

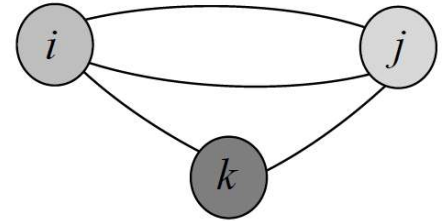
Liaisons équivalentes

1. Définition

Supposons qu'il existe entre les pièces i et j , plusieurs liaisons réalisées avec ou sans pièce intermédiaire.

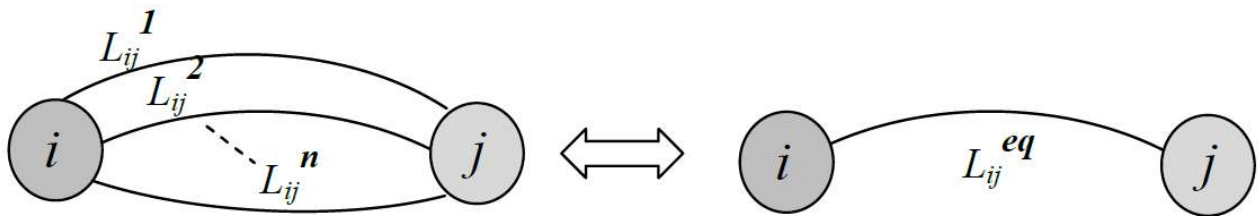
La liaison équivalente à l'ensemble des liaisons situées entre les pièces i et j est la liaison théorique de référence qui a le même comportement que cette association de liaisons.

C'est-à-dire qu'elle transmet la même action mécanique et qui autorise le même mouvement.



2. Liaisons en parallèle

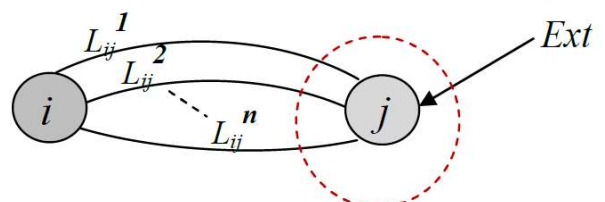
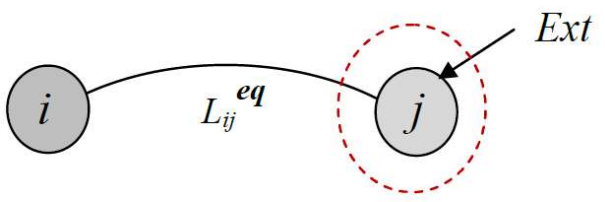
Soient n liaisons disposées en parallèle entre deux solides.



2.1. Torseur des actions mécanique transmissibles équivalent

Nous verrons au prochain chapitre que la condition nécessaire pour qu'un système matériel E soit en équilibre par rapport à un référentiel galiléen est que la somme des torseurs des actions mécaniques extérieures à E soit nulle :

$$\sum \{\mathcal{T}_{\vec{E} \rightarrow E}\} = \{0\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{\vec{E} \rightarrow E} \\ \vec{M}_{A(\vec{E} \rightarrow E)} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A, \text{ où } A \text{ est un point quelconque.}$$

 On isole $\{j\}$ puis on applique le PFS : $\sum_{k=1}^n \{\tau_{i \rightarrow j}^k\} + \{\tau_{ext \rightarrow j}\} = \{0\} \quad (1)$	 On isole $\{j\}$ puis on applique le PFS : $\{\tau_{i \rightarrow j}^{eq}\} + \{\tau_{ext \rightarrow j}\} = \{0\} \quad (2)$
---	--

Remarque : PFS signifie Principe Fondamental de la Statique, il s'agit de la seconde loi de Newton appliquée à un solide dont l'accélération est nulle.

En comparant les relations (1) et (2), on a donc :

$$\{\tau_{i \rightarrow j}^{eq}\} = \sum_{k=1}^n \{\tau_{i \rightarrow j}^k\}$$

Conclusion : Pour qu'une composante du torseur des actions transmissibles de la liaison équivalente ne soit pas nulle, il suffit qu'une seule composante d'une liaison L_{ij}^k soit non nulle.

2.2. Torseur cinématique équivalent

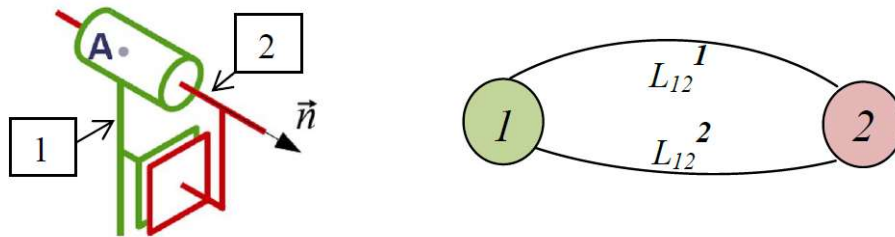
On a par compatibilité (cf. cours de cinématique du solide C05-04) :

$$\{\mathcal{V}_{i/j}^{eq}\} = \{\mathcal{V}_{i/j}^1\} = \{\mathcal{V}_{i/j}^2\} = \dots = \{\mathcal{V}_{i/j}^n\}$$

Remarque : La connaissance du torseur des actions transmissibles de la liaison équivalente entraîne la connaissance du torseur cinématique de la liaison équivalente, et vice-et-versa.

2.3. Exemple

Soit un ensemble de solide modélisé par le schéma cinématique suivant.



Liaison équivalente par approche cinématique :

$$\{\mathcal{V}_{1/2}^{eq}\} = \{\mathcal{V}_{1/2}^1\} = \{\mathcal{V}_{1/2}^2\}$$

$$\begin{pmatrix} p_{12}^{eq} & u_{12}^{eq} \\ q_{12}^{eq} & v_{12}^{eq} \\ r_{12}^{eq} & w_{12}^{eq} \end{pmatrix}_{A,(-,-,\vec{n})} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{12}^1 & w_{12}^1 \end{pmatrix}_{A,(-,-,\vec{n})} = \begin{pmatrix} 0 & u_{12}^2 \\ 0 & v_{12}^2 \\ r_{12}^2 & 0 \end{pmatrix}_{A,(-,-,\vec{n})}$$

Donc :

$$\{\mathcal{V}_{1/2}^{eq}\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{12}^{eq} = r_{12}^1 = r_{12}^2 & 0 \end{pmatrix}_{A,(-,-,\vec{n})}$$

La liaison équivalente est une liaison pivot d'axe $(A, \vec{n})$.

Liaison équivalente par approche statique :

$$\{\tau_{1 \rightarrow 2}^{eq}\} = \{\tau_{1 \rightarrow 2}^1\} + \{\tau_{1 \rightarrow 2}^2\}$$

$$\begin{Bmatrix} X_{12}^{eq} \\ Y_{12}^{eq} \\ Z_{12}^{eq} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} L_{12}^{eq} \\ M_{12}^{eq} \\ N_{12}^{eq} \end{Bmatrix}_{A,(\vec{x},\vec{y},\vec{n})} = \begin{Bmatrix} X_{12}^1 \\ Y_{12}^1 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} L_{12}^1 \\ M_{12}^1 \\ 0 \end{Bmatrix}_{A,(\vec{x},\vec{y},-)} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ Z_{12}^2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} L_{12}^2 \\ M_{12}^2 \\ 0 \end{Bmatrix}_{A,(\vec{x},\vec{y},\vec{n})}$$

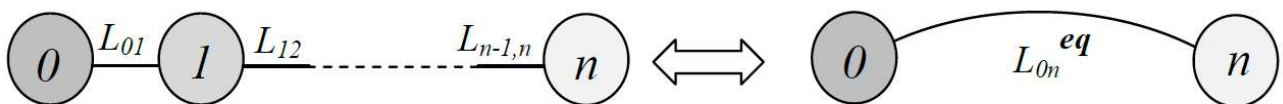
Donc :

$$\{\tau_{1 \rightarrow 2}^{eq}\} = \begin{Bmatrix} X_{12}^{eq} = X_{12}^1 \\ Y_{12}^{eq} = Y_{12}^1 \\ Z_{12}^{eq} = Z_{12}^2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} L_{12}^{eq} = L_{12}^1 + L_{12}^2 \\ M_{12}^{eq} = M_{12}^1 + M_{12}^2 \\ 0 \end{Bmatrix}_{A,(\vec{x},\vec{y},\vec{n})}$$

La liaison équivalente est une liaison pivot d'axe $(A, \vec{n})$.

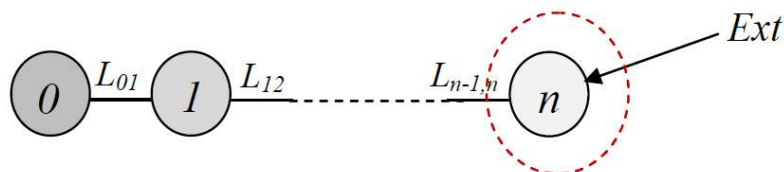
3. Liaison en série

Soient n liaisons à la suite l'une de l'autre par l'intermédiaire de $n + 1$ solides. On obtient une chaîne ouverte.



3.1. Torseur des actions transmissibles équivalent

On isole $\{n\}$. Bilan des actions mécaniques extérieures, on a :



Bilan des actions mécaniques :

- L'action de liaison : $\{\tau_{n-1 \rightarrow n}\}$
- Les autres actions extérieures : $\{\tau_{ext \rightarrow n}\}$

On applique le principe fondamental de la statique :

$$\{\tau_{n-1 \rightarrow n}\} + \{\tau_{ext \rightarrow n}\} = \{0\} \quad (3)$$

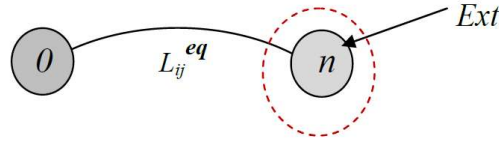
En isolant $\{n \cup (n - 1)\}$, en appliquant le même principe, on obtient :

$$\{\tau_{n-2 \rightarrow n-1}\} + \{\tau_{ext \rightarrow n}\} = \{0\} \quad (3)$$

On montre donc par isolement successif que l'on a pour $k \in [1, n]$

$$\{\tau_{k-1 \rightarrow k}\} + \{\tau_{ext \rightarrow n}\} = \{0\} \quad (3)$$

De même, en prenant cette fois le modèle de la liaison équivalente :



On obtient en appliquant le même principe :

$$\{\tau_{0 \rightarrow n}^{eq}\} + \{\tau_{ext \rightarrow n}\} = \{0\} \quad (4)$$

En comparant les relations (3) et (4), on a donc :

$$\{\tau_{0 \rightarrow n}^{eq}\} = \{\tau_{0 \rightarrow 1}\} = \dots = \{\tau_{n-1 \rightarrow n}\}$$

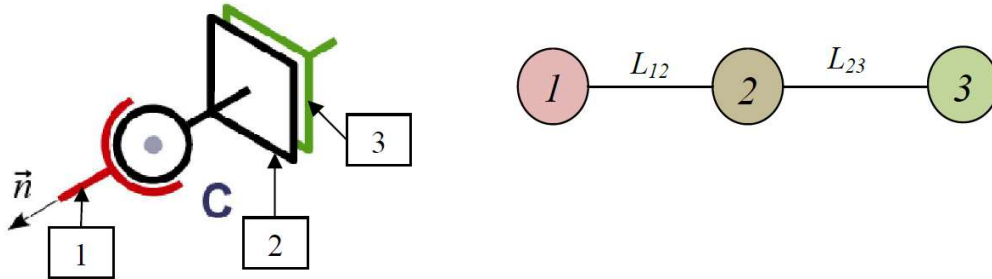
3.2. Torseur cinématique équivalent

On effectue une composition de mouvements :

$$\{\mathcal{V}_{n/0}^{eq}\} = \{\mathcal{V}_{n/n-1}\} + \dots + \{\mathcal{V}_{1/0}\}$$

3.3. Exemple

Soit un ensemble de solide modélisé par le schéma cinématique suivant.



Liaison équivalente par approche cinématique :

$$\{\mathcal{V}_{1/3}^{eq}\} = \{\mathcal{V}_{1/2}\} + \{\mathcal{V}_{2/3}\}$$

$$\begin{pmatrix} p_{13}^{eq} & u_{13}^{eq} \\ q_{13}^{eq} & v_{13}^{eq} \\ r_{13}^{eq} & w_{13}^{eq} \end{pmatrix}_{C,(\vec{x},\vec{y},\vec{n})} = \begin{pmatrix} p_{12} & 0 \\ q_{12} & 0 \\ r_{12} & 0 \end{pmatrix}_{C,(\vec{x},\vec{y},\vec{n})} + \begin{pmatrix} 0 & u_{23} \\ 0 & v_{23} \\ r_{23} & 0 \end{pmatrix}_{C,(\vec{x},\vec{y},\vec{n})}$$

Donc :

$$\{\mathcal{V}_{12}^{eq}\} = \begin{pmatrix} p_{13}^{eq} = p_{12} & u_{13}^{eq} = u_{23} \\ q_{13}^{eq} = q_{12} & v_{13}^{eq} = v_{23} \\ r_{12}^{eq} = r_{12} + r_{23} & 0 \end{pmatrix}_{C,(\vec{x},\vec{y},\vec{n})}$$

La liaison équivalente est une liaison ponctuelle d'axe $(C, \vec{n})$.

Liaison équivalente par approche statique :

$$\{\tau_{1 \rightarrow 3}^{eq}\} = \{\tau_{1 \rightarrow 2}\} = \{\tau_{2 \rightarrow 3}\}$$

$$\left\{ \begin{matrix} X_{13}^{eq} & L_{13}^{eq} \\ Y_{13}^{eq} & M_{13}^{eq} \\ Z_{13}^{eq} & N_{13}^{eq} \end{matrix} \right\}_{C,(\vec{x},\vec{y},\vec{n})} = \left\{ \begin{matrix} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{matrix} \right\}_{C,(\vec{x},\vec{y},\vec{n})} = \left\{ \begin{matrix} 0 & L_{23} \\ 0 & M_{23} \\ Z_{23} & 0 \end{matrix} \right\}_{C,(\vec{x},\vec{y},\vec{n})}$$

Donc :

$$\{\tau_{1 \rightarrow 3}^{eq}\} = \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{13}^{eq} = Z_{12} = Z_{23} & 0 \end{matrix} \right\}_{C,(\vec{x},\vec{y},\vec{n})}$$

La liaison équivalente est une liaison ponctuelle d'axe $(C, \vec{n})$.

4. Bilan

	Liaisons en parallèle	Liaisons en série
Liaison équivalente par approche cinématique	Egalité	Somme
Liaison équivalente par approche statique	Somme	Egalité