



# Correction DS 6 - SI

## Consignes

- Copies propres et bien présentées: encadrer vos résultats, souligner les applications numériques (avec une règle bien sûr)...
- Uniquement la calculatrice est autorisée.

## Table des matières

<b>1 Réglage d'un correcteur proportionnel</b>	<b>1</b>
1.1 Lecture de Bode . . . . .	1
1.2 Réglage des marges . . . . .	3
<b>2 Banc de test de pneumatique</b>	<b>5</b>
<b>3 Pilote automatique de voilier</b>	<b>8</b>
<b>4 Chaîne de transmission pour un positionnement de précision</b>	<b>12</b>
<b>5 Réalisation d'un diagramme de Bode</b>	<b>13</b>

## 1. Réglage d'un correcteur proportionnel

On considère le système asservi à retour unitaire dont le schéma-bloc est donné ci-dessous :



Avec  $C(p) = 1$

### 1.1 Lecture de Bode

**Question 1:** Identifier la fonction de transfert en boucle ouverte  $A(p)$  à partir du diagramme de Bode suivant ( $C(p) = 1$ ).

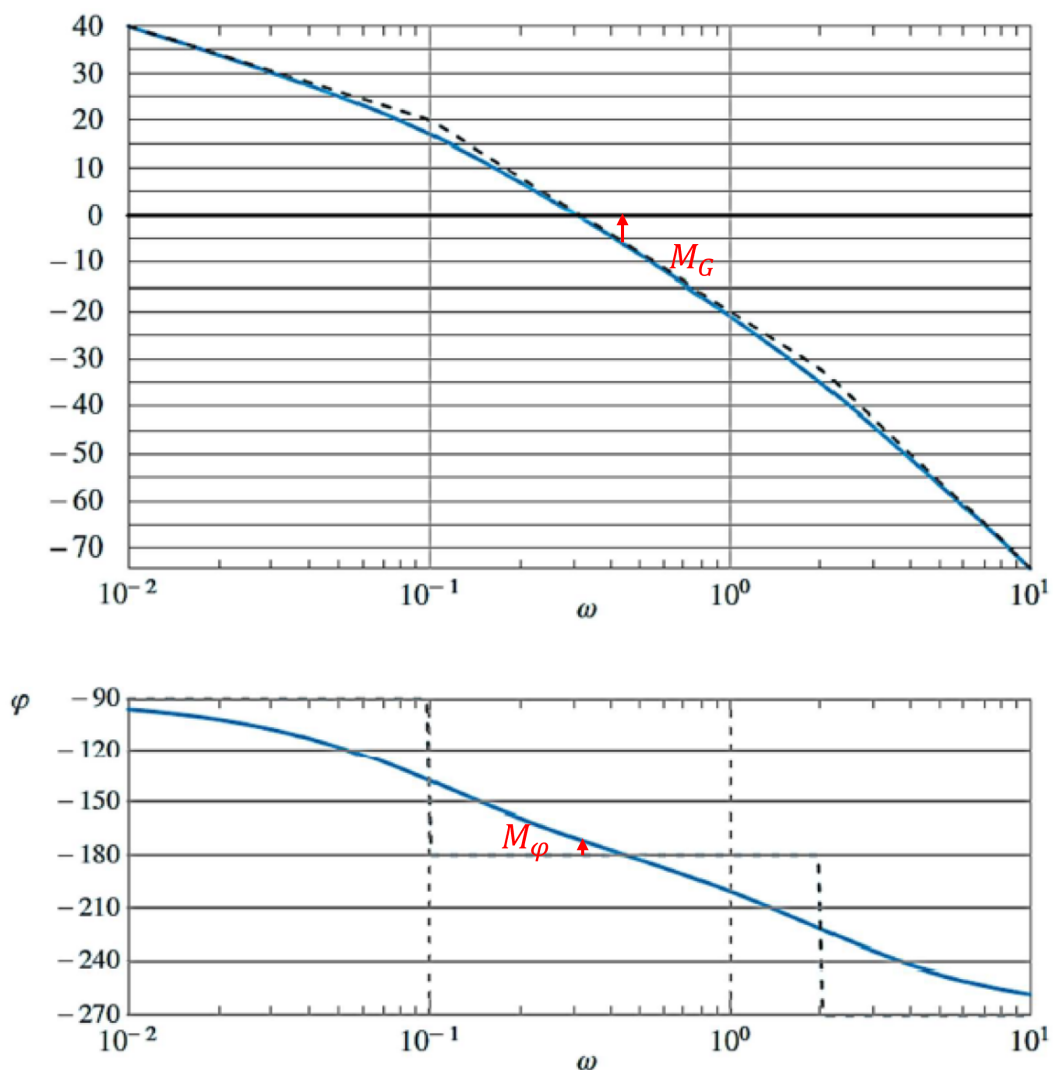
**Réponse 1:** On remarque que la phase commence à  $-90^\circ$ , il y a donc un intégrateur. Ensuite nous avons deux pulsations de coupure ( $\omega_{c_1} = 0,1 \text{ rad/s}$  et  $\omega_{c_2} = 2 \text{ rad/s}$ ), diminuant la phase de  $-90^\circ$  chacune, il s'agit donc de deux premiers ordre; ce qui est confirmé par les pentes

du diagramme de gain. On a alors 
$$A(p) = \frac{K}{p} \frac{1}{1 + \frac{1}{\omega_{c_1}} p} \frac{1}{1 + \frac{1}{\omega_{c_2}} p}$$

Il reste à déterminer le gain  $K$  : pour  $\omega = 10^{-2} \text{ rad/s}$  le gain vaut  $40 \text{ dB}$ , pour cette pulsation, seul l'intégrateur entre en compte. Il vient alors :

$$G_{dB}(A(j\omega)) = 20 \log(K) - 20 \log(\omega) \text{ soit } 40 = 20 \log(K) - 20 \log(10^{-2})$$

D'où  $K = 1$ . Enfin : 
$$A(p) = \frac{1}{p} \frac{1}{1 + \frac{1}{0,1} p} \frac{1}{1 + \frac{1}{2} p}$$



**Question 2:** En traçant sur le diagramme, déterminer les valeurs des marges de phase et de gain. En déduire que le système est stable.

**Réponse 2:** Les marges sont tracées sur les diagrammes ci-dessus. On trouve graphiquement  $M_\varphi \approx 10^\circ$  et  $M_G \approx 7 \text{ dB}$ . Les deux marges sont positives donc le système est stable.

**Question 3:** Donner l'erreur statique pour une entrée en échelon d'amplitude  $E_0$ .

**Réponse 3:** La fonction de transfert en boucle ouverte est :

$$FTBO(p) = C(p) \cdot A(p)$$
$$FTBO(p) = \frac{1}{p} \frac{1}{1 + \frac{1}{0,1}p} \frac{1}{1 + \frac{1}{2}p}$$

Cette fonction est de classe 1, on sait que l'erreur statique (donc l'erreur pour une entrée échelon) est nulle.

## 1.2 Réglage des marges

Le cahier des charges du système requiert une marge de gain de  $12dB$  et une marge de phase de  $40^\circ$ . Pour cela nous ajoutons un correcteur proportionnel pur  $C(p) = C$ .

**Question 4:** Déterminer la valeur de  $C$ , gain pur, permettant de satisfaire l'exigence de marge de phase.

**Réponse 4:** Un gain pur n'impacte que le gain, la phase reste inchangée. Un correcteur proportionnel (gain pur) augmente ou diminue le gain sans changer sa forme, le seul impact de C pour la marge de phase est de changer la valeur de  $\omega_{0dB}$ . D'après la définition de la marge de phase, pour avoir une marge de phase de  $40^\circ$ , il faut une phase de  $-140^\circ$  pour  $\omega_{0dB}$ . La méthode est donc la suivante :

1. Déterminer la pulsation  $\omega_{140^\circ}$  correspondant à une phase de  $-140^\circ$  ;
2. Calculer le gain pour cette pulsation ;
3. Résoudre C pour faire en sorte que cette pulsation soit  $\omega_{0dB}$ .

1. Déterminons  $\omega_{140^\circ}$  :

$$\varphi(A(j\omega)) = -140^\circ$$

$$\text{Or } \varphi(A(j\omega)) = \arg\left(\frac{1}{j\omega}\right) - \arg\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{c_1}}\right) - \arg\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{c_2}}\right)$$

$$\text{D'où } \varphi(A(j\omega_{140^\circ})) = \arg\left(\frac{1}{j\omega_{140^\circ}}\right) - \arg\left(1 + j\frac{\omega_{140^\circ}}{\omega_{c_1}}\right) - \arg\left(1 + j\frac{\omega_{140^\circ}}{\omega_{c_2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow -140 = -90 - \arctan\left(\frac{\omega_{140^\circ}}{\omega_{c_1}}\right) - \arctan\left(\frac{\omega_{140^\circ}}{\omega_{c_2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \tan(50) = \frac{\frac{\omega_{140^\circ}}{\omega_{c_1}} + \frac{\omega_{140^\circ}}{\omega_{c_2}}}{1 - \frac{\omega_{140^\circ}}{\omega_{c_1}} \frac{\omega_{140^\circ}}{\omega_{c_2}}}$$

$$\Leftrightarrow \omega_{140^\circ}^2 \left(\frac{\tan(50)}{\omega_{c_1} \omega_{c_2}}\right) + \omega_{140^\circ} \left(\frac{1}{\omega_{c_1}} + \frac{1}{\omega_{c_2}}\right) - \tan(50) = 0$$

La résolution de ce polynôme (avec  $\omega_{140^\circ} > 0$ ) donne  $\omega_{140^\circ} = 0,10 \text{ rad/s}$ .

2. Calculons le gain pour cette pulsation :

$$G(A(j\omega_{140^\circ})) = 20\log(C) - 20\log(\omega_{140^\circ}) - 20\log\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_{140^\circ}}{\omega_{c_1}}\right)^2}\right) - 20\log\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_{140^\circ}}{\omega_{c_2}}\right)^2}\right)$$

3. On résout C pour avoir  $\omega_{140^\circ} = \omega_{0dB}$  :

$$20\log(C) - 20\log(\omega_{140^\circ}) - 20\log\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_{140^\circ}}{\omega_{c_1}}\right)^2}\right) - 20\log\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_{140^\circ}}{\omega_{c_2}}\right)^2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \log(C) = \log(\omega_{140^\circ}) + \log\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_{140^\circ}}{\omega_{c_1}}\right)^2}\right) + \log\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_{140^\circ}}{\omega_{c_2}}\right)^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow C = 10^{\log(\omega_{140^\circ}) + \log\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_{140^\circ}}{\omega_{c_1}}\right)^2}\right) + \log\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_{140^\circ}}{\omega_{c_2}}\right)^2}\right)} = 0,14$$

Remarque : On peut également déterminer C graphiquement. Quand la phase vaut  $-140^\circ$ , le gain vaut  $15dB$ , pour avoir une marge de phase de  $40^\circ$ , on veut que ce gain soit nul, il faut donc que l'influence de C soit de diminuer le gain de  $15dB$ . Soit :

$$20\log(C) = -15 \Leftrightarrow C = 10^{\frac{-15}{20}} \approx 0,18$$

La différence est due à la lecture graphique.

**Question 5:** Déterminer la valeur de C, gain pur, permettant de satisfaire l'exigence de marge de gain.

**Réponse 5:** En partant de la définition de la marge de gain, pour avoir une marge de gain de  $12dB$ , il faut une valeur de gain de  $-12dB$  quand la phase vaut  $-180^\circ$ .

De même que précédemment, on sait qu'un correcteur proportionnel n'influe que sur le gain, donc la pulsation  $\omega_{180^\circ}$  pour laquelle la phase vaut  $-180^\circ$  est inchangée et vaut  $\omega_{180^\circ} = \sqrt{\omega_{c_1}\omega_{c_2}} = 0,45rad/s$ . Il suffit donc de calculer le gain en prenant en compte le gain pur du correcteur :

$$0 - G(A(j\omega_{180^\circ})) - G(C) = 12dB$$

$$\Leftrightarrow 20\log(C) = -G(A(j\omega_{180^\circ})) - 12$$

$$\Leftrightarrow \log(C) = \log(\omega_{180^\circ}) + \log\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_{180^\circ}}{\omega_{c_1}}\right)^2}\right) + \log\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_{180^\circ}}{\omega_{c_2}}\right)^2}\right) - \frac{12}{20}$$

$$\Leftrightarrow C = 10^{\log(\omega_{180^\circ}) + \log\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_{180^\circ}}{\omega_{c_1}}\right)^2}\right) + \log\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_{180^\circ}}{\omega_{c_2}}\right)^2}\right) - \frac{12}{20}} = 0,53.$$

Remarque : On peut également le déterminer graphiquement. On avait relevé une marge de gain de  $7dB$  sans correction. Pour satisfaire le cahier des charges il faut atteindre  $12dB$ , donc l'ajout du correcteur doit diminuer le gain de  $12 - 7 = 5dB$ , soit  $20\log(C) = -5 \Leftrightarrow C = 10^{-0,25} = 0,56$ .

**Question 6:** En déduire la valeur de  $C$  qui permet de satisfaire simultanément les deux exigences.

**Réponse 6:** On peut simplement prendre une des deux valeurs de  $C$  et faire les applications numériques. Sinon, avec un peu de réflexion : la valeur de  $C$  demandant de diminuer le plus le gain satisfait à la fois le critère sur la marge de phase et celui sur la marge de gain. C'est à dire la plus petite valeur de  $C$ . Ainsi  $C = 0,14$  permet de satisfaire simultanément les deux exigences.

## 2. Banc de test de pneumatique

On s'intéresse à un banc de test d'usure de pneumatiques. Un ensemble pneumatique et jante 2, entraîné en rotation par rapport au bras 3 à l'aide d'un moto-réducteur, roule sur un plateau tournant 1. Le bras 3 et le plateau tournant 1 sont entraînés en rotation par rapport aux bâti 0 à l'aide de deux autres moto-réducteurs. En assimilant la roue 2 à un disque on obtient le schéma cinématique de la Figure 1.



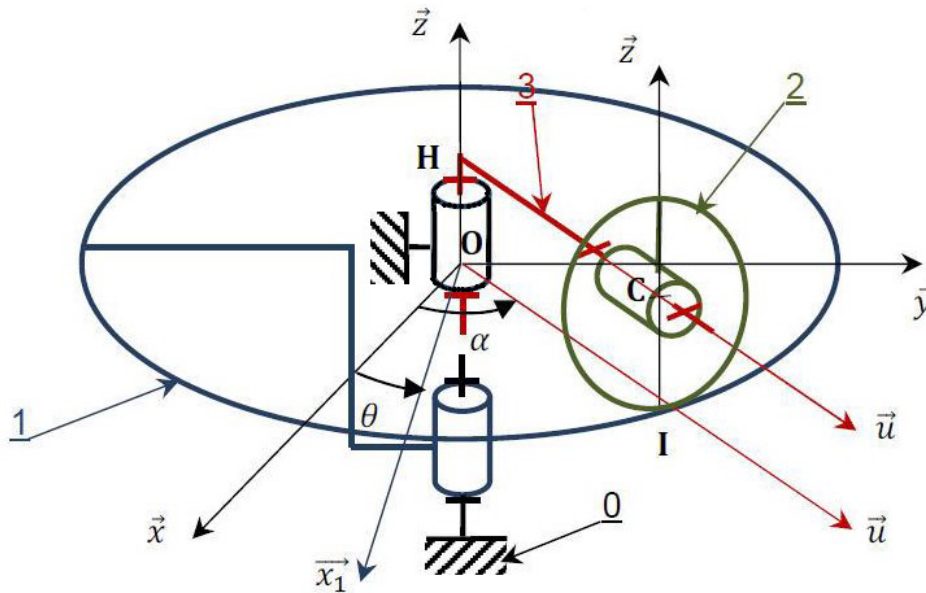


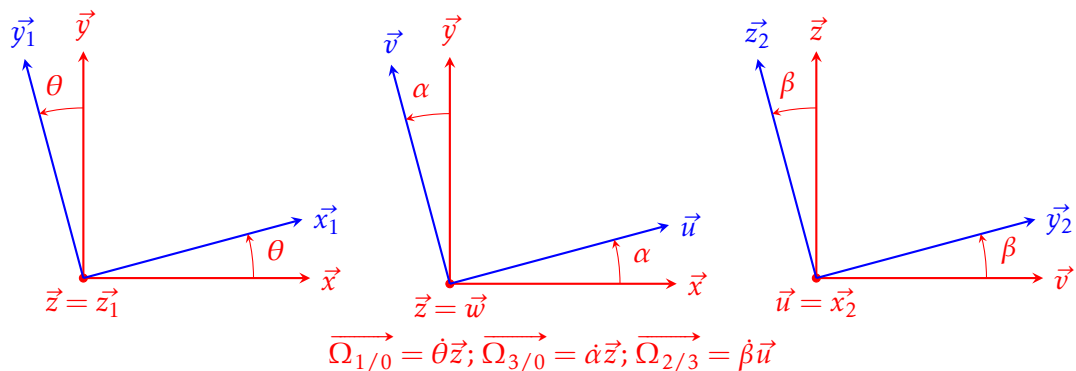
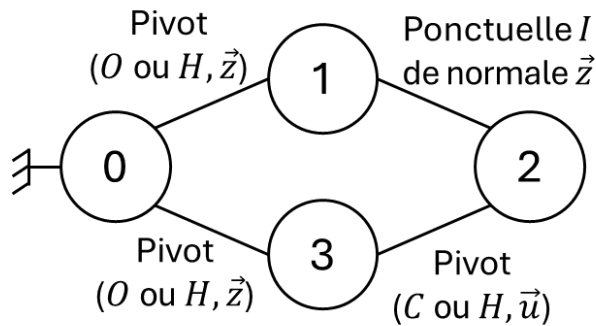
FIGURE 1 – Schéma cinématique issu de la modélisation du système

Le paramétrage est le suivant :

- Le bâti 0, considéré fixe, est associé au repère  $R_0 : (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .
- Le plateau tournant 1, dont le repère associé est  $R_1 : (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ , est en mouvement de rotation d'axe  $(O, \vec{z})$  par rapport au bâti 0 tel que  $\vec{z} = \vec{z}_1$  et  $(\vec{x}, \vec{x}_1) = \theta$ .
- Le bras 3, dont le repère associé est  $R_3 : (H, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ , est en mouvement de rotation d'axe  $(O, \vec{z})$  par rapport au bâti 0 tel que  $\vec{z} = \vec{w}$  et  $(\vec{x}, \vec{u}) = \alpha$ .
- L'ensemble pneumatique et jante 2, dont le repère associé est  $R_2 : (C, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ , est en mouvement de rotation d'axe  $(H, \vec{u})$  par rapport au bras 3 tel que  $\vec{u} = \vec{x}_2$  et  $(\vec{z}, \vec{z}_2) = \beta$ .
- On pose  $\overrightarrow{OH} = e\vec{z}$ ,  $\overrightarrow{HC} = d\vec{u}$  et on note  $r$  le rayon du pneumatique 2 qui est en contact avec le plateau 1 au point  $I$ .

**Question 7:** Déterminer l'expression du vecteur vitesse de glissement entre 1 et 2.

**Réponse 7:** Dans un premier temps établissons le graphe de liaison et les figures de changement de base.



La vitesse de glissement est définie au point de contact  $\vec{V}_{I \in 2/1}$ .

Par décomposition il vient :

$$\vec{V}_{I \in 2/1} = \vec{V}_{I \in 2/3} + \vec{V}_{I \in 3/0} + \vec{V}_{I \in 0/1} \text{ soit } \vec{V}_{I \in 2/1} = -\vec{V}_{I \in 3/2} + \vec{V}_{I \in 3/0} - \vec{V}_{I \in 1/0}$$

- $\vec{V}_{I \in 3/2} = \vec{V}_{C \in 3/2} + \vec{IC} \wedge \vec{\Omega}_{3/2} = r\vec{z} \wedge -\dot{\beta}\vec{u} = -r\dot{\beta}\vec{v}$
- $\vec{V}_{I \in 3/0} = \vec{V}_{H \in 3/0} + \vec{IH} \wedge \vec{\Omega}_{3/0} = (r\vec{z} - d\vec{u}) \wedge \dot{\alpha}\vec{z} = d\dot{\alpha}\vec{v}$
- $\vec{V}_{I \in 1/0} = \vec{V}_{H \in 1/0} + \vec{IH} \wedge \vec{\Omega}_{1/0} = (r\vec{z} - d\vec{u}) \wedge \dot{\theta}\vec{z} = d\dot{\theta}\vec{v}$

D'où  $\vec{V}_{I \in 2/1} = (r\dot{\beta} + d(\dot{\alpha} - \dot{\theta}))\vec{v}$ .

**Question 8:** En déduire la relation scalaire entre les vitesses de rotation des trois actionneurs, liés à  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\alpha}$  et  $\dot{\beta}$ , afin d'assurer en permanence le roulement sans glissement du pneumatique sur le plateau.

**Réponse 8:** La condition de roulement sans glissement s'exprime :  $\vec{V}_{I \in 2/1} = \vec{0}$ , soit  $(r\dot{\beta} - d\dot{\theta} + d\dot{\alpha})\vec{v} = \vec{0}$   
On en déduit  $r\dot{\beta} - d(\dot{\theta} + \dot{\alpha}) = 0$ .

**Question 9:** Déterminer les expressions des vecteurs de roulement et de pivotement. Rappel : Ces vecteurs sont définies tels que :

$$\vec{\Omega}_{2/1} = \vec{\Omega}_{p2/1} + \vec{\Omega}_{r2/1}, \text{ où } \vec{\Omega}_{r2/1} \text{ est le vecteur de roulement et } \vec{\Omega}_{p2/1} \text{ celui de pivotement.}$$

De plus le vecteur de pivotement est porté par la normale au plan du contact.

**Réponse 9:** Ces vecteurs sont définies tels que :

$\vec{\Omega}_{2/1} = \vec{\Omega}_{p2/1} + \vec{\Omega}_{r2/1}$ , où  $\vec{\Omega}_{r2/1}$  est le vecteur de roulement et  $\vec{\Omega}_{p2/1}$  celui de pivotement. De plus le vecteur de pivotement est porté par la normale au plan du contact, ici  $\vec{z}$ .

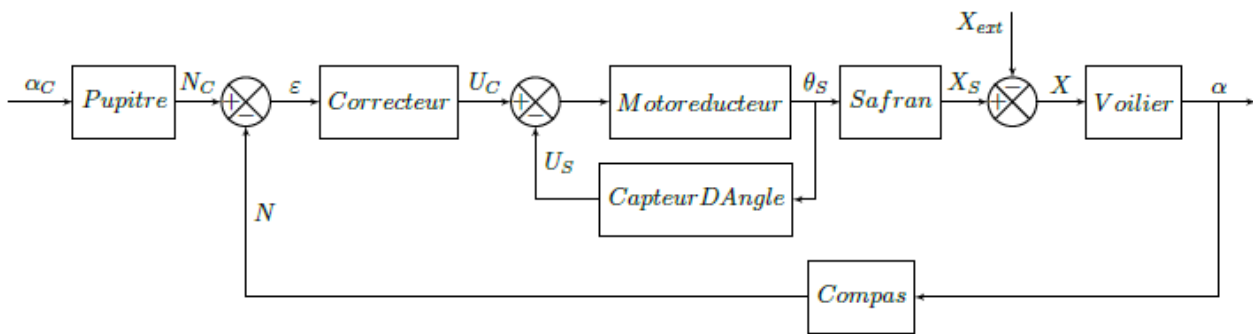
Déterminons  $\vec{\Omega}_{2/1}$  :

$$\vec{\Omega}_{2/1} = \vec{\Omega}_{2/3} + \vec{\Omega}_{3/0} - \vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\beta}\vec{u} + \dot{\alpha}\vec{z} - \dot{\theta}\vec{z}$$

Par identification :  $\vec{\Omega}_{p2/1} = \dot{\alpha} - \dot{\theta}\vec{z}$  et  $\vec{\Omega}_{r2/1} = \dot{\beta}\vec{u}$ .

### 3. Pilote automatique de voilier

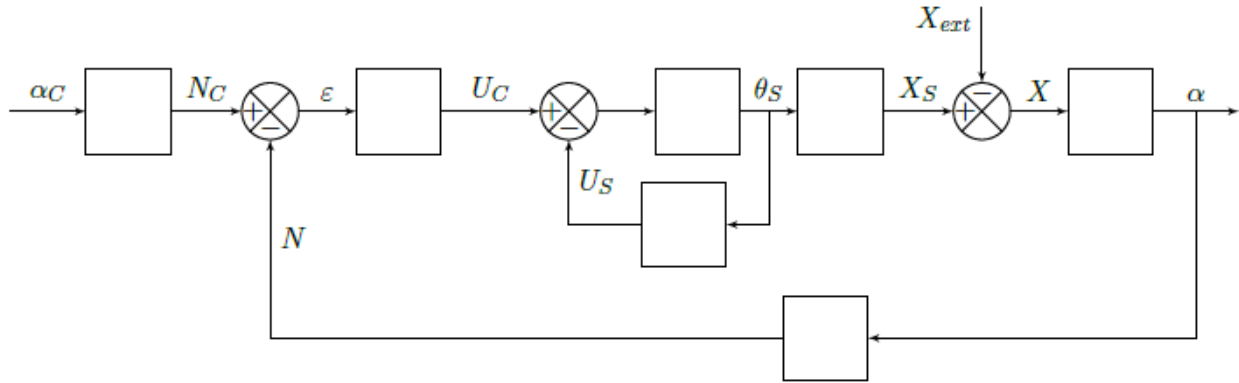
Un pilote automatique de voilier est un dispositif chargé de barrer un voilier automatiquement, permettant au skipper de s'occuper des réglages des voiles ou de se reposer. Le système régule le cap du voilier à la valeur de consigne définie par le pilote. Le schéma-blocs fonctionnel est décrit sur la figure ci-dessous.



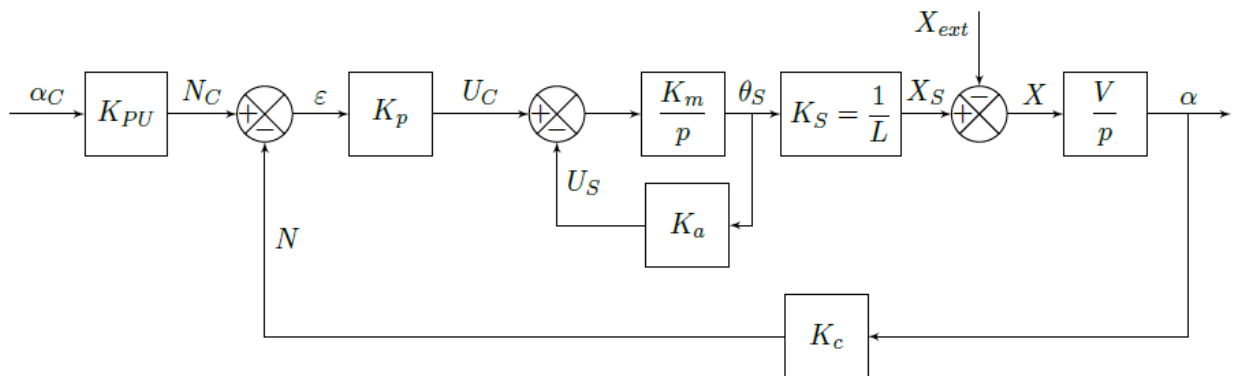
- Le skipper entre le cap consigne dans le pupitre de gain  $K_{PU}$  qui traduit l'information sous forme d'une variable  $N_c$  transmise au calculateur ;
- Le correcteur  $C(p)$  élabore la commande  $U_c$  du groupe motorisation qui entraîne le safran d'un angle  $\theta_s$ . Le correcteur est, en première approximation, choisi comme une constante  $C(p) = K_p$  ;
- La fonction de transfert du groupe motorisation vaut  $H_m(p) = \frac{K_m}{p}$  ;
- La rotation du safran génère une action  $X_s$  entraînant le voilier en rotation. Le gain du safran vaut  $K_s = \frac{1}{L}$  où  $L$  est une distance caractéristique du voilier ;
- Diverses perturbations (vagues, vent, etc.) exercent d'autres actions  $X_{ext}$  perturbant le mouvement du voilier ;
- Le comportement du voilier est modélisé par la fonction de transfert  $H_b(p) = \frac{V}{p}$  où  $V$  est la vitesse du voilier ;
- Le compas de gain  $K_C$  mesure le cap réel du voilier et transmet l'information au calculateur sous forme d'une variable  $N$  ;
- Un second capteur de gain  $K_a$  est implanté sur le système, permettant de tenir compte de l'angle du safran dans la commande du système.

**Question 10:** Compléter le schéma-bloc ci-dessous correspondant au système asservi.





Réponse 10:



Question 11: Déterminer la valeur de  $K_{PU}$ .

Réponse 11: Avec  $\alpha = \alpha_c$  et  $\epsilon = 0$ , il vient  $\epsilon = \alpha_c K_{PU} - \alpha K_C = 0$ . Il faut donc  $K_{PU} = K_C$ .

Question 12: Calculer la fonction de transfert  $H_1(p) = \frac{\alpha}{\alpha_c}$  et l'exprimer sous forme canonique.

Réponse 12: Pour cela on considère  $X_{ext} = 0$  et on obtient

$$H_1(p) = \frac{K_{PU}}{K_C} \frac{1}{p^2 \left[ \frac{L}{K_C K_p K_m V} \right] + p \left[ \frac{L K_a}{K_C K_p V} \right] + 1}$$

Question 13: Déterminer l'erreur statique pour une entrée en échelon  $\alpha_c = \alpha_0 u(t)$ . Préciser le nom du théorème utilisé.

Réponse 13: On sait que l'erreur statique  $e_{rs}$  vaut  $e_{rs} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha_c(t) - \alpha(t)$ . D'après le théorème de la valeur finale :

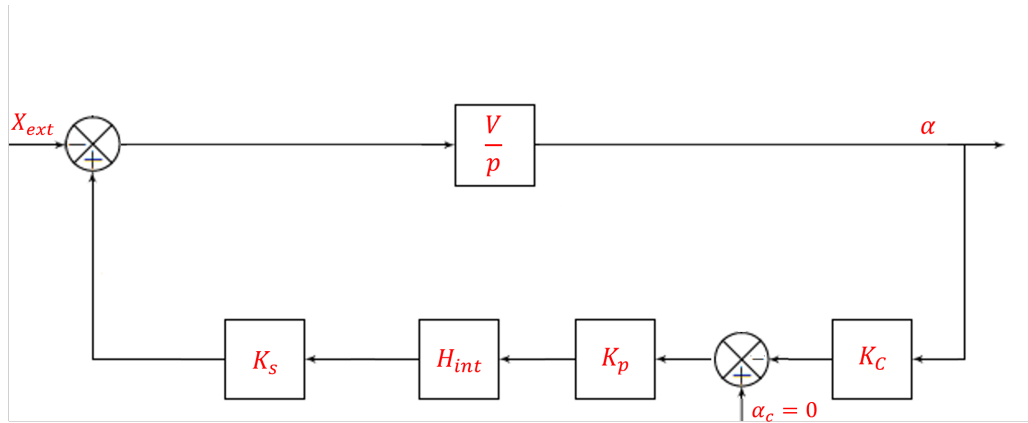
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha_c(t) - \alpha(t) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p(\alpha_c(p) - \alpha(p)) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p \frac{\alpha_0}{p} [1 - H_1(p)]$$

$$\Leftrightarrow e_{rs} = \lim_{p \rightarrow 0^+} \alpha_0 \left[ 1 - \frac{K_{PU}}{K_C} \frac{1}{p^2 \left[ \frac{L}{K_C K_p K_m V} \right] + p \left[ \frac{L K_a}{K_C K_p V} \right] + 1} \right]$$

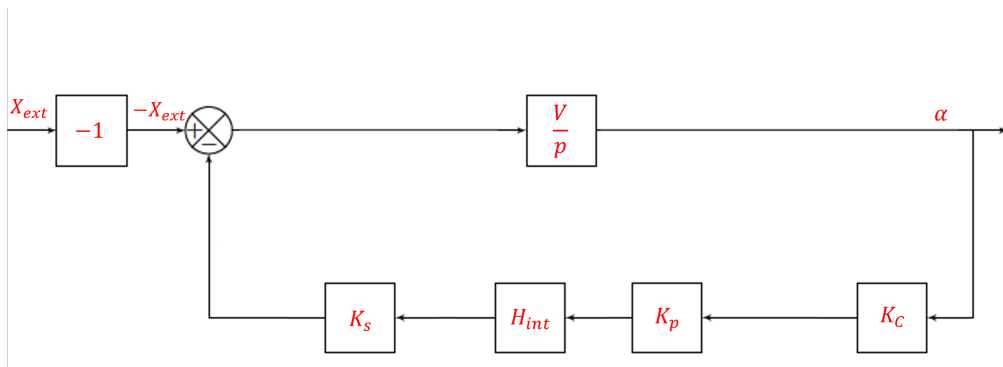
$$\Leftrightarrow e_{rs} = \alpha_0 \left[ 1 - \frac{K_{PU}}{K_C} \right] = 0 \text{ car } K_{PU} = K_C$$

**Question 14:** Pour une perturbation en échelon,  $X_{ext} = X_0u(t)$  déterminer l'erreur statique due à la perturbation. Conclure quant à l'influence de la perturbation sur la précision du système.

**Réponse 14:** Pour cela nous devons calculer la fonction de transfert  $H_2(p) = \frac{\alpha}{X_{ext}}$ . Il convient de ré-organiser le schéma bloc en conséquence :



Avec  $H_{int}(p) = \frac{K_m}{p + K_m K_a}$ . Le comparateur dans la boucle retour est équivalent à un bloc  $-1$ . On peut déplacer ce signe moins jusqu'au comparateur d'entrée; en ajoutant un bloc  $-1$  en entrée de  $X_{ext}$ , il vient :



**Réponse 14:** D'où, d'après la formule de Black :

$$H_2(p) = -\frac{V}{p} \frac{1}{1 + \frac{V}{p} K_s H_{int} K_p K_C} = -\frac{V}{p} \frac{1}{1 + \frac{V K_s K_m K_p K_C}{p + K_m K_a}}$$

$$\Leftrightarrow H_2(p) = \frac{-V(p + K_m K_a)}{V K_s K_m K_C K_p + K_m K_a p + p^2}$$

$$\Leftrightarrow H_2(p) = \frac{-V \left( \frac{p + K_m K_a}{V K_s K_m K_C K_p} \right)}{1 + \frac{K_a}{V K_s K_C K_p} p + \frac{1}{V K_s K_m K_C K_p} p^2}$$

$$\Leftrightarrow H_2(p) = \frac{-\left[ \frac{p}{K_s K_m K_p K_C} + \frac{K_a}{K_s K_p K_C} \right]}{1 + \frac{K_a}{V K_s K_C K_p} p + \frac{1}{V K_s K_m K_C K_p} p^2}$$

$$\Leftrightarrow H_2(p) = \frac{-K_a}{K_s K_p K_C} \frac{1 + \frac{1}{K_a K_m} p}{1 + \frac{K_a}{V K_s K_C K_p} p + \frac{1}{V K_s K_m K_C K_p} p^2}$$

D'après le théorème de la valeur finale et de même que précédemment :

$$e_{rs} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha_c(t) - \alpha(t) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p(0 - \alpha(p))$$

$$\Leftrightarrow e_{rs} = \lim_{p \rightarrow 0^+} p \left[ 0 - H_2(p) \frac{X_0}{p} \right]$$

$$\Leftrightarrow e_{rs} = \lim_{p \rightarrow 0^+} p \left[ \frac{X_0}{p} \frac{K_a}{K_s K_p K_C} \frac{1 + \frac{1}{K_a K_m} p}{1 + \frac{K_a}{V K_s K_C K_p} p + \frac{1}{V K_s K_m K_C K_p} p^2} \right]$$

$$\Leftrightarrow e_{rs} = X_0 \frac{K_a}{K_s K_p K_C}$$

On en déduit que la perturbation impacte la précision du système.

### 4. Chaîne de transmission pour un positionnement de précision

L'objectif est de positionner avec précision le centre d'inertie d'un pendule dans un sismomètre. L'exigence de précision requiert une précision sur le positionnement de  $\pm 3\mu m$ . Le schéma cinématique de la chaîne de transmission considérée est présentée Figure 2.

La notation du vecteur vitesse de rotation d'un solide  $i$  par rapport à un solide  $j$  est la suivante

$$\vec{\Omega}_{i/j} \cdot \vec{y}_2 = \omega_{i/j}$$

La Figure 3 représente la chaîne de transmission.

Le joint d'Oldham permet un accouplement sans erreur entre l'arbre de sortie du réducteur et la vis du système vis-écrou. Ce type de joint est homocinétique, c'est-à-dire que la vitesse de rotation de l'arbre de sortie du réducteur 5 est la même que celle de la vis  $v$  par rapport au pendule 2 :

$$\omega_{5/2} = \omega_{v/2}$$

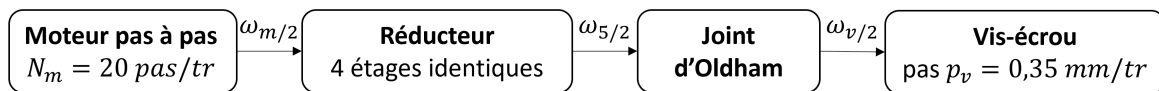


FIGURE 3 – Chaîne de transmission

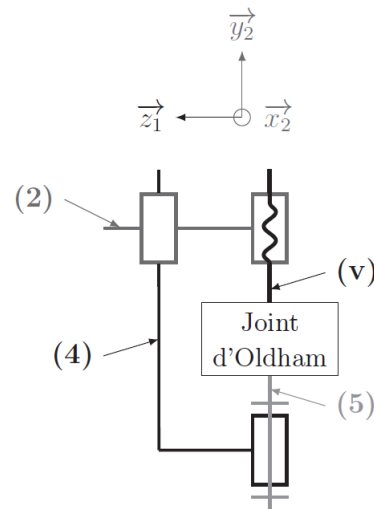
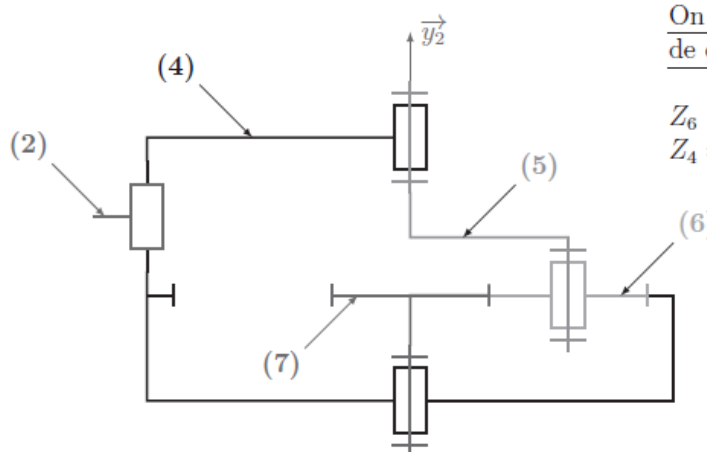


FIGURE 2 – Schéma cinématique de la chaîne de transmission

**Question 15:** Justifier que  $\omega_{4/2} = 0$ .

**Réponse 15:** La liaison entre 4 et 2 est une liaison glissière, il n'y a donc pas de rotation possible.

La Figure 4 donne le schéma cinématique du dernier étage du réducteur ainsi que le nombre de dent des roues dentées.



On note  $Z_i$  le nombre de dents de la pièce  $i$  :

$$Z_6 = Z_7 = 12$$

$$Z_4 = 36$$

FIGURE 4 – Schéma cinématique du dernier étage du réducteur

**Question 16:** Établir l'expression du rapport de transmission d'un étage  $k = \frac{\omega_{5/2}}{\omega_{7/2}}$  en fonction des nombres de dents  $Z_i$  et faire l'application numérique.

**Réponse 16:** On remarque que l'axe de la liaison pivot entre 5 et 6 n'est pas fixe par rapport à 4 : il s'agit d'un train épicycloïdal.

Le satellite est le 6, le porte satellite est le 5, les planétaires sont numérotés 7 et 4.

La formule de Willis donne :

$$\frac{\omega_{4/5}}{\omega_{7/5}} = -\frac{Z_7 Z_6}{Z_6 Z_4} = -\frac{Z_7}{Z_4}$$

Par décomposition il vient :  $\frac{-\omega_{5/2}}{\omega_{7/2} - \omega_{5/2}} = -\frac{Z_7}{Z_4}$

$$\text{On déduit : } \omega_{5/2}(Z_4 + Z_7) = Z_7 \omega_{7/2} \iff k = \frac{\omega_{5/2}}{\omega_{7/2}} = \frac{Z_7}{Z_7 + Z_4} = \frac{1}{4}$$

La Figure 5 montre le schéma cinématique global du mécanisme de translation du centre d'inertie.

**Question 17:** Exprimer le rapport de transmission global du réducteur  $k_g = \frac{\omega_{5/2}}{\omega_{m/2}}$  en fonction de  $k$ .

**Réponse 17:** Comme les 4 étages sont identiques :  $k_g = k^4$ .

**Question 18:** En s'appuyant sur les notations et données de la Figure 3, établir l'expression du déplacement linéaire  $d_v$  de la vis  $v$  par pas du moteur en fonction de  $N_m$ ,  $k_g$  et  $p_v$ .

**Réponse 18:**  $d_v = \frac{p_v k_g}{N_m}$

**Question 19:** Réaliser l'application numérique et conclure quant à l'exigence de précision du positionnement du centre d'inertie.

**Réponse 19:** L'application numérique donne  $d_v = 0,068 \mu m < 3 \mu m$   
On en conclut que l'exigence de précision est validée.

## 5. Réalisation d'un diagramme de Bode

Soit la fonction :

$$H(p) = \frac{2}{p(1 + \frac{0,4}{20}p + \frac{1}{400}p^2)}$$

**Question 20:** Tracer le diagramme asymptotique en faisant clairement apparaître les pentes, valeurs remarquables du gain, de la phase et des pulsations. *Attention à bien noter l'échelle également.*

**Réponse 20:** Voir le diagramme de Bode.

**Question 21:** Ajouter les tracés réels en précisant les valeurs particulières et en les justifiant par le calcul (*uniquement ces valeurs!*).

**Réponse 21:** Par identification on a  $K = 2, \omega_0 = 20 \text{ rad/s}$  et  $\xi = 0,2$ , il y a donc résonance. On calcule la pulsation de résonance  $\omega_r$  :

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2} \text{ soit } \omega_r \approx 19 \text{ rad/s}$$

Calculons la valeur du facteur de résonance  $Q$  :

$$Q = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}} \text{ soit } Q \approx 2,55$$

On sait que la résonance à la pulsation de résonance vaut  $20 \log(Q) \approx 8,1 \text{ dB}$ .

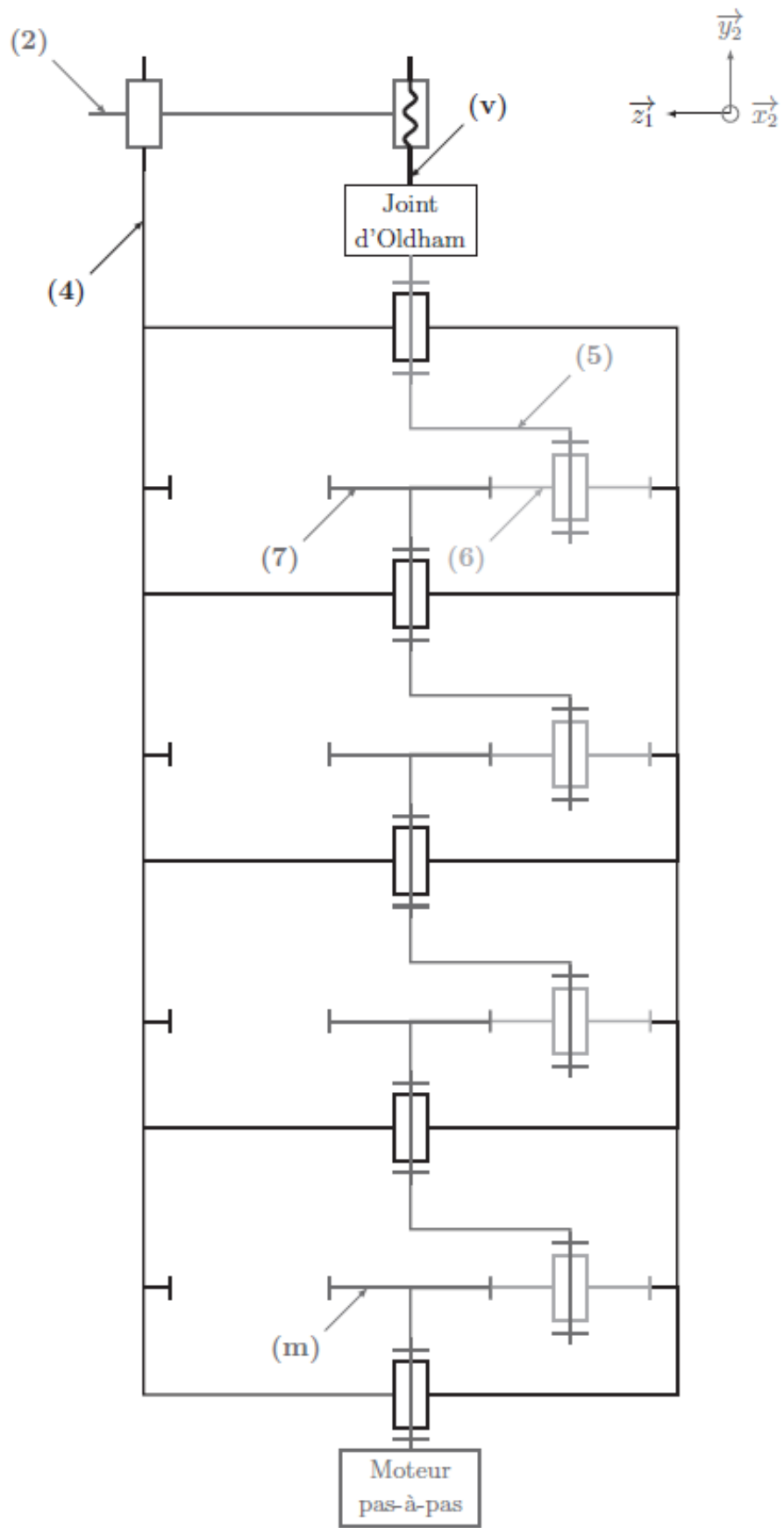


FIGURE 5 – Schéma cinématique du mécanisme de translation du centre d'inertie

