé par les équations suivantes :

Avec :

$u_m(t)$: tension aux bornes du moteur (en V)

$e(t)$: force contre-électromotrice (en V)

$i(t)$: intensité (en A)

$\omega_m(t)$: vitesse de rotation du moteur (en rad/s)

$C_m(t)$: couple moteur (en Nm)

$C_r(t)$: le couple résistant (perturbation) (en Nm)

J_{eq} : inertie équivalente en rotation de l'arbre moteur ($8,6 \cdot 10^{-6} \text{ kg.m}^2$)

R : résistance électrique du moteur ($4,1 \Omega$)

k_e : constante de force contre-électromotrice ($1,6 \cdot 10^{-2} \text{ V/(rad/s)}$)

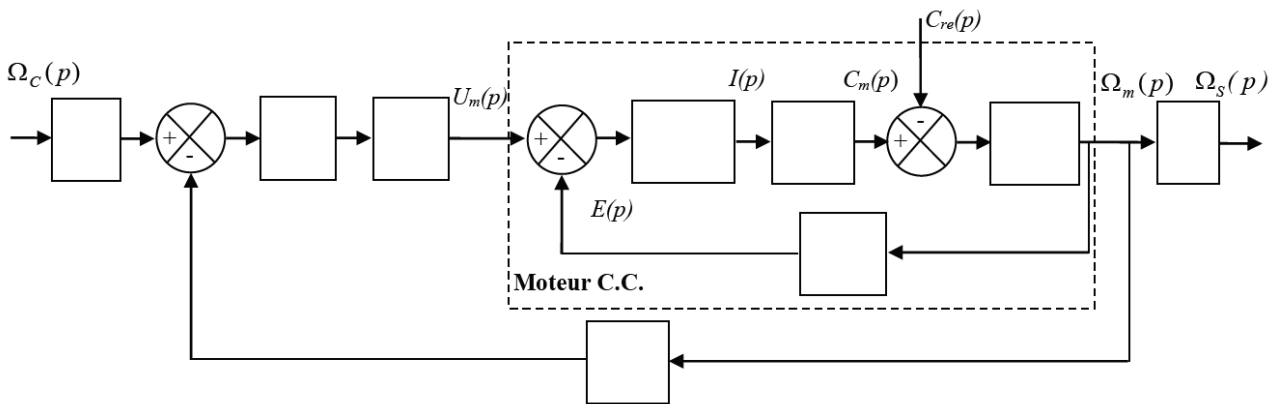
k_c : constante de couple ($1,6 \cdot 10^{-2} \text{ Nm/A}$)

L : inductance de l'induit ($0,18 \text{ mH}$)

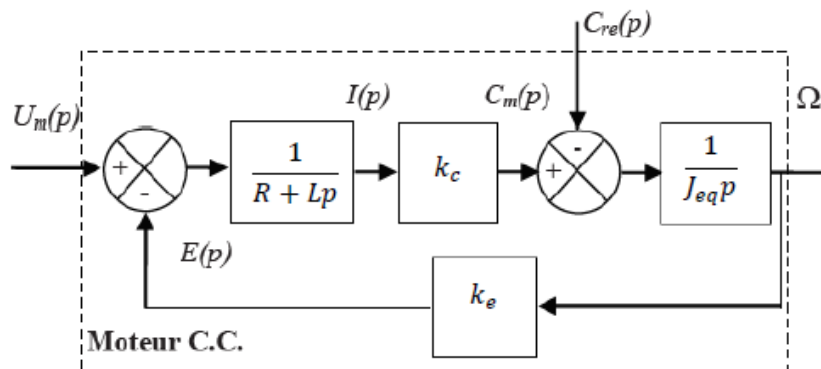
Question 1: Passer les équations précédentes dans le domaine de Laplace, on considère les conditions initiales nulles.

Réponse 1: $U_m(p) = E(p) + RI(p) + LpI(p)$
 $E(p) = k_e \Omega_m(p)$
 $J_{eq} p \Omega_m(p) = C_m(p) - C_r(p)$
 $C_m(p) = k_c I(p)$

On donne le schéma-bloc incomplet suivant :



Question 2: Compléter la partie *Moteur C.C.* de ce schéma-bloc dans les documents réponses. Recopier le sur votre copie ou penser à détacher les documents réponses et les rendre avec votre copie.



Réponse 2:

Question 3: Déterminer les expressions littérales des fonctions de transfert

$H_1(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)}$ quand $C_r(p) = 0$, et $H_2(p) = \frac{\Omega_m(p)}{C_r(p)}$ quand $U_m(p) = 0$, sous forme canonique.

Réponse 3: Pour $C_r(p) = 0$, la formule de Black donne :

$$\frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)} = \frac{\frac{k_c}{(R+Lp)J_{eq}p}}{1 + \frac{k_c k_e}{(R+Lp)J_{eq}p}}$$

$$H_1(p) = \frac{1}{k_e} \frac{1}{1 + \frac{J_{eq}R}{k_c k_e} p + \frac{J_{eq}L}{k_c k_e} p^2}$$

Pour $U_m(p) = 0$:

$$\frac{\Omega_m(p)}{C_r(p)} = \frac{-\frac{1}{J_{eq}p}}{1 + \frac{k_c k_e}{(R+Lp)J_{eq}p}}$$

$$H_2(p) = -\frac{R}{k_c k_e} \frac{1 + \frac{L}{R} p}{1 + \frac{J_{eq}R}{k_c k_e} p + \frac{J_{eq}L}{k_c k_e} p^2}$$

On pose $\tau_e = \frac{L}{R}$ et $\tau_m = \frac{J_{eq}R}{k_c k_e}$, respectivement constantes de temps électrique et électromécanique du moteur à courant continu.

Question 4: Déterminer les valeurs numériques des constantes de temps τ_e et τ_m . Une constante de temps peut-elle être négligée devant l'autre ?

Réponse 4: L'application numérique donne $\tau_e = 4,4 \cdot 10^{-5} s$ et $\tau_m = 0,14 s$.

On remarque que $\tau_e \ll \tau_m$, on peut alors négliger τ_e devant τ_m .

Question 5: Montrer, en précisant l'expression de K_m , que $H_1(p)$ peut être simplifiée par :

$$H_1(p) = \frac{K_m}{(1 + \tau_e p)(1 + \tau_m p)}$$

Réponse 5: En développant l'expression souhaitée de $H_1(p)$:

$$H_1(p) = \frac{K_m}{1 + \tau_e p + \tau_m p + \tau_m \tau_e p^2}$$

On peut alors négliger τ_e devant τ_m et en remplaçant, il vient :

$$H_1(p) = \frac{1}{k_e} \frac{1}{1 + \frac{J_{eq}R}{k_c k_e} p + \frac{J_{eq}L}{k_c k_e} p^2}, \text{ on en déduit } K_m = \frac{1}{k_e}.$$

Modélisation de la boucle de vitesse

La Figure 5 présente la structure de la boucle de vitesse associée à la commande de l'axe 1.

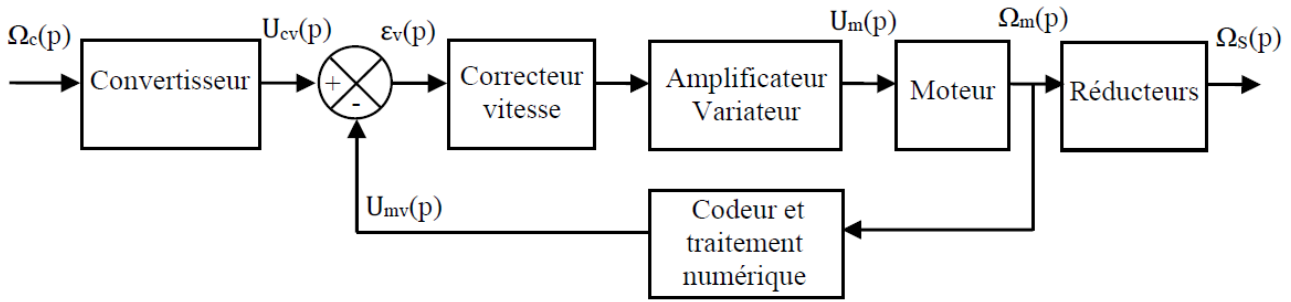


FIGURE 5 – Asservissement en vitesse d'un axe

On donne les notations suivantes pour les gains des différents composants intervenant dans la commande de l'axe 1 :

- Convertisseur : K_{conv} ;
- Correcteur vitesse : $C_v(p)$;
- Amplificateur/variateur : $K_A = 9,4$;
- Codeur et traitement : $K_{vit} = 8,3 \cdot 10^{-3} V / (rad/s)$;
- Réducteurs : K_r ;

La partie "réducteurs" est composée d'un réducteur à train simple ainsi que d'un système de poulie. La poulie P_0 a pour diamètre $D_0 = 42mm$ et la poulie P_1 a pour diamètre $D_1 = 13mm$. Le réducteur à engrenage est quant à lui présenté sur la Figure 6.

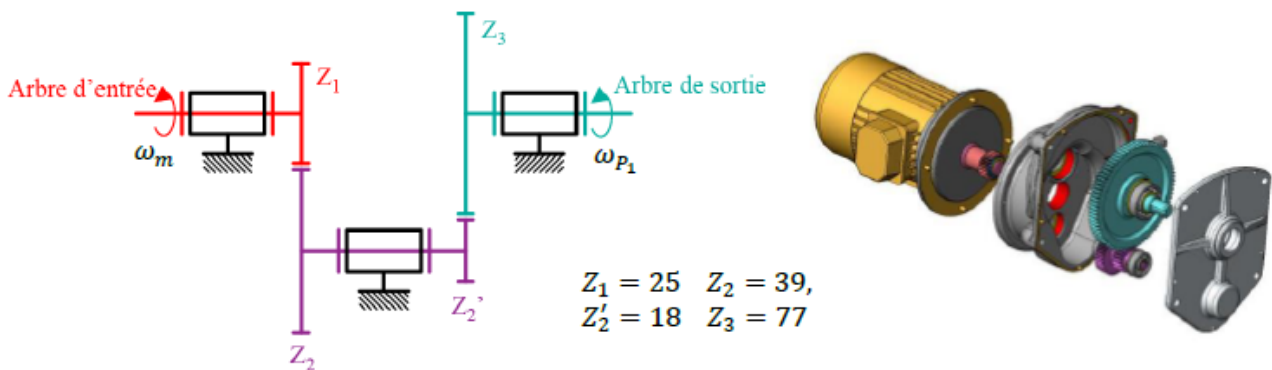


FIGURE 6 – Réducteur à engrenage du moteur

Question 6: Déterminer les rapports de réduction $r_e = \frac{\omega_{P1/0}}{\omega_{m/0}}$ du train d'engrenage et

$r_p = \frac{\omega_{P1/0}}{\omega_{P0/0}}$ des poulies et en déduire l'expression et la valeur numérique de K_r .

Réponse 6: Il s'agit d'un train simple, ainsi il vient directement :

$$r_e = \frac{\omega_{P1/0}}{\omega_{m/0}} = (-1)^2 \frac{Z_1 Z_2'}{Z_2 Z_3} \text{ soit } r_e = \frac{Z_1 Z_2'}{Z_2 Z_3} = 0,15.$$

$$\text{On a } \omega_{P1/0} D_1 = \omega_{P0/0} D_0 \text{ soit } r_p = \frac{D_0}{D_1} = 3,2.$$

Le gain K_r vaut $\frac{\Omega_s}{\Omega_m}$, on en déduit $K_r = \frac{\omega_{P0/0}}{\omega_{m/0}}$, à partir des deux relations précédentes, il

$$\text{vient } K_r = \frac{r_e}{r_p} = 4,6 \cdot 10^{-2}.$$

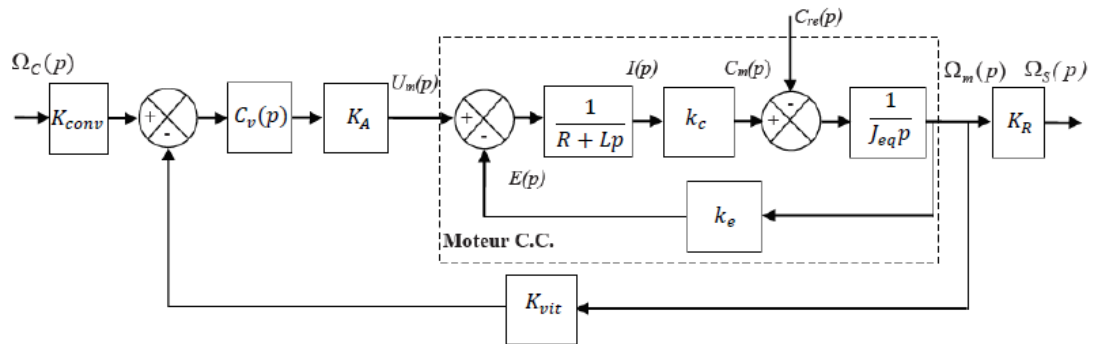
Question 7: Déterminer l'expression du gain K_{conv} ainsi que sa valeur numérique et unité associée.

Réponse 7: Pour que le système soit correctement asservi, il faut que $\epsilon_v(p) = 0$ lorsque que l'entrée est égale à la sortie, c'est à dire $\Omega_c(p) = \Omega_s(p)$. Or :

$$\epsilon_v(p) = K_{conv}\Omega_c(p) - K_{vit}\Omega_m(p) = K_{conv}\Omega_c(p) - \frac{K_{vit}}{K_r}\Omega_s(p)$$

On en déduit $K_{conv} = \frac{K_{vit}}{K_r} = 0,18V.s.rad^{-1}$.

Question 8: Compléter le schéma-bloc à trous précédent en y faisant figurer les fonctions de transfert sous forme littérale dans le domaine de Laplace avec des conditions initiales nulles.



Réponse 8:

On pourrait montrer que le schéma-bloc peut se ramener au schéma à retour unitaire de la Figure 7, avec $G_1(p) = \frac{k_c}{R} \frac{1}{1 + \tau_e p}$, $G_2(p) = \frac{R}{k_c} \frac{1}{1 + \tau_m p}$ et $K = K_{vit}K_AK_m$.

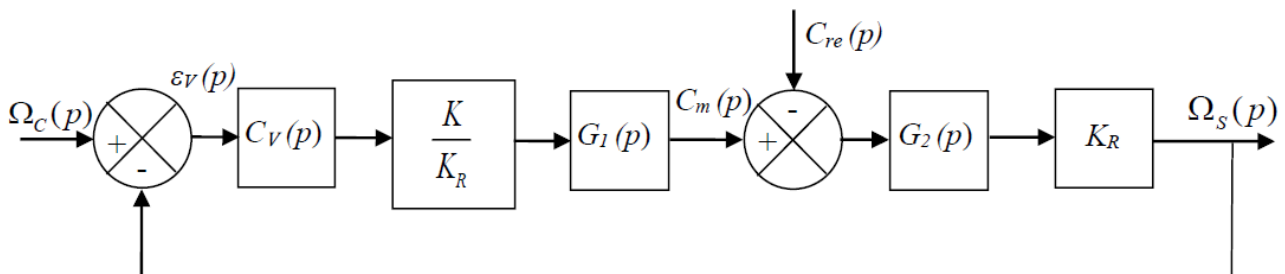


FIGURE 7 – Schéma-bloc équivalent pour la boucle de vitesse

Pour la suite nous prendrons $\tau_m = 0,14s$, $\tau_e = 10^{-4}s$ et $K = 4,9$.

Question 9: A partir du schéma-bloc à retour unitaire de la Figure 7, déterminer l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p) = \frac{\Omega_s(p)}{\epsilon_v(p)}$ en fonction de $C_v(p)$, τ_e , τ_m et K . On considère $C_{re}(p) = 0$.

Réponse 9: Il suffit de multiplier tous les blocs de la chaîne directe :

$$H_{BO}(p) = \frac{C_v(p)K}{(1 + \tau_e p)(1 + \tau_m p)}$$

1.2.b Synthèse de la commande : boucle de vitesse

Le système est considéré en l'absence de perturbation (étude en suivi de consigne). Le correcteur de la boucle de vitesse est un correcteur Proportionnel Intégral, de fonction de transfert :

$$C_V(p) = K_i \frac{1 + \tau_m p}{\tau_m p}$$

Question 10: Déterminer, en fonction des paramètres K_i , τ_e , τ_m et K , l'expression littérale de la fonction de transfert en vitesse sous la forme canonique d'un système du second ordre. Préciser la valeur de K_v , le gain de cette fonction, et les expressions littérales du taux d'amortissement ξ et de la pulsation propre ω_0 .

Réponse 10: A partir de la réponse à la question précédente, ou en considérant la chaîne directe de la Figure 7 :

$$H_{BO}(p) = \frac{K}{(1 + \tau_e p)(1 + \tau_m p)} K_i \frac{1 + \tau_m p}{\tau_m p} = \frac{KK_i}{(1 + \tau_e p)\tau_m p}$$

La fonction de transfert en vitesse correspond à la fonction de transfert en boucle fermée, d'où :

$$H_v(p) = \frac{H_{BO}(p)}{1 + H_{BO}(p)} = \frac{KK_i}{(1 + \tau_e p)\tau_m + KK_i}$$

$$\text{Ainsi } H_v(p) = \frac{1}{1 + \frac{\tau_m}{KK_i} p + \frac{\tau_m \tau_e}{KK_i} p^2}.$$

$$\text{On en déduit } K_v = 1, \omega_0 = \sqrt{\frac{KK_i}{\tau_m \tau_e}} \text{ et } \xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\tau_m}{KK_i \tau_e}}.$$

Le gain K_i du correcteur est fixé de manière à obtenir la réponse la plus rapide sans dépassement en boucle fermée. On rappelle que pour un modèle du second ordre, la réponse la plus rapide sans dépassement est obtenue pour un facteur d'amortissement $\xi = 1$, valeur pour laquelle on a $t_{5\%}\omega_0 = 5$.

Question 11: Déterminer l'expression de K_i ainsi que sa valeur numérique. Déterminer la valeur du temps de réponse $t_{5\%}$ de la boucle de vitesse pour cette valeur de K_i .

Réponse 11: Pour $\xi = 1$, il vient $K_i = \frac{\tau_m}{4K\tau_e} 71$.

Ainsi $\omega_0 = 5.10^3 \text{ rad.s}^{-1}$. On en déduit $t_{5\%} 5.10^3 = 5 \text{ ms}$.