# Représentation des actions mécaniques

La cinématique étudie les mouvements sans s'intéresser aux causes qui les ont engendrés.

La statique est l'étude des conditions de repos ou de mouvements uniformes des solides sous l'action des effets extérieurs qui les sollicitent. On dit que les solides sont « à l'équilibre ».

## 1. Notion d'action mécanique

### 1.1. Modèle du solide

Le modèle du solide utilisé en statique est celui des solides indéformables, déjà utilisé en cinématique. En statique aussi les solides sont a priori non ponctuels.

Un solide indéformable est un solide (système matériel) dont l'ensemble des points matériels restent à égale distance les uns des autres au cours du temps. Soient $A$ et $B$ deux points quelconques d'un solide indéformable, alors $\|\overrightarrow{AB}\| = constante$.

### 1.2. Définition des actions mécaniques

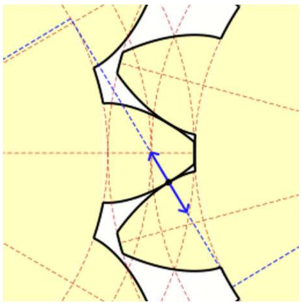
On appelle **action mécanique**, tout phénomène qui crée, entretient ou s'oppose aux mouvements, c'est-à-dire :

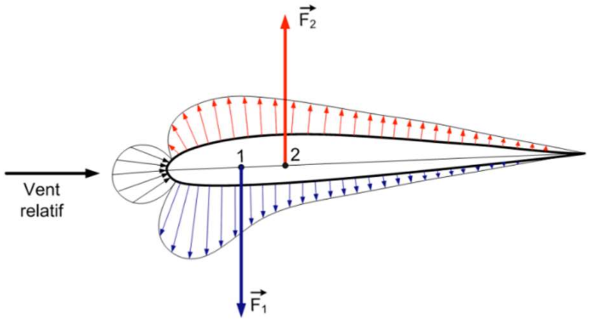
- Maintenir un solide immobile (l'objet de ce cours et de la prochaine séquence) ;
- Modifier le mouvement de ce solide (cours de dynamique de deuxième année) ;
- Déformer un solide (cours de Résistance Des Matériaux en post-prépa).

**Remarque** : Le terme « *effort* » est aussi employé à la place d'« action mécanique ».

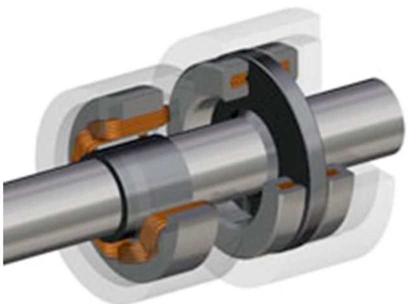
Les actions mécaniques peuvent être de deux sortes :

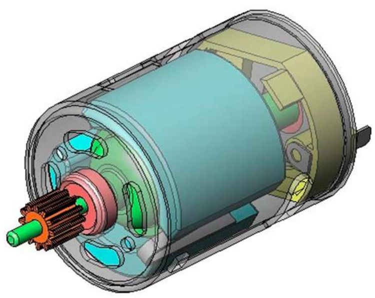
1) Actions mécaniques de contact (liaison de contact entre solides, pression, etc.)






2) Actions mécaniques à distance (champ de pesanteur, force électromagnétique, etc.)





# 2. Modélisation d'une action mécanique

Les degrés de liberté pouvant être de deux types, **translation** ou **rotation**, les actions mécaniques se différencient en fonction de leur capacité à engendrer ou à restreindre ces degrés de liberté. On distingue alors deux types d'action mécanique en fonction du type de mouvement :

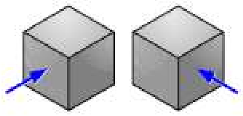
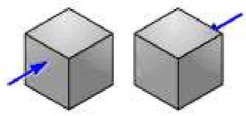
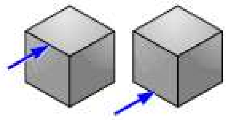
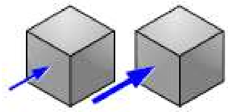
$$\underbrace{\textbf{Force} \text{ et } \textbf{Moment d'une force}}_{\textbf{Actions mécaniques}}$$

## 2.1. Notion de force

La notion de force est une notion intuitive dont on peut ressentir les effets sur le plan physiologique. Quand nous sommes poussés par exemple, nous ne voyons pas la force mais nous la ressentons. Pour soulever une pierre ou pour la lancer, nous ressentons une sensation que l'on appelle effort musculaire : nous disons communément que nous exerçons une action.

En mécanique, on appelle *force* l'outil mathématique servant à décrire une action mécanique créant ou empêchant une **translation**.

Une force possède quatre caractéristiques :

| Direction | Sens | Point d'application | Intensité (norme) |
|---|---|---|---|
|  |  |  |  |

Nous avons donc tous les éléments qui caractérisent un pointeur, c'est-à-dire l'association d'un vecteur et d'un point particulier.

On peut donc utiliser une représentation vectorielle et parler de vecteur force :

$$\overrightarrow{F_{doigt \to cube}}$$

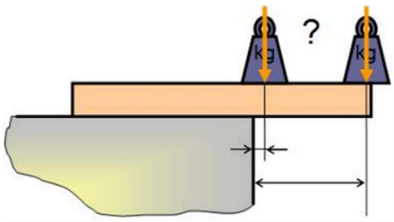
Il est extrêmement important de préciser qui exerce l'action et qui la subit (par exemple, dans la notation précédente, c'est le doigt qui exerce une action sur le cube).

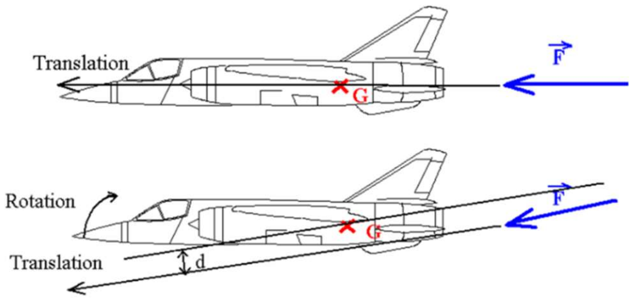
L'intensité des forces se mesure en **Newtons (N)** de dimension $[MLT^{-2}]$.

## 2.2. Notion de moment d'une force

Les effets d'une force sur un solide dépendent du point d'application de la force par rapport au solide.

*Exemples :*

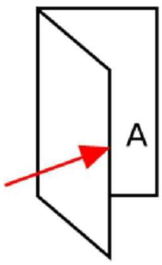
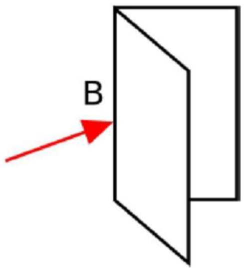


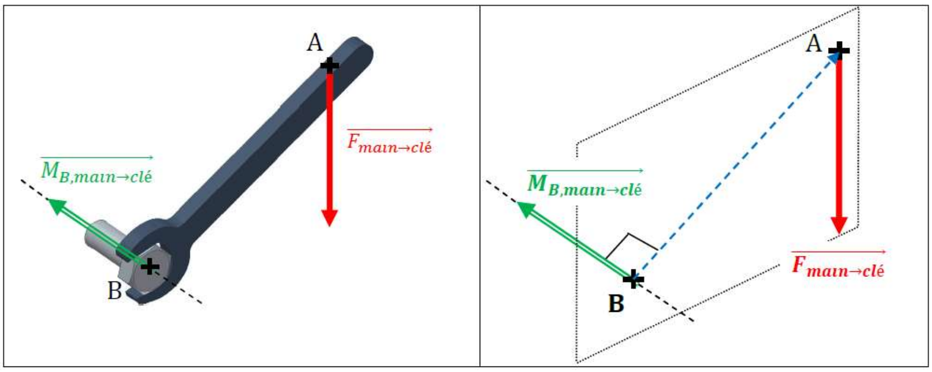
Ainsi, pour traduire l'action mécanique d'une force, compte tenu de sa position, il est nécessaire de faire intervenir la notion de moment.

On appelle ***moment*** (ou « moment d'une force ») l'outil mathématique servant à décrire de manière simple une action mécanique créant ou empêchant une **rotation**.

*Exemple de la porte :* En pratique, pour produire ou empêcher une rotation de la porte, on utilise l'action de la main tirant sur la poignée, ce que l'on modélise par une force.

| | |
|---|---|
| Cas A : si l'action de la main est une action qui s'exerce au niveau de la poignée, le mouvement résultant s'effectue au niveau de l'axe de rotation de la porte, c'est à dire au niveau du mur.   | Cas B : si la direction de celle-ci se trouve à couper l'axe de rotation entre le mur et la porte, alors cette dernière restera immobile.   |

Par cet exemple, on conçoit aisément que l'action sur la porte dépend du point d'application de la force.
Le moment dépend donc non seulement de l'intensité de la force qui l'engendre, mais aussi de son point d'application, son sens et sa direction.




Ainsi, un moment a lui aussi les caractéristiques d'un vecteur :

- un point d'application B ;
- une direction ;
    - perpendiculaire au support du pointeur (A, $\overrightarrow{F_{main \rightarrow clé}}$) ;
    - perpendiculaire à la droite (AB).
- une intensité (en **N.m**) ;

$$\left\|\overrightarrow{M_{B,main \rightarrow clé}}\right\| = \left\|\overrightarrow{F_{main \rightarrow clé}}\right\| * \left\|\overrightarrow{BA}\right\| * \sin\left(\overrightarrow{F_{main \rightarrow clé}}, \overrightarrow{BA}\right)$$

En effet, le moment est maximum lorsque $\left(\overrightarrow{F_{main \rightarrow clé}}, \overrightarrow{BA}\right) = 90°$

- un sens : $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{F_{main \rightarrow clé}}, \overrightarrow{M_{B,main \rightarrow clé}}\right)$ qui forme un trièdre direct.

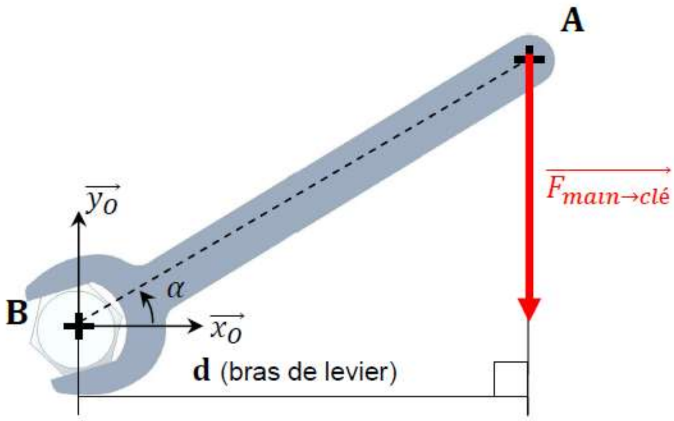
On a donc :

$$\boxed{\overrightarrow{M_{B,main \rightarrow clé}} = \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{F_{main \rightarrow clé}}}$$

On exprime ainsi la tendance qu'a la force $\overrightarrow{F_{main \rightarrow clé}}$ à provoquer un mouvement de rotation autour de l'axe.

**Remarques** :

- Le moment de cette force en A est évidement nul.
- Un moment s'exprime en Newton mètre (N.m), éviter d'écrire m.N qui peut porter à confusion avec mN.
- La dimension des N.m est $[ML^2T^{-2}]$, ce qui est homogène à une énergie.
- Dans certain cas, notamment 2D, il peut être utile d'utiliser la méthode du « bras de levier » :




$$\overrightarrow{M_{B,main\to clé}} = -d \times \left\|\overrightarrow{F_{main\to clé}}\right\| . \overrightarrow{z_O}$$

Sens du moment

Bras de levier (avec d⊥ $\overrightarrow{F_{main\to clé}}$ )

Intensité de la force

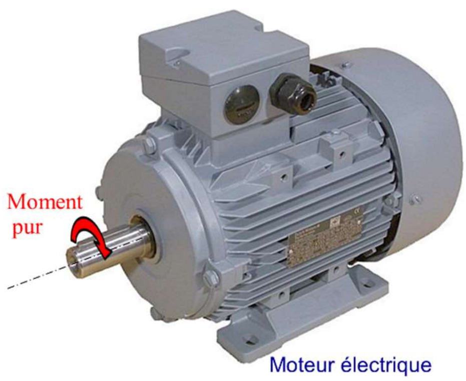
Vecteur normal au plan $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{F_{main\to clé}})$

Ici $d = AB \times \cos(\alpha)$

### 2.2.1. Couple

Quand une rotation est produite ou bloquée par une action mécanique qui s'applique directement au niveau de l'axe de rotation, le terme de **couple** est à privilégier. C'est le cas par exemple des moteurs.

**Remarque** : Un couple est un moment particulier.



## 2.3. Torseur d'action mécanique

Soient trois points $A$, $B$, $C$ et une action mécanique de type *force* $\overrightarrow{F_{1\to2}}$ exercée en $A$ par un corps (1) sur un solide (2).

Le moment de cette force s'exprime en $C$ par :

$$\overrightarrow{M_{C,1\to2}} = \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{F_{1\to2}}$$

Qui s'écrit également :

$$\overrightarrow{M_{C,1\to2}} = (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}) \wedge \overrightarrow{F_{1\to2}}$$

Soit :

$$\overrightarrow{M_{C,1\to2}} = \overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{F_{1\to2}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{F_{1\to2}}$$

Et finalement :

$$\overrightarrow{M_{C,1\to2}} = \overrightarrow{M_{B,1\to2}} + \overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{F_{1\to2}}$$

On voit avec cette égalité que le champ des moments de force est un champ de moments de torseur ; comme le champ des vecteurs vitesses d'un solide, c'est un **champ équiprojectif.**

On peut alors appliquer la relation de Varignon et utiliser l'outil torseur pour modéliser l'action mécanique de (1) sur (2). **Il a les mêmes propriétés que le torseur cinématique.**

$$\boxed{\{\mathcal{T}_{1\to2}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{1\to2}} \\ \overrightarrow{M_{P,1\to2}} \end{Bmatrix}_P}$$

Avec $R$ la « résultante », indépendante du point de réduction (point d'écriture du torseur) et les moments, dépendant du point de réduction qui vérifient la relation de Varignon.

**Remarque** : Comme pour la cinématique, il est **impératif** de préciser le point d'écriture du torseur, qui correspond au point d'expression du moment.

### 2.3.1. Ecriture du torseur statique :

En posant, dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ :

- $\overrightarrow{R_{1\to2}} = X\vec{x} + \mathrm{Y}\vec{y} + Z\vec{z}$
- $\overrightarrow{M_{P,1\to2}} = L\vec{x} + \mathrm{M}\vec{y} + N\vec{z}$

| En ligne : | En colonne : |
|---|---|
| $\{\mathcal{T}_{1\to2}\} = \begin{Bmatrix} X\vec{x} + \mathrm{Y}\vec{y} + Z\vec{z} \\ L\vec{x} + \mathrm{M}\vec{y} + N\vec{z} \end{Bmatrix}_P$ | $\{\mathcal{T}_{1\to2}\} = \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{P,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$ |

**Remarques :** Comme pour la cinématique, et comme pour tous les torseurs :

- La résultante est à haut en ligne et à gauche en colonne, elle ne dépend pas du point $(\overrightarrow{\Omega_{1/0}}, \overrightarrow{R_{1\to2}})$.
- Le moment est en bas en ligne et à droite en colonne, il dépend du point $(\overrightarrow{V_{A\in1/0}}, \overrightarrow{M_{P,1\to2}})$.

### 2.3.2. Torseurs particuliers

**Glisseur** : Un torseur d'action mécanique est un glisseur s'il est de la forme :

$$\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_P ; \vec{R} \neq \vec{0}$$

L'axe central de ce glisseur est la droite passant par $P$, de direction celle de $\vec{R}$. Tous les points de cet axe ont donc un moment nul. Dans ce cas particulier, l'action mécanique est appelée force et l'axe central du glisseur est le support de la force.

**Torseur couple :** Un torseur d'action mécanique est un torseur couple s'il est de la forme :

$$\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{C} \end{Bmatrix}_{\forall P} ; \vec{C} \neq \vec{0}$$

Ce torseur a la même expression pour tout point de l'espace (Cf Varignon).

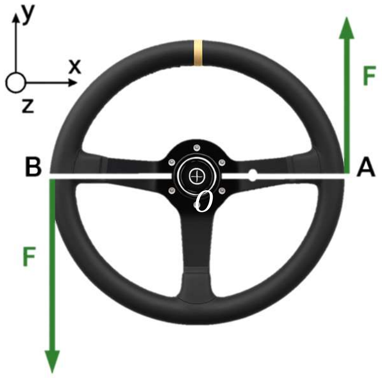
<u>Exemples courants :</u> le couple moteur, l'action du stator d'un moteur sur son rotor.

## 3. Application de cours

On note (1) la main droite, (2) la main gauche et (0) le volant.

On pose $r = OA = OB$.

1) Déterminer les torseurs des actions mécaniques de la main droite sur le volant en $A$ et de la main gauche sur le volant en $B$.
2) En déduire le torseur des actions mécaniques de la main droite sur le volant en $O$.
3) En déduire le torseur des actions mécaniques de la main gauche sur le volant en $O$.
4) Déduire de ces deux torseurs le torseur résultant des actions des mains sur le volant.




1) $\{\mathcal{T}_{1\to 0}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{F_{1\to 0}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} F\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$ et $\{\mathcal{T}_{2\to 0}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{F_{2\to 0}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} -F\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$

2) D'après la relation de Varignon : $\overrightarrow{M_{O,1\to 0}} = \overrightarrow{M_{A,1\to 0}} + \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{F_{1\to 0}} = \vec{0} + r\vec{x} \wedge F\vec{y} = rF\vec{z}$

$$\{\mathcal{T}_{1\to 0}\} = \begin{Bmatrix} F\vec{y} \\ rF\vec{z} \end{Bmatrix}_O$$

3) D'après la relation de Varignon : $\overrightarrow{M_{O,2\to 0}} = \overrightarrow{M_{B,2\to 0}} + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{F_{2\to 0}} = \vec{0} - r\vec{x} \wedge -F\vec{y} = rF\vec{z}$

$$\{\mathcal{T}_{2\to 0}\} = \begin{Bmatrix} -F\vec{y} \\ rF\vec{z} \end{Bmatrix}_O$$

4) Les torseurs sont au même point, on peut les sommer : $\{\mathcal{T}_{1+2\to 0}\} = \{\mathcal{T}_{1\to 0}\} + \{\mathcal{T}_{2\to 0}\}$

$$\{\mathcal{T}_{1+2\to 0}\} = \begin{Bmatrix} F\vec{y} \\ rF\vec{z} \end{Bmatrix}_O + \begin{Bmatrix} -F\vec{y} \\ rF\vec{z} \end{Bmatrix}_O = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ 2rF\vec{z} \end{Bmatrix}_O$$