Analyse fréquentielle des systèmes

1. Tracer de diagrammes de Bode simple

Q.1. Tracer les diagrammes de Bode asymptotiques puis réels des systèmes modélisés par les fonctions de transfert suivantes :

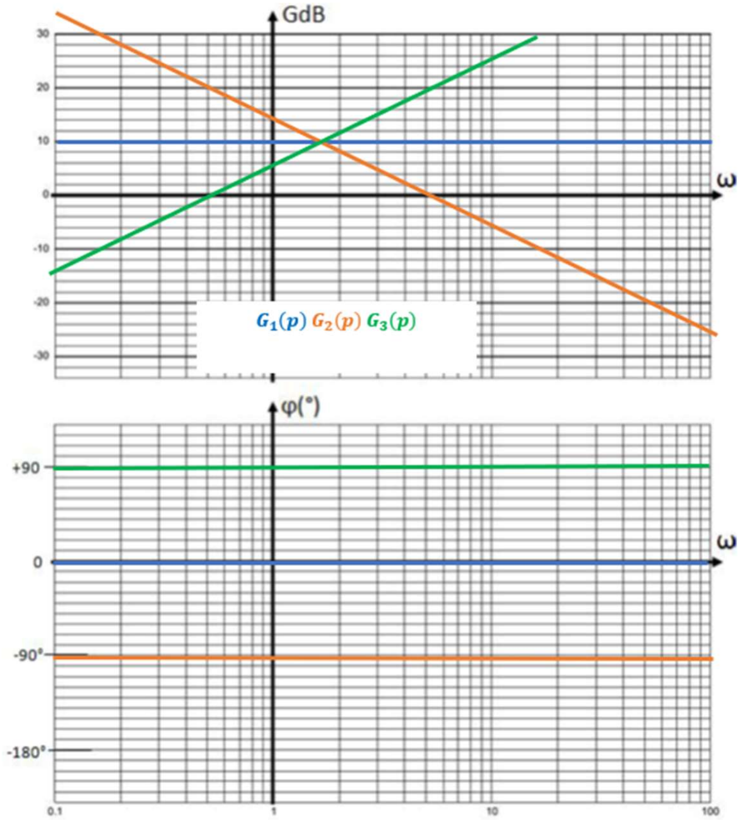
$$G_1(p) = 3 \,;\, G_2(p) = \frac{5}{p}$$

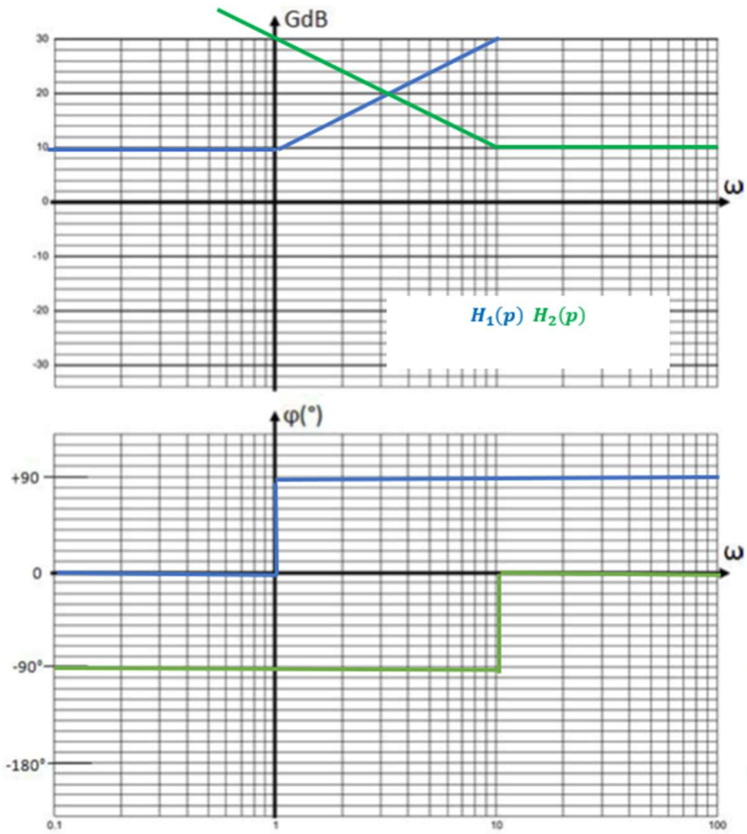
$$F_1(p) = \frac{1}{1+p} \,;\, F_2(p) = \frac{10}{1+p}$$

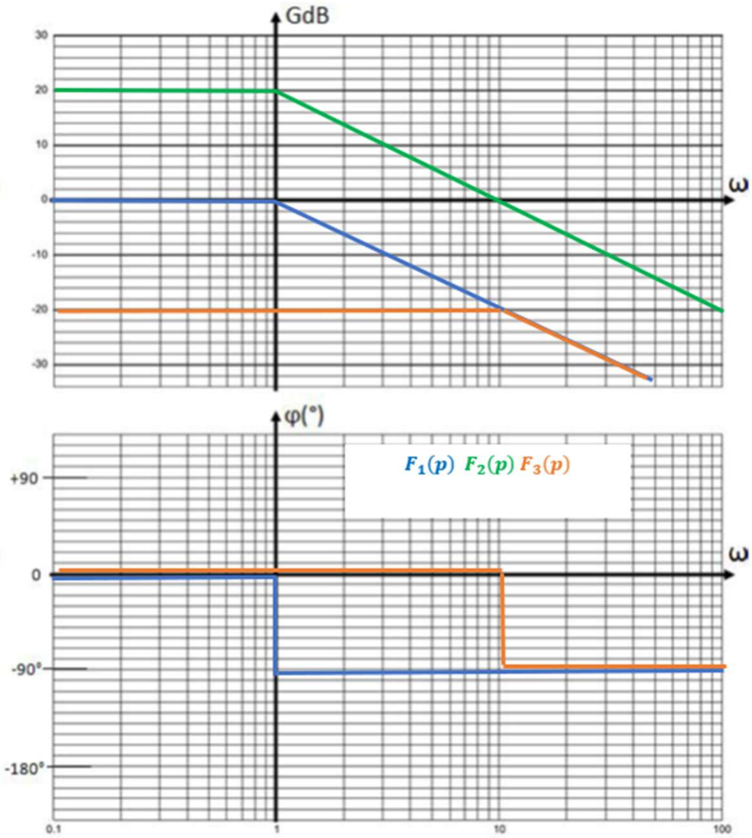
$$H_2(p) = 3 + \frac{30}{p}$$

Bonus (si vous avez le temps) :

$$G_3(p) = 2p \,;\, F_3(p) = \frac{1}{10+1\,p} \,;\, H_1(p) = 3 + 3p$$







2. Étude d'un système du premier ordre

Soit le système dont l'équation différentielle est la suivante :

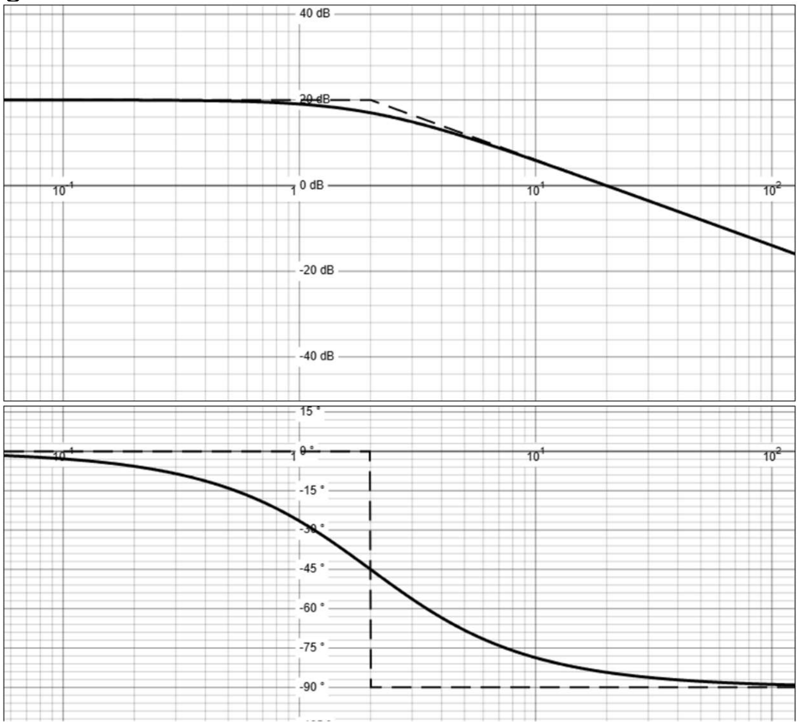
$$\mathbf{5\,\dot{s}(t) + 10\,s(t) = 100\,e(t)}$$

Les conditions initiales sont nulles.

Q.1. **Calculer la fonction de transfert $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$ sous forme canonique et donner ses coefficients caractéristiques**

On a $5Sp + 10S = 100E$ soit $H = \frac{S}{E} = \frac{100}{5p+10} = \frac{10}{0{,}5p+1}$ donc $K = 10$ et $T = 0{,}5$.

Q.2. **Établir son diagramme de Bode.**



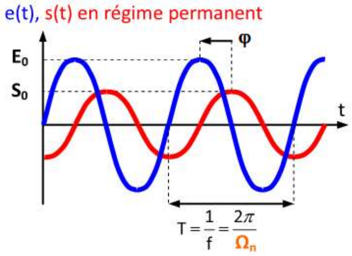
Q.3. **Déterminer alors la réponse approchée du système à $e_1(t) = 5\ \sin(0,1t)$.**

On a alors $\omega = 0{,}1 rad/s$. D'après le diagramme de Bode, la réponse sera amplifiée en amplitude (gain positif) de 10, c'est-à-dire $S_0 = 10 \times 5 = 50$. On a $s_1(t) = 50\sin\,(0{,}1t + 0)$.

Q.4. **Déterminer alors la réponse approchée du système à $e_2(t) = 20\ \sin(10t)$.**

Le raisonnement est similaire : pour $\omega = 10 rad/s$, le gain vaut à peu près $8 > 0$, donc la sortie sera amplifiée de $K_{8dB} \times 20$ avec K_{8dB} tel que $20log(K_{8dB}) = 8$. On a alors $K_{8dB} = 10^{\frac{8}{20}} \approx 2{,}5$. L'amplification est donc de 2,5 soit $S_0 = 2{,}5 \times 20 = 50$. On a $s_2(t) = 50\sin\,(10t - 80°)$.

Q.5. **Représenter approximativement l'entrée $e_2(t)$ et la sortie $s_2(t)$ en fonction du temps.**

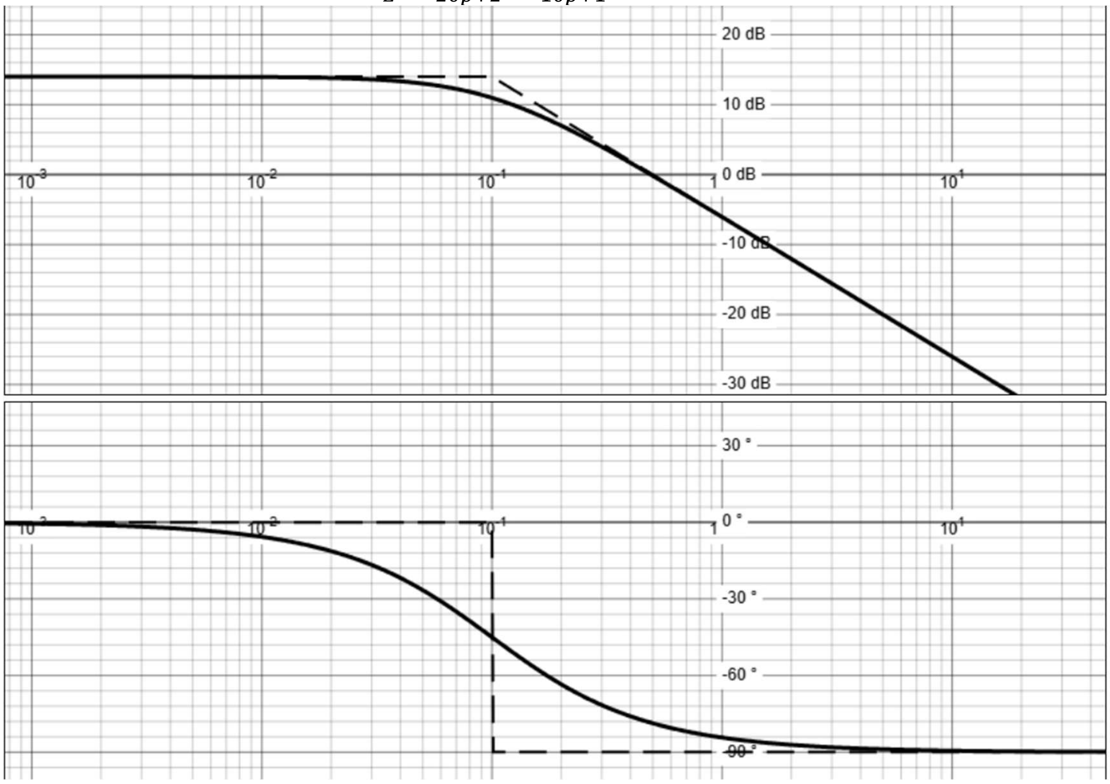


En prenant $\varphi = -80°$, $E_0 = 20$ et $S_0 = 50$.

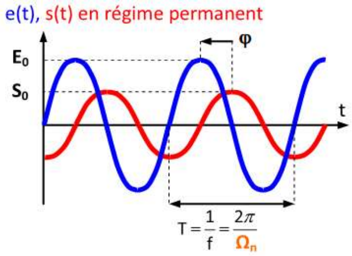
Q.6. **Bonus (si vous avez le temps) : Reprendre les questions avec l'équation différentielle suivante :**

$$\boldsymbol{20\dot{s}(t) + 2s(t) = 10e(t)}$$

- On a $20Sp + 2S = 10E$ soit $H = \frac{S}{E} = \frac{10}{20p+2} = \frac{5}{10p+1}$ donc $K = 5$ et $T = 10$.



- On a alors $\omega = 0{,}1 rad/s$. D'après le diagramme de Bode, la réponse sera amplifiée en amplitude (gain positif) et on a 12dB, donc la sortie sera amplifiée de $K_{12dB} \times 20$ avec K_{12dB} tel que $20log(K_{12dB}) = 12$. On a alors $K_{12dB} = 10^{\frac{12}{20}} \approx 4$. L'amplification est donc de 4 soit $S_0 = 4 \times 5 = 20$. On a $s_1(t) = 20\sin(10t - 35°)$.
- Pour $\omega = 10 rad/s$, le gain $-26 < 0$, donc la sortie sera atténuée de $K_{-26dB} \times 5$ avec K_{-26dB} tel que $20log(K_{-26dB}) = -26$. On a alors $K_{-26dB} = 10^{\frac{-26}{20}} \approx 0{,}05$. L'atténuation est donc de 0,05 soit $S_0 = 0{,}05 \times 5 = 0{,}25$. On a $s_2(t) = 0{,}25\sin(10t - 90°)$.



- En prenant $\varphi = -90°$, $E_0 = 5$ et $S_0 = 0{,}25$.

3. Tracés de diagrammes de Bode d'un second ordre

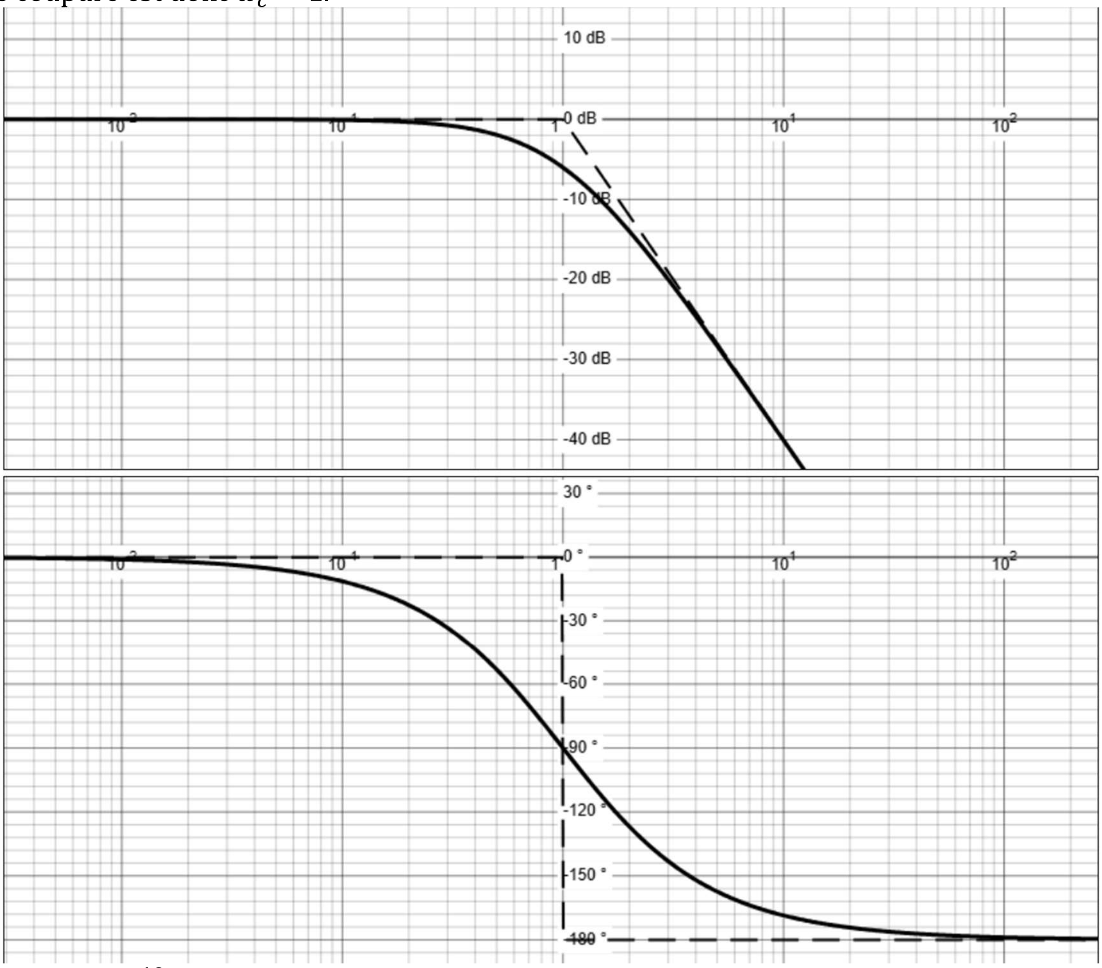
Q.1. **Tracer les diagrammes asymptotiques de Bode puis l'allure des diagrammes de Bode réels des systèmes modélisés par les fonctions de transfert suivantes :**

$$\boldsymbol{H_1(p) = \frac{1}{1+2p+p^2}\ ;\ H_2(p) = \frac{10}{1+0{,}1p+p^2}}$$

Bonus (si vous avez le temps) : $\boldsymbol{H_3(p)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1+1{,}1\ p+0{,}1p^2}}$

- $\boldsymbol{H_1(p)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1+2p+p^2}}$

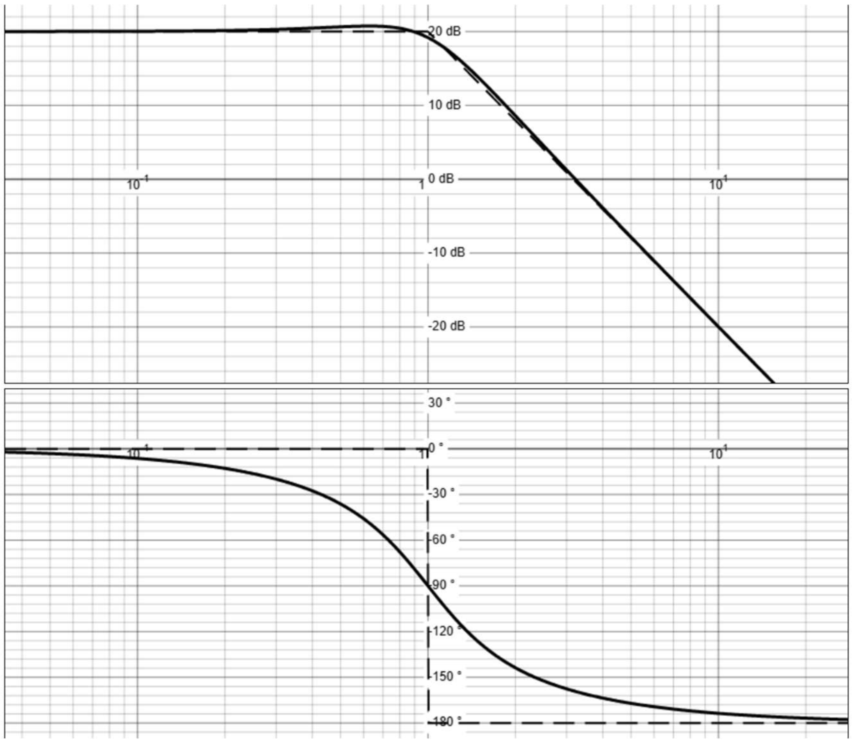
  Le discriminant est nul, il y a donc une racine réelle double. On a $H_1(p) = \frac{1}{(1+p)^2}$. La pulsation de coupure est donc $\omega_c = 1$.



- $\boldsymbol{H_2(p)} = \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{1+0{,}1p+p^2}}$

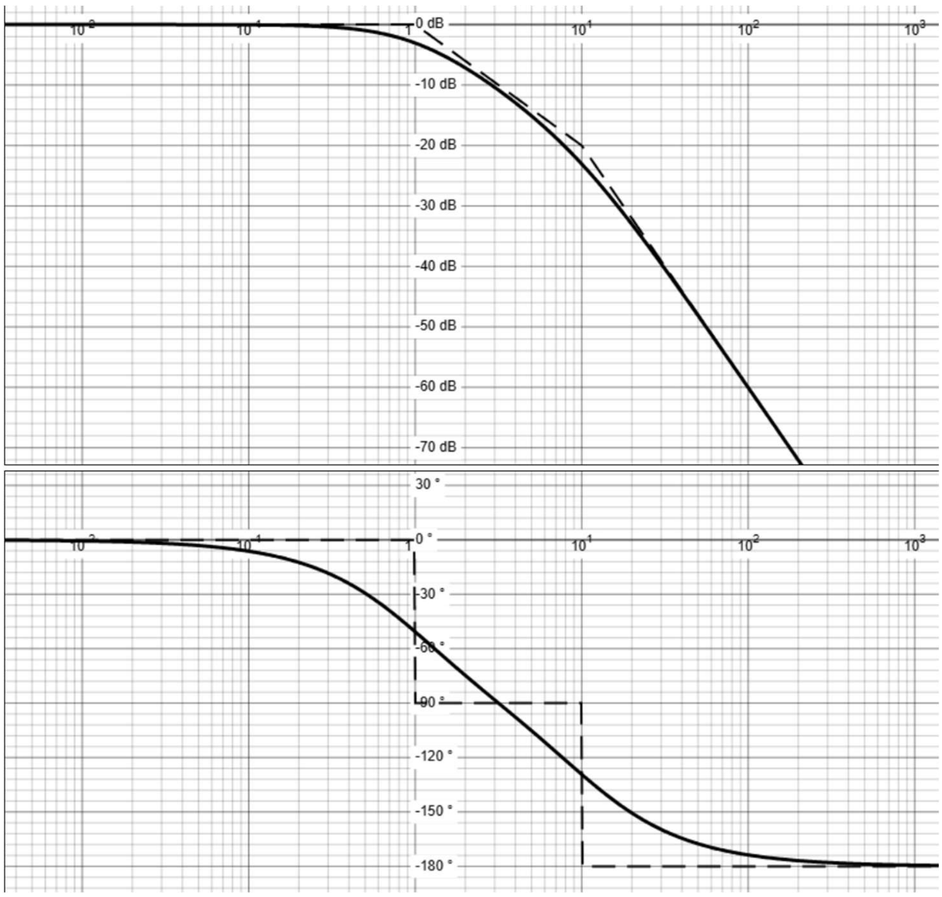
Le discriminant est négatif, il y a alors deux racines complexes conjuguées. On identifie $\xi = 0{,}55$ et $\omega_0 = 1rad/s$. Comme $\xi < 0{,}7$, il y a résonance.

La pulsation de résonance est $\omega_r = \omega_0\sqrt{1-2\xi^2} = 0{,}63rad/s$ et le facteur de résonance $Q = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} = 1{,}09$ soit $20\log(Q) = 0{,}7dB$.



- $\boldsymbol{H_3(p) = \frac{1}{1+1{,}1\,p+0{,}1p^2}}$

Le discriminant est positif, il y a donc deux racines réelles. On trouve de manière évidente $H_3(p) = \frac{1}{1+0{,}1p}\frac{1}{1+p}$.



4. Identification à partir d'un diagramme de Bode

Q.1. Pour les quatre diagrammes de Bode suivants, tracer les diagrammes de Bode asymptotiques puis identifier les fonctions de transfert correspondantes (pour le second ordre faiblement amorti, on cherchera seulement une estimation de ξ).

- On a $H_1(p) = \frac{K}{1+5p} = \frac{20}{1+5p}$, car $20\log(\mathrm{K}) = 26\mathrm{dB}$.
- $H_2(p)$ est de la forme $\frac{\mathrm{K}}{1+\frac{2\xi}{\omega_0}p+\frac{p^2}{{\omega_0}^2}}$, on a $K = 1$ et $20\log(Q) = 35dB$ soit $Q = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} = 56$, on en déduit $\xi = 1$ ou $\xi = 0{,}009$. Or on sait que $\xi < 0{,}7$ donc $\xi = 0{,}009$. On a $\omega_r = \omega_0\sqrt{1-2\xi^2} = 2rad/s$ en déduit $\omega_0 \approx 2rad/s$. Enfin $H_2(p) = \frac{1}{1+0{,}009p+\frac{p^2}{4}}$.
- $H_3(p) = \frac{50}{(1+p)\left(1+\frac{p}{80}\right)}$
- $H_4(p) = \frac{10\left(1+\frac{p}{20}\right)}{\left(1+\frac{p}{500}\right)}$